Untersuchung
über
den eigentlichen Sinn
der
höheren Analysis,
nebst
einer idealischen Übersicht
der
Mathematik und Naturkunde
nach ihrem ganzen Umfang.

Von
Ernst Gottfried Fischer.

Mit einer Kupfertafel.

Berlin,
bei Johann Friedrich Weiss. 1808.

ARCHIMEDES UND DER SCHÜLER.

Zu Archimedes kam ein wifsbegieriger Jüngling,
Weihe mich, sprach er zu ihm, ein in die göttliche Kunst,
Die so herrliche Frucht dem Vaterlande getragen
Und die Mauren der Stadt vor der Sambuca beschützt.
„Göttlich nennst du die Kunst? Sie ist's, erwiedert der Weise,
Aber das war sie, mein Sohn, eh' sie dem Staate gedient.
Willst du nur Früchte von ihr, die kann auch die Sterbliche zeugen,
Wer um die Göttin freit, suche in ihr nicht das Weib.“

SCHILLER.

ER

einer

n

ERSTE ABHANDLUNG.

Versuch

einer idealischen Übersicht der Naturkunde

nach ihrem ganzen Umfang.

ei

Dan
ideal
was ic
nen G
Zweck
sich ei
und i
stens
nunft
griffen
gehobe
fodert,
derselb
scheint
auf de
genüget
ben Miß

Versuch
einer idealischen Übersicht der Naturkunde.

Damit sich der Leser bey dem Ausdrucke idealische Übersicht bestimmt das denke, was ich wünsche, wird es nöthig seyn, über einen Gegenstand, der nicht eigentlich zu dem Zwecke meiner Abhandlung gehört, der aber an sich einer umständlicheren Erörterung bedürftig und im höchsten Grade würdig wäre, wenigstens ein Paar Worte zu sagen.

Kant hat in seiner Kritik der reinen Vernunft eine höchst merkwürdige Classe von Begriffen unter dem Namen Ideen bestimmt ausgehoben und die Philosophen dringend aufgefodert, seine genaue und scharfe Bestimmung derselben rein und unverfälscht zu erhalten. Es scheint mir nicht, als hätten Kants Nachfolger auf der speculativen Bahn seiner Auffoderung genüget: denn ihre Systeme sind gerade dieselben Misgriffe in Ansehung des Idealischen, vor denen Kant die Philosophie verwahren wollte. Sollte ich kurz und faſslich erklären, was eine Idee sey, so möchte ich etwa so sagen: Jede Geisteskraft ist in sich selbst unbeschränkt, wird aber begreiflich in jedem bestimmten Fall nur in einem bestimmten Grade, also beschränkt, angewendet. Jeder Begriff, welcher durch eine beschränkte Anwendung eines Zweiges des Vorstellungsvermögens erzeugt wird, ist ein nichtidealischer Begriff; aber die Vorstellung von etwas, das durch eine schlechthin unbeschränkte Anwendung derselben Kraft erzeugt werden würde, ist ein idealischer Begriff, eine Vernunftidee. Beispiele mögen diſs erläutern. Die Vorstellung von irgend einem Mittheilungsmittel unserer Gedanken und Gefühle, ist der nichtidealische Begriff einer Sprache; in diesem Sinn giebt es Wortsprachen, Zeichensprachen (durch sichtbare Zeichen), es giebt eine Augensprache, eine Fingersprache u. s. f.: aber die Vorstellung von einem absolut vollkommenen Mittheilungsmittel ist der idealische Begriff oder die Idee einer Sprache. Die Einbildungskraft vermag die Vorstellung jeder Gröſse zu vervielfältigen, oder dieselbe zu theilen, und dadurch Vorstellungen von bestimmten Gröſsen zu erzeugen; die Vorstellung von einer absolut unbeschränkten Vervielfältigung oder Theilung führt auf die Ideen des Unendlichgroſsen und Unendlichkleinen. Die Ideen beruhen also auf der absoluten Unbeschränktheit jeder Geisteskraft, und sind folglich in dem Wesen unsers Vorstellungsvermögens gegründet. Sie entstehen von selbst, und nothwendig, sobald sich der Geist der Unbeschränktheit seiner Kraft deutlich bewufst wird, und sie sind im Grunde selbst nichts anders, als die deutliche Vorstellung dieser Unbeschränktheit. Dafs diese Vernunftideen verschieden sind, von ästhetischen oder dichterischen Ideen und noch mehr von Schwärmereien und Hirngespinsten, fällt deutlich genug in die Augen; aber es liegt aufser dem gegenwärtigen Zweck, diese Begriffe und ihr gegenseitiges Verhältnifs zu erörtern. Hier mag es genügen, über die Vernunftideen noch folgende Bemerkungen beizubringen. Was die Idee in absoluter Unbeschränktheit enthält, das mufs dem menschlichen Geiste in jedem endlichen bestimmten Grade erreichbar seyn, sonst ist sie keine Idee, sondern ein Hirngespinnst. Ideen sind ferner offenbar allgemeine Begriffe; denn sie entkleiden ihr Object von allen Einschränkungen, also auch von aller Individualität, und sie haben daher mit allen andern allgemeinen Begriffen dieses gemein, dafs sie durch kein wirkliches Object rein und unvermischt mit fremdartigen Bestandtheilen dargestellt werden können. Aber sie unterscheiden sich von andern allgemeinen Begriffen dadurch, dafs sie nicht einmal *in* einem Object, wie diese, darstellbar sind, weil sie absichtlich alle empirische Einschränkungen abschneiden. So ist

z. B. alles, was wesentlich zu dem *empirischen*, also *nichtidealischen Begriffe* eines Menschen gehört, in jedem von der Natur vollendeten Individuum vollständig dargestellt, nur vermischt mit der Unendlichkeit aller seiner Individualitäten. Die *Idee* von einem Menschen hingegen, d. h. der allgemeine Begriff, den wir uns von einem Menschen machen müssen, insofern er mit absoluter Vollendung das wäre, was er nach seinem ganzen Wesen seyn kann, oder seyn soll, diese Idee ist offenbar nur ein bloſses reines Gedankending, das in der Wirklichkeit nur annähernd, und doch immer nur in unendlichem Abstand von der Idee dargestellt werden kann: denn Ideen bezeichnen bloſs Zielpunkte, denen sich alles empirische nähern soll, ohne es je zu erreichen.

Es ist, dünkt mich, schon aus dieser kurzen und daher unvollständigen Darstellung sichtbar, daſs die Ideen von unendlicher Wichtigkeit sind für allen theoretischen und practischen Gebrauch der Vernunft. Ideen und Ideale sind nothwendige Erzeugnisse der Vernunft, nicht Schimären, womit sie diejenigen verwechseln, welche alles Idealische für ein Spielwerk der Phantasie halten, dessen der vernünftige Mensch wohl entbehren könne; aber man muſs eine Idee auch nicht als das in endlicher Entfernung liegende Ziel auf einer Laufbahn betrachten, das man erreichen solle; denn was nicht erreicht werden kann, das kann auch kein Gesetz befehlen, zu erreichen. Ideen sind Gesichtspunkte, welche die Richtung bestimmen, die unsere Thätigkeit nehmen soll: denn nur durch das Hinstreben des einzelnen und aller zum idealisch Guten, Wahren und Schönen ist Erhebung vom schlechtern zum bessern möglich.

Auch jeder Wissenschaft und jedem Theile derselben liegt eine Idee zum Grunde, welche das höchste nie erreichbare Ziel derselben in einem einzigen einfachen Begriff zusammendrängt. Dunkel oder deutlich muſs jedem, der eine wissenschaftliche Arbeit treibt, eine Idee vorschweben; ohne sie ist alle Thätigkeit mechanisches oder zweckloses Streben. Die falsch gefaſste Idee einer Wissenschaft weiset der Geistesthätigkeit einen unrichtigen Zielpunkt an, und führt die Forschung auf einen falschen Weg, so daſs sie Jahrhunderte lang den Fortschritt der Wissenschaft hemmen kann, wovon die Geschichte der Physik bis auf Baco und die Geschichte der Philosophie bis auf den heutigen Tag zwey sehr klare Beyspiele liefern.

Selbst den ersten Schöpfern einer Wissenschaft schwebt bey ihren unvollkommenen Arbeiten eine Idee vor; aber dann gewöhnlich dunkel, und verworren oder gar verfälscht. So dachte man sich in den Zeiten des Alterthums unter Physik die Lehre vom ersten Ursprunge der Dinge; daher nannte man sie von φυειν Entstehungslehre. Diſs war eine verfälschte Idee: denn sie stellte der Naturforschung ein

Ziel auf, das überall auch nicht einmal in irgend einem endlichen Grade erreichbar ist. Zugleich verfälschte sie die Methode, weil sie als Erkenntnifsquelle die metaphysische Speculation aufstellte, die immer ins Leere geführt hat, und ewig dahin führen wird, so oft sie etwas sucht, was aufser dem Bewufstseyn liegt. Daher konnte diese Physik nichts anders seyn, als was noch bis auf diesen Augenblick der gröfste Theil der speculativen Philosophie ist, ein ewiges Hin- und Herschwanken von einem System zum andern, so lange, bis der immer rege Geist des Menschen, durch günstige Umstände geleitet, erst einen nicht unbedeutenden Vorrath ächter, probefester physikalischer Kenntnisse zu Tage gefördert hatte, aus deren Betrachtung man die richtige Methode der Wissenschaft lernen konnte. So entdeckte sie Baco, und empfahl sie eindringend und nicht ohne Erfolg allen Naturforschern die mit und nach ihm lebten. Aber über der Idee der ganzen Naturkunde lag dennoch ein gewisses Dunkel, selbst nachdem Copernicus und Keppler und Galiläi und Newton auf der von Baco bezeichneten Bahn grofse Schätze gefunden hatten. Denn ob sie gleich ganze Provinzen im Reiche der Naturkunde entdeckt hatten, so lagen doch alle ihre Entdeckungen nur auf einer einzigen Seite dieses weitläuftigen Reichs, auf der Seite der mechanischen Naturlehre. Von den übrigen weitläuftigen Gebieten dieses Reichs hatte man kaum eine dunkele Ahnung: denn man hatte zwar Chemie seit Jahrhunderten getrieben, aber man trieb sie nur als Handwerk oder als geheime Kunst, nicht als einen Theil der Physik; auch hatten die Ärzte schon manches im Felde der organischen Physik entdeckt; aber auch sie sahen es nicht für einen Theil der Naturlehre an, sondern blofs als Hülfskenntnifs ihrer hülfsbedürftigen Kunst. Dem achtzehnten Jahrhundert war das Verdienst vorbehalten, jeden Theil der Naturkunde in seinem wahren Rang anzuerkennen, jeden derselben durch wichtige Entdeckungen zu erweitern, und so eine idealische Ansicht des Ganzen und aller Theile möglich zu machen. Um so auffallender ist es, dafs man in unsern besten physikalischen Schriften nichts, als zufällig aufgefafste und nach keinem sichern Leitfaden geordnete Bemerkungen, über das Ganze der grofsen Wissenschaft und ihrer Theile, überhaupt wenig scharf bestimmtes und befriedigendes findet. Noch auffallender aber ist die Erscheinung noch am Anfang des neunzehnten Jahrhunderts sogenannte Naturforscher zu sehen, welche von neuem dem Schattenbilde nachlaufen, das vor Baco fast zwey tausend Jahre lang den menschlichen Verstande geäfft hatte.

Ich hoffe, dafs diese vorläufigen Bemerkungen hinreichen werden, allen Mifsverständnissen in Ansehung des Ausdrucks, idealische Übersicht der Naturkunde, vorzubeugen. Ich setze sie einer empirischen Übersicht entgegen.

Die letzte betrachtet die Wissenschaft bloſs in ihrem wirklichen Zustande und sie fragt bloſs, was ist da? nicht, was kann, was soll da seyn? Die idealische hingegen erhebt sich über die Wirklichkeit und bestimmt den möglichen Umfang der ganzen Wissenschaft und ihrer Theile; aber sie bewirkt dies nicht durch Spiele des Witzes und der Phantasie, die so oft für Vernunft-Ideale gelten müssen, sondern dadurch, daſs sie von dem deutlich erkannten Zweck aller einzelnen Theile zu der Idee des Ganzen emporsteigt und von da aus, als von einer Höhe, der ganzen Wissenschaft und aller Theile Umfang, Gränzen, eigenthümliche Beschaffenheit und wirklichen oder möglichen Anbau überschaut.

Ich werde versuchen, eine solche Übersicht der Naturkunde zu geben. Kann ich es nicht in der geistreichen Manier thun, in welcher das Publicum erst kürzlich eine idealische Übersicht der ehrwürdigen Alterthumskunde erhalten hat, so wird man doch, hoffe ich, Sachkenntniſs, deutliche Begriffe, Unbefangenheit und Eifer für Wahrheit und Wissenschaft nicht vermissen.

Naturkunde.

Ich nenne den gesammten Inbegriff aller physikalischen Wissenschaften mit einem einzigen Namen Naturkunde *(physica universalis)*:

denn alle diese Wissenschaften bilden nicht etwa bloſs ein zufällig zusammengefügtes Haufwerk, sondern sie werden durch eine einzige einfache und klare Idee zu einer einzigen groſsen Wissenschaft von unermeſslichem Umfang verbunden. Der Zweck jeder einzelnen Naturforschung ist ganz unzweydeutig deutliche Erkenntniſs einer Erscheinung, die wir durch die Sinne wahrnehmen. Diese Erscheinungen aber sind von doppelter Art. Entweder stellen sie sich uns dar als wirklich bestehende Dinge, Körper, Naturwesen, oder sie zeigen sich uns als bloſse Veränderungen in dem Zustand eines Naturwesens, und so ist die einfache klare Idee, welche der ganzen Naturkunde zum Grunde liegt: wissenschaftliche Erkenntniſs des ganzen Umfangs aller Naturwesen und ihrer Veränderungen.

Vermöge dieser Idee zerfällt die gesammte Naturkunde in zwey groſse Zweige: in die Kenntniſs der Naturwesen selbst, und in die Kenntniſs ihrer Veränderungen. Jene nenne ich Naturbeschreibung *(physica historica)*, diese Naturlehre *(physica dogmatica)*.

I. Naturbeschreibung.

Der erste Theil ist nichts anderes, als was man gewöhnlich Naturgeschichte nennt. Ihr Zweck ist, durch genaue Kenntniſs alles dessen, was jeder Art von Naturwesen eigenthümlich ist zu einem allgemeinen Überblick aller erkennbaren Naturwesen, und ihres Verhältnisses unter sich, gegen uns und gegen die ganze Natur zu gelangen. Die unermeſsliche Menge von Naturgegenständen macht eine Eintheilung derselben unumgänglich nothwendig, weil ohne sie Verwirrung unvermeidlich und Übersicht unmöglich seyn würde. Die systematische Anordnung erscheint also, aus diesem Gesichtspuncte betrachtet, als wesentliches Erfodemiſs der Wissenschaft; doch muſs der Naturforscher wohl bemerken, daſs sie nicht das Einzige und Höchste, daſs sie nur Hülfsmittel ist, jedes einmal entdeckte Naturwesen gleichsam festzuhalten, indem man ihm seinen Platz in dem Systeme anweiset. Bloſs die Uebersicht zu erleichtern und jedes wirkliche Naturwesen im System, jedes im Systeme aufgeführte in der Natur wieder finden zu können, ist der Zweck des Systems; es ist nicht die Wissenschaft selbst, es ist nur das Register derselben. Und so wie das Register eines Buchs tadelhaft ist, wenn es das Aufschlagen erschwert, eben so ein naturhistorisches System, wenn es das Auffinden der Naturkörper erschwert; ein Vorwurf, den man mit Recht jedem künstlichen System machen muſs, da es mich immer in Gefahr setzt, den Eichbaum von der Haselstaude nicht ohne Hülfe des Mikroskops unterscheiden zu können. Bei jedem Versuche ein künstliches System durchzuführen, liegt allezeit das Miſsverständniſs zum Grunde, als sey das

System die Wissenschaft selbst, oder das Höchste in derselben. Aber die Erfahrung lehrt, dafs auch ein natürliches System nicht vollständig durchzusetzen ist. Woher das? Unser Geist und das Weltall, die Innenwelt und die Aufsenwelt, sind zwar innigst verbunden, aber dennoch beide in sich selbstständig und von einander unabhängig. Die Aufsenwelt ist nicht nach unsern Denkformen gearbeitet: es ist in ihr unendlich mehr als unser Geist, in dieser Spanne Zeit, in dieser beschränkten Organisation des Körpers fassen kann; und selbst das wenige, was durch den engen Canal der Sinne in uns kommt, harmonirt nur deswegen nothdürftig mit unsern Denkformen, weil es bei dem Durchgang durch die Sinne auf eine uns unbegreifliche Art, die Gestalt der Vorstellungen annimmt: aber nie wird sich die unendliche Natur vollkommen an unsere Denkformen anschmiegen: denn sie wollte uns verwahren vor dem Irrthum unsere Vorstellungen für die Natur selbst zu halten, der uns zu der gröfsten aller Thorheiten verleiten könnte, uns selbst für Schöpfer der Natur anzusehen, weil wir in einem gewissen Sinn Schöpfer unserer eigenen Vorstellungen sind. — Das einzige haltbare naturhistorische System ist ein wohlgewählter Mittelweg zwischen dem natürlichen und künstlichen: denn es soll eben sowohl den Ansprüchen der Natur, als den Ansprüchen unserer Denkkraft Genüge thun. Blofs hierin liegt der Grund, warum das

Linneische System in der Botanik jedem andern den Vorzug abgewonnen hat, und ihn stets behaupten wird, so lange die Pflanzenforscher den Geist desselben nicht verkennen werden.

Das höchste Ziel der historischen Naturkunde so wie alles wissenschaftlichen Forschens überhaupt, sind allgemeine Ansichten, und zwar nicht bloſs empirische, sondern idealische. Aber der einzige zulässige Weg zu dem Ächtidealischen, ist mühsames Studium des Einzelnen, nicht voreiliges Streben einer ungezügelten Phantasie. Die genaue Kenntniſs des einzelnen muſs erst zu empirischen allgemeinen Ansichten führen, in deren sorgfältigem Studium die Vernunft allein den sichern Leitfaden in das heilige Land des Ächtidealen hinüber finden kann. Daher ist und bleibt eine genaue, möglichst vollständige Kenntniſs des Einzelnen die wesentliche Grundlage der Wissenschaft, und die genaue mit philosophischem Geiste durchgeführte Beobachtung eines einzigen Geschöpfs, von seinem Beginnen an bis zu seinem Untergang, in allen seinen Verhältnissen gegen Wesen derselben Art, gegen Naturwesen anderer Art, gegen uns selbst, gegen die ganze Natur, bringt der Wissenschaft mehr wesentlichen Gewinn, als hundert neue Namen im Systeme. Man würde mich aber gänzlich miſsverstehen, wenn man glauben wollte, als tadelte ich das Aufsuchen, Bestimmen und Ordnen neuer Gegenstände: nichts weniger, als das, vielmehr ist diese Arbeit nothwendig, verdienstlich und durch die Idee der Wissenschaft selbst, welche möglichste Vollendung und Überblick des Ganzen verlangt, geboten. Ich wollte vielmehr die innere Würde der Naturgeschichte bemerklich machen, die oft von Nichtunterrichteten verkannt wird, indem sie die todten Namenregister für das Wesen der Wissenschaft nehmen. Jedes vorhandene Wesen und sein Verhältnifs gegen das Ganze ist ein Gedanke der Natur; wer ihn studiert beschäftigt sich mit einem hohen würdigen Gegenstand.

Der unendliche Umfang der Naturbeschreibung macht Unterabtheilungen nothwendig, und die Natur bietet uns dieselben selbst dar in dem grofsen Unterschied nichtorganisirter und organisirter Körper, und in der organischen Natur in dem Unterschied nichtempfindender und empfindender Wesen. Die Naturbeschreibung wird also drei Theile haben: Beschreibung der nichtorganisirten, der nichtempfindenden und der empfindenden organisirten Wesen: Mineralogie, Botanik, Zoologie.

1) Mineralogie.

Der erste Theil der Naturbeschreibung, insofern er die ganze nicht organisirte Natur umfassen soll, existirt gewissermafsen noch jetzt nur in der Idee. Doch würde es nur mäfsiger Zusätze bedürfen, um sie in den Weg einzuleiten, den die idealische Ansicht der Naturkunde vorschreibt. Die Mineralogie ist bis jetzt nichts als die Kenntniſs des Gesteins, das der Fleiſs des Bergmanns, aus dem Innern der Gebirge zu Tage fördert. Aber dieses Gestein umfaſst nicht die ganze nichtorganische Natur: denn es finden sich in diesem Naturreiche auch luftförmige und tropfbare Flüssigkeiten von mancherlei Art. Dahin gehören alle ausdehnsamen, permanenten oder dunstförmigen Flüssigkeiten, aus denen der Luftkreis gemischt ist, oder die sich in vulcanischen Gegenden, und in unterirdischen Höhlen entwickeln: ferner alles Gewässer des Erdbodens, das Meerwasser, das süſse Landwasser, alle Arten mineralischer Quellen, auch Naphtaquellen u. s. f. Lauter Gegenstände, die ein allgemeines physicalisches Interesse, und zum Theil sogar für den Bergmann noch ein besonderes Interesse haben. Widenmanns Vorschlag, ein viertes Naturreich unter dem Namen Atmosphärilien einzuführen, gründet sich augenscheinlich auf die richtige Bemerkung, daſs es eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Körpern giebt, für welche sich in der ganzen Naturbeschreibung kein Platz findet. Allein es ist, dünkt mich, auch sichtbar, daſs seine Atmosphärilien kein eigenes Naturreich, sondern bloſs ein Theil der anorganischen Natur sind, und daſs sie daher nicht der Gegenstand einer eigenen Wissenschaft seyn dürfen, sondern nur einen Zusatz zu der Beschreibung der anorganischen Körper ausmachen müssen. Wird die

Mine-

Mineralogie nicht als Hülfswissenschaft des Bergmanns, sondern als ein Theil der historischen Naturkunde bearbeitet, so kann sie ohnedifs nicht vermeiden, einen Blick auf den Bau unseres ganzen Weltkörpers zu thun, und dann dringen sich die jetzt fehlenden Gegenstände von selbst auf; aber auch bei der Beschreibung der eigentlichen Fossilien macht der physicalische Gesichtspunkt darin einen wichtigen Unterschied, dafs die Gebirgskunde bei weitem als der wichtigste Theil erscheint; da hingegen für den Bergmann die Kenntnifs der mineralogisch einfachen Fossilien wichtiger ist.

Eine Wissenschaft, die durch ein Bedürfnifs des Lebens erzeugt worden, bleibt oft lange Zeit in den Gränzen der beschränkten Idee, welche dieses Bedürfnifs darbietet, als wagte sie nicht, sich über diese Idee zu erheben, und den Rang einzunehmen, der ihr in der Reihe der Wissenschaften gebührt. Vielleicht wäre aus der Feldmefskunst der Aegyptier nie eine allgemeine Gröfsenlehre geworden, wären die Griechen nicht durch ein höheres Bedürfnifs, als die Anwohner des Nils, getrieben worden, sich mit ihr zu beschäftigen. Wenn der Geist mehr ist, als der Körper, so mufs nicht das Bedürfnifs, sondern die Vernunft den Umfang der Wissenschaften bestimmen. Es ist eine verkehrte Ansicht der Dinge, die Wissenschaften zu Dienerinnen des Bedürfnisses zu machen; nur freundliche Gehülfinnen des Lebens können und sollen sie seyn. Geistesthätigkeit ist das Höchste im Menschen, also Zweck an sich, abgesehn von allem Einfluſs auf das gemeine Bedürfniſs. Was dieses fodert, ist nöthig, aber oft sehr unwichtig; was die Wissenschaft fodert, ist wichtig, aber oft für den gemeinen Nutzen entbehrlich. Nöthig und wichtig sind Begriffe, welche die Menschen immer und ewig verwechseln.

Der beschränkte Name, Mineralogie, darf eben so wenig hindern, ihren Begriff einem höheren, wissenschaftlichen Bedürfniſs gemäſs zu erweitern, so wenig der eben so beschränkte Name, Geometrie, gehindert hat, aus ihr eine allgemeine Theorie der Gröſsen zu machen.

2) Botanik.

Der zweite Theil der Naturbeschreibung, die Botanik, umfaſst denjenigen Theil der organisirten Naturwesen, dem Empfindung beyzulegen uns nichts berechtigt: denn Empfindung kann nicht ohne Bewuſstseyn, sey es auch noch so dunkel, gedacht werden; und Bewuſstseyn den Pflanzen beizulegen, hieſse mindestens gesagt, eine Hypothese aus der Luft greifen. Die wenigen Erscheinungen, welche einen Gedanken an Empfindung veranlassen könnten, haben nur eine sehr entfernte Ähnlichkeit mit der thierischen Empfindung, und zeigen nichts, was mit der Vorstellung eines organischen Mechanismus unvereinbar wäre. Die Pflanzen machen die niedrigere Classe der organisirten Wesen aus, in denen sich blos organisch bildende und mischende, aber nicht jene höheren Lebenskräfte des Thieres äuſsern. Bildende und mischende Kräfte wirken zwar auch in der nichtorganisirten Natur, denn der Krystall bildet sich aus gleichartigen Theilen, und sein Stoff mischt sich aus ungleichartigen Bestandtheilen; aber alle Wirkung geschieht hier nur von auſsen, nur durch zufälligen Zug und Stoſs des benachbarten Körpers. In den Pflanzen muſs eine innere, unsichtbare, geheimniſsvolle Kraft liegen, welche den Stoff, der in ihren Wirkungskreis kommt, beherrscht, und die sichtbar sich berührenden Theile zwingt, sich nach ganz andern Gesetzen zu bilden und zu mischen, als auſser ihrem Wirkungskreis, ja nicht selten auf eine den Gesetzen der Mechanik und Chemie ganz entgegengesetzte Art. In der Anzahl der Individuen machen die Pflanzen die gröſsere, in der Anzahl der Arten, die kleinere Hälfte der organisirten Welt aus. Dennoch ist der Umfang der Botanik unermeſslich. Kenner zählen schon jetzt gegen dreiſsigtausend botanisch bestimmte Arten, und doch ist der von Pflanzenforschern untersuchte Erdstrich nur ein sehr kleiner Theil des trockenen Landes. Und von dem gröſseren Theil der untersuchten Pflanzen wissen wir wenig mehr, als den Namen und den Wohnort, von ihren Eigenheiten aber nur gerade das wenige, was zur Anweisung eines bestimmten Platzes im System unumgänglich nöthig ist. Sehr klein ist aber die Anzahl der Pflanzen, die man in allen Perioden ihres Daseyns sorgfältig beobachtet, deren Eigenschaften, deren Verhältniſs gegen Boden und Clima, gegen die übrigen Gewächse, gegen das Thierreich etc., man untersucht hat, so daſs man sagen könnte, man kenne ihre natürliche Geschichte in einer gewissen Vollständigkeit.

Man sieht leicht, daſs nach allem bisher vorgetragenen, für das wesentlichste in der Botanik ungefähr dasjenige zu halten sey, was Linné *Philosophia botanica* nannte, und wovon unser berühmter Wildenow in seinem Grundriſs der Kräuterkunde die Grundzüge so schön zusammengestellt hat. Aber offenbar können alle die allgemeinen Ansichten, welche hierher gehören, innere Haltbarkeit und Vollendung nur durch die genauste Kenntniſs des einzelnen erhalten, die sich aber viel weiter erstrecken muſs, als auf das, was das System fodert.

Die Beschäftigung mit der Pflanzenwelt ist übrigens der lieblichste Theil der gesammten Naturkunde. Wem es gelingt, sich den Sorgen des Lebens und dem Gewühl der Geschäfte zu entziehen, der weihe sich dem Dienst der Pflanzenkunde. Über ihr schwebt ein freundlicher Engel, der fromme Ruhe und kindliche Heiterkeit über den Geist ausgieſst.

3) Zoologie.

Der dritte Theil, die Zoologie, ist ganz unstreitig der weitläuftigste und schwierigste Theil der historischen Naturkunde. Sie umfaſst denjenigen Theil der organischen Natur, in welchem sich die höheren Lebenskräfte regen. Das Thier hat Sinne und Gliedmaſsen; jene als Werkzeuge des Empfindens, diese als Werkzeuge des Wollens. Durch jene wirkt die Aussenwelt auf die innere wundersame Kraft im Thiere, wir nennen sie Geist; durch jene wirkt der Geist, nicht nach dem Gesetz einer mechanischen Nothwendigkeit, sondern sich selbst bestimmend, auf die Aussenwelt zurück. Empfindungsvermögen und Willenskraft, sind weder bildende noch mischende Kräfte; was sie wirken, sind Vorstellungen und Handlungen, also weder körperliche Form, noch körperlicher Stoff; es sind Wirkungen einer ganz eigenen höheren Art, die wir lediglich durch unser eigenes Selbstbewuſstseyn kennen. Wer sie glaubt, aus Gesetzen der Mechanik und Chemie erklären zu können, der macht einen ähnlichen Versuch, als der, welcher die Bewegung eines geworfenen Steins erklären wollte aus einem ihm beywohnenden Vorstellungsvermögen. — Es ist nicht möglich, die Anzahl der Thierarten, die mit uns diesen Erdball bewohnen, auch nur zu schätzen; selbst die Anzahl derer zu schätzen, die schon so weit untersucht sind, daſs man sie durch Namen und Character unterscheiden kann, ist schwer, weil man sie aus hundert Büchern zusammenlesen müſste. Des kleinen, oft kaum sichtbaren Gewürms und der Insecten, ist eine unendliche Menge; aber selbst die Zahl der gröſseren Thiere ist erstaunend groſs. Wie unermeſslich viel ist hier noch zu beobachten übrig! Nur einige der gröſseren Thiere sind es, deren natürliche Geschichte, deren Lebensweise, deren Eigenschaften, deren Verhältnisse gegen die übrige Natur, wir etwas vollständiger kennen. Die zahllosen Schaaren kleiner Wesen, die jeden Winkel füllen, wo Nahrung für sie ist, kennen wir gar nicht oder nur sehr oberflächlich.

Aber wozu nützt es, höre ich, dünkt mich, fragen, wozu nützt es, jedes Insekt, jeden Wurm, jedes dem Auge kaum sichtbare Thierchen zu kennen? O des ewigen Fragens in der Wissenschaft! Was nützt es? Ist Forschen nicht Geistesthätigkeit? Ist Erkennen dessen, was da ist, nicht der höchste aller Genüsse, Geistesgenuſs? Wenn der unbegreifliche Urheber unsers Daseyns uns Augen gab, mit denen wir sehen können; wenn er sichtbare Gegenstände vor sie hinstellte; wenn er uns einen Verstand gab, der begreifen kann, was wir sehen; war es nicht sein Wille, ist es nicht unser Beruf, daſs wir sehen, daſs wir forschen, daſs wir begreifen sollen? Zwar, wenn die Zoologie uns nichts weiter geben sollte, als den System-Namen und den künstlichen Character des Thiers, so wäre sie unstreitig eine unfruchtbare Wissenschaft: denn statt der Natur, die wir haben wollen, gäbe sie uns blofs ein einförmiges, dürftiges Machwerk des Menschen. Aber ich sage es noch einmal: das System ist das blofse Register der Wissenschaft. Nur höhere Ansichten der Natur können die Vernunft befriedigen; nur sie können das menschliche Geschlecht zu einer höheren Stufe geistiger Vollkommenheit erheben! Und wer kann wissen, ob nicht vielleicht dereinst, gerade die Beobachtung der kleinsten Insecten, einen glücklichen Kopf zu den herrlichsten Ansichten der Natur hinleiten können!

Es läfst sich schwerlich ein schönerer, und in aller Absicht zweckmäfsigerer Plan für die Zoologie erdenken, als der, welchen Blumenbach in seinen kleinen, aber inhaltreichen Handbuch der Naturgeschichte befolgt hat. Auch hier sehe ich die allgemeinen Ansichten, die er dem Ganzen und jeder Classe vorausschickt, als das wesentlichste, als die Frucht von der Kenntnifs des einzelnen an; das System, was auf die allgemeinen Betrachtungen folgt, enthält nur die Beläge derselben. Aber die Zoologie ist so weitläuftig, dafs, wenn man sie in diesem Geiste nach einem gröfseren Maafsstab ausführen wollte, offenbar jede einzelne Thier - Classe überflüssigen Stoff zu einem eignen Werk von grofsem Umfang darbieten würde.

II. Naturlehre.

In der **Naturbeschreibung** waren die Naturwesen selbst, oder vielmehr das Bleibende und Charakteristische ihrer Erscheinungen, der Gegenstand der Betrachtung. In der **Naturlehre** ist es nicht das Bleibende, sondern das Veränderliche der Erscheinungen, was man zu erforschen sucht, und so ist klar, daſs durch diese beiden Theile das mögliche Gebiet der gesammten Naturkunde gänzlich erschöpft ist.

Die Veränderungen der Naturerscheinungen sind kein zufälliger regelloser Wechsel derselben, sonst würde überall keine wissenschaftliche Untersuchung derselben möglich seyn. Alle Veränderungen in der Natur stehen unter ewigen, unveränderlichen Gesetzen, und so ergiebt sich aus den ersten Begriffen, **daſs die Erforschung der *Naturgesetze* der eigentliche, ja der einzige Zielpunkt des Strebens für den dogmatischen Naturforscher sey.** Zwar setzt man gewöhnlich noch einen zweiten hinzu, **die Erforschung der *Ursachen*:** allein ich hoffe den Leser zu überzeugen, daſs er sich an dem ersten allein begnügen könne und müsse. Nicht als hielte ich die Erforschung der Ursachen für unwichtig oder entbehrlich, sondern: 1) weil der zweite Zielpunkt schon in dem ersten enthalten, also seine besondere Aufstellung überflüssig ist;

denn, ist die Ursach einer Erscheinung erkennbar, so bietet sie sich bey Erforschung des Gesetzes von selbst dar: 2) ob es gleich ein allgemeines Gesetz unsers Vorstellungsvermögens ist, dessen wir uns schlechterdings nicht entschlagen können oder dürfen, jede Veränderung, die wir wahrnehmen, als Wirkung einer Ursache anzusehen, so begreift man doch leicht, dafs es Ursachen gebe, die nicht erkennbar sind. Denn da unsere Vorstellungen von den Dingen nicht die Dinge selbst sind, so können die Ursachen der Erscheinungen nur in so fern erkennbar seyn, als sie in den Vorstellungen liegen, welche uns die Aussenwelt durch die Sinne darbietet. Dagegen müssen alle Ursachen, die in den Dingen selbst liegen, ohne mit in unsere Vorstellungen überzugehen, für uns absolut unerkennbar seyn. Diefs ist der Sinn eines Satzes, über welchen alle denkende Naturforscher und Philosophen einverstanden sind, dafs wir die ersten Ursachen der Dinge nicht kennen. Nun erfodert aber das Wesen einer ächten Idee, dafs die Geistesthätigkeit, welche sie fodert, in jedem endlichen Grade erreichbar sey (S. 5); stellt man also das Erforschen der Ursachen als idealischen Zielpunkt für den Naturforscher auf, so weifst man ihm ein unächtes Ziel an, das sehr leicht in das Land der Träumereien führt. Auch lehrt die Geschichte der Wissenschaft, dafs alle Speculationen über die Ursache der Schwere, der magnetischen Anziehung, über die Natur des

Lichts etc., die Wissenschaft nicht um eine Haarbreite gefördert haben: 3) vielleicht könnte man aber glauben, daſs die Kenntniſs der Gesetze selbst mangelhaft bleiben müsse, wenn die Ursache nicht erkennbar ist; aber glücklicher Weise lehrt die Erfahrung, daſs wir gerade die Gesetze der Schwere und die Bewegungen des Lichts vollständiger kennen, als die Gesetze irgend einer bekannten Ursache von Erscheinungen. In der That begreife ich auch nicht, was man noch weiter verlangen könne, oder wünschen dürfe, als vollständige Kenntniſs der Naturgesetze: denn man denke sich einen Naturforscher, vor dem alle Naturgesetze enthüllt lägen, würde wohl für diesen irgend eine Erscheinung unerklärbar seyn? Und, was kann man denn noch weiter verlangen, als Erklärung der Erscheinungen? Ich wünsche, daſs alle denkende Naturforscher diesen Bemerkungen eine ernstliche Beherzigung schenken mögen, um nach und nach immer mehr alle Köpfe auf den einzigen sichern Weg aller Naturforschung hinzuleiten.

Um nun die gesammten Theile der Naturlehre erschöpfend aufzufinden, bemerke ich zuerst, daſs der Naturforscher entweder bloſs einzelne Classen von Erscheinungen, d. h. solche, die nach ähnlichen Gesetzen erfolgen, oder das Ganze der Erscheinungen zum Gegenstand seiner Betrachtung macht. Hierdurch zerfällt die gesammte Naturlehre in zwei groſse

Abtheilungen, die ich die besondere und die allgemeine Naturlehre nennen will *). In jenen ist eine besondere Art von Naturerscheinungen, in dieser der ganze Zusammenhang aller Naturerscheinungen, der Gegenstand der Betrachtung.

In der besondern Naturlehre dringt sich uns der grofse Unterschied nichtorganischer und organischer Erscheinungen wieder auf. Sie zerfällt also in anorganische und organische Naturlehre.

So mannigfaltig die Erscheinungen in der anorganischen Natur sind, so lassen sie sich doch erschöpfend in zwei Classen bringen; sie sind entweder räumliche, oder materielle Veränderungen. Jene betrachtet die mechanische, diese die chemische Naturlehre.

In der organischen Naturlehre wird man in der Folge Unterabtheilungen machen, und besonders die Naturlehre der Pflanzen und Thiere unterscheiden müssen. Aber der gegenwärtige, noch sehr mangelhafte Zustand der Wissenschaft verstattet, sie noch zu verbinden.

---

*) In meinem Lehrbuch der mechanischen Natur-Lehre, so wie in meiner *Dissertatio de disciplinis physicis*, heifst jene die theoretische, diese die angewandte Naturlehre. Die hier gebrauchten Benennungen scheinen mir expressiver, ob sie gleich von dem gewöhnlichen, etwas unbestimmten Sprachgebrauch abweichen.

Durch diese drei oder vier Theile ist also das Gebiet der besondern Naturlehre völlig erschöpft.

Die allgemeine Naturlehre betrachtet den ganzen Zusammenhang der Naturerscheinungen, und dieſs entweder nach Verhältnissen des Raums, oder der Zeit. In der ersten Rücksicht ist sie entweder physische Erdkunde, oder physische Sternkunde, je nachdem sie den Zusammenhang der Erscheinungen, entweder bloſs auf unserm Wohnplatz, oder auſser demselben betrachtet. Nach Verhältnissen der Zeit betrachtet das Ganze der Erscheinungen die Geschichte der Natur, die man mit der Naturbeschreibung (oder, wie man sie gewöhnlich nennt, Naturgeschichte), nicht verwechseln muſs. Sie versucht in dem gegenwärtigen Zustand der Natur Data aufzufinden, um die ehemals wirklichen, oder künftig möglichen Zustände der Natur zu beurtheilen. Eine Wissenschaft, die allerdings mehr in der Idee, als in der Wirklichkeit existirt. Indessen gehört sie zu einer idealischen Übersicht des Ganzen, und was man unter dem Namen Geologie vorzutragen pflegt, enthält einige nicht zu verachtende Bruchstücke derselben.

Ehe wir die einzelnen Theile der Naturlehre durchgehen, wird es nöthig seyn, von einem Begriff zu reden, der auf allen Seiten physikalischer Werke vorkommt, von dem Begriff einer Naturkraft. Erscheinungen, die nach gleichen Gesetzen erfolgen, rühren nicht nothwendig von einerlei Ursachen her, (eine gleichförmig beschleunigte Bewegung kann von einer ganz andern Kraft, als der Schwere, bewirkt werden); dagegen zeigt sich oft, dafs sehr verschiedene Erscheinungen dennoch eine und dieselbe Ursache haben (man erinnere sich der mannigfaltigen Wirkungen der Wärme). Wann man berechtigt ist, eine Menge ähnlicher oder unähnlicher Wirkungen einer und derselben Ursache zuzuschreiben, so nennen wir diese eine Naturkraft. Aber es frägt sich, auf welche Art man sich überzeugen könne, dafs mehrere Erscheinungen von einer und derselben Ursache herrühren? Ist die Ursache wahrnehmbar (wie z. B. die Wärme dem Gefühl, das Licht dem Auge), so belehrt uns die Erfahrung davon unmittelbar: ist aber die Ursache nicht wahrnehmbar, so kann die Überzeugung blofs dadurch entstehen, dafs sich ganz bestimmt, und mit mathematischer Genauigkeit, das Daseyn eines und desselben Grundgesetzes in allen noch so verschieden scheinenden Wirkungen darthun läfst, so wie Newton zeigte, dafs bei dem Fall eines Körpers und bei der Bewegung eines Planeten ein und dasselbe Gesetz zum Grunde liegt. Ist ein solches einfaches Gesetz für eine ganze Classe von Erscheinungen gefunden, so hat man einen deutlichen Begriff von der Kraft, und es ist möglich, eine haltbare Theorie derselben auszuführen, wenn auch das innere Wesen der Ursache, (wie z. B. bei der allgemeinen Gravitation), uns völlig unbekannt ist. Da das Streben nach den höchsten und einfachsten Naturgesetzen der eigentliche idealische Zielpunkt des Naturforschens ist (S. 24), so liegt darin vermöge des bloſsen Begriffs schon das Bestreben, alles auf die einfachsten Naturkräfte zurückzuführen. Daher die Regel: man müsse zur Erklärung der Erscheinungen so wenig Naturkräfte als möglich annehmen. Aber diese Regel wird sehr oft gemiſsbraucht. Eine gewisse Ähnlichkeit in Erscheinungen, deren Ursache nicht wahrnehmbar ist (Polarität des Magnetismus, der Elektricität, der Krystallisationsfähigkeit etc.), berechtigt mich durchaus nicht, sie einer einzigen Kraft zuzuschreiben, sondern nur die ganz bestimmte Enthüllung eines einzigen Grundgesetzes, aus dem sich alle Verschiedenheit ihrer Wirkungen deutlich ableiten läſst. Vereinfachen zu wollen, ehe man ein solches Gesetz gefunden hat, ist eine der Wissenschaft höchst nachtheilige Voreiligkeit, welcher sich z. B. diejenigen schuldig machen, die es als eine ausgemachte Sache ansahen, nicht als bloſse Vermuthung aufstellen, daſs Gravitation, Cohäsion, Adhäsion und Affinität bloſs modificirte Wirkungen einer und derselben Grundkraft seyn. Auch hier zeigt sich, wie wichtig es sey, daſs der Naturforscher nur die Untersuchung der Gesetze zu seinem Ziel mache: denn diese wird ihn gegen jeden voreiligen Schluſs verwahren.

A) Die besondere Naturlehre enthält,

nach dem was oben auseinander gesetzt worden, drei Haupttheile, die mechanische, die chemische und die organische Naturlehre.

4) Mechanische Naturlehre.

Räumliche Veränderungen sind Bewegungen, und so ist die mechanische Naturlehre die Wissenschaft von den bewegenden Naturkräften in der nichtorganischen Welt. Die Erfahrung hat uns aber in diesem Gebiete zwey sehr verschiedene Arten von Bewegungen kennen gelehrt. Bey der einen sehn wir eine körperliche Masse, mit unendlich mannigfaltiger Abänderung der Umstände, ihren Ort verändern. Bey der andern sehen wir bloſs gewisse, unsern Sinnen wahrnehmbare Wirkungen, in einem mit Körpern erfüllten Raum fortschreiten, ohne irgend eine bewegte Masse wahrzunehmen. Von der ersten Art sind die Bewegungen, welche die Schwere, der Anstoſs undurchdringlicher Körper und die magnetische Kraft hervorbringt; Die Bewegungen des Lichts sind von der zweiten Art. Wärme und Electricität bringen beyde Arten von Bewegungen zugleich hervor. Die Theorie der eben genannten Naturkräfte bestimmt die einzelnen Abschnitte und den wohlbegränzten Umfang der mechanischen Naturlehre. Um aber diese Gränzen auf das bestimmteste wahrzunehmen, muſs man die mathematische und physische Bewegungslehre unterscheiden. Jene ist, wie ich in der folgenden Abhandlung darthun werde, durchaus nichts, als ein Theil der reinen Mathematik, der die physischen Begriffe von Masse und Kraft nicht kennt; sondern bloſs von der Geschwindigkeit und Richtung eines bewegten Punktes handelt. Die physische Bewegungslehre wendet diese reine Bewegungslehre auf die Naturerscheinungen an. Daher ist ein groſser Theil der mechanischen Naturlehre mit der Mathematik so innig verbunden, daſs er ohne dieselbe nicht verstanden, folglich auch nicht genugthuend vorgetragen werden kann. Das eigenthümliche Geschäft des Naturforschers hierbey ist, bey jeder Classe bewegender Kräfte die Grundbegriffe und die Gesetze, nach welchen jede Kraft wirkt, genau zu bestimmen; die weitere Ausführung, die Anwendung auf alle Erscheinungen, welche eine mechanische Naturkraft hervorbringt, kann dann offenbar nichts, als mathematische Arbeit seyn. Daher kommt es, daſs man einige Abschnitte der mechanischen Naturlehre unter dem Namen, angewandte Mathematik, abgesondert vorzutragen pflegt, was für den ersten Unterricht nicht zu miſsbilligen ist; in einer idealischen Übersicht der Wissenschaft aber erfodern die Gesetze einer richtigen Topik, diese Abschnitte zur Physik, nicht zur Mathematik, zu rechnen. Sollte es einst dem Scharfsinn der Naturforscher gelingen, die Grundgesetze aller mechanischen Natur-

Naturkräfte völlig zu enthüllen, so wird die ganze mechanische Naturlehre beinahe aus nichts, als aus Anwendungen der Mathematik bestehen. Vor jetzt sind es nur zwei groſse Abschnitte, nebst ihren Unterabtheilungen, bei welchen dieser Fall eintritt: die Gesetze der Schwerkraft sind durch Galiläi und Newton, die Gesetze der Bewegungen des Lichts durch Newton vollständig enthüllt worden. Auf jene beziehen sich Statik und Mechanik, Hydrostatik und Hydraulik, Ärostatik und Pneumatik: auf diese Optik, Dioptrik und Katoptrik. Doch schwanken wir auch jetzt noch in einigen dieser Abschnitte, selbst in Ansehung der ersten Begriffe, welches namentlich bei der Bewegung tropfbarer und luftförmiger Massen der Fall ist. Noch mangelhafter ist unsere Kenntniſs der übrigen mechanischen Naturkräfte; doch ist schon jetzt die Lehre von der Wärme und von der magnetischen Kraft auf einen Punkt geführt, wo sie der Beihülfe der Mathematik nicht mehr entbehren können; auch sieht man, daſs sogar die Electricität hin und wieder zu mathematischen Betrachtungen Veranlassung darbietet.

Aus dem, was hier über die mechanische Naturlehre gesagt worden, wird man leicht einsehen, daſs dasjenige, was man gewöhnlich schlechthin Physik, oder Naturlehre, oder auch Experimentalphysik nennt, nichts anders sey, als die mechanische Naturlehre, nach der hier entwickelten schärferen Bestimmung des Begriffs. Nur hat man bisher dem, was wesentlich dazu gehört, noch allerlei dürftige Bruchstücke aus andern Gebieten der Naturlehre angehängt: aus der neuern Chemie, die Lehre von den Luftarten; aus der physischen Geographie, etwas über die Atmosphäre; aus der Astronomie, einige Notizen von dem Weltgebäude. Kein Wunder, daſs man bei einer solchen Vermischung ungleichartiger Dinge eine scharfe Gränzlinie zwischen diesem und andern Theilen der Naturlehre, besonders der Chemie, nicht zu finden wuſste. Aber alle jene Bruchstücke müssen selbst bei dem ersten Vortrag abgeschnitten, und denen Theilen der Naturlehre vorbehalten werden, wohin sie gehören. Aus jenen übel verbundenen Bruchstücken lernt der Lehrling nichts gedeihliches, und man entzieht der so weitläuftigen und wichtigen mechanischen Naturlehre die nöthige Zeit. Daſs es unschicklich oder anmaſslich sey, auch jetzt noch, wie vor hundert Jahren, diesen Theil der Naturlehre allein Physik zu nennen, als ob Chemie und Physiologie u. s. w. nicht eben so gut Physik wären, fällt von selbst in die Augen. Es ist hier der Ort, noch ein Paar Worte über den Ausdruck, Experimentalphysik, zu sagen. Insofern der Naturforscher in allen Theilen seiner Wissenschaft durch Versuche die Gesetze der Naturkräfte ausmitteln muſs, könnte man die ganze Naturlehre Experimentalphysik nennen: man hat aber seit Newtons Zeiten einen eigenen Begriff mit dem Worte verbunden. Als unter Newtons Händen der gröſste Theil der mechanischen Naturlehre zu einer neuen Wissenschaft umgeschaffen wurde, die aber gröſstentheils nur denen zugänglich war, welche in die innersten Geheimnisse der Mathematik eingeweiht waren, dachte man auf Mittel, mit Newtons herrlichen Entdeckungen auch ein gröſseres Publicum bekannt zu machen. Man fing daher an, bloſs die Resultate tieferer Untersuchungen vorzutragen, und statt der mathematischen Beweise, durch sinnreich ausgedachte Versuche, gleichsam nur eine Bürgschaft ihrer Richtigkeit aufzustellen. Diesen Vortrag nannte man Experimentalphysik, eine Methode, die an sich gar nicht zu miſsbilligen, und dem ganz analog ist, was man nicht nur in allen andern Theilen der Naturlehre, sondern in allen Wissenschaften überhaupt thut. Es ist überall nur wenig Geistern verliehen, die Schätze der Wahrheit mit eigener Hand zu Tage zu fördern, und mit eigenen Augen den Fundort zu sehen, wo sie liegen. Wie klein ist selbst in der Geschichte die Anzahl derer, welche sie aus Quellen studieren können, wir übrigen müssen uns begnügen, das, was Männer vom Fach fanden, auf Treue und Glauben anzunehmen und zu unserm Nutzen und Frommen zu verwenden. In der mechanischen Naturlehre hat indessen diese Methode den Nachtheil gebracht, dafs man geglaubt hat, sie könne als Wissenschaft auch ohne Mathematik bestehen.

Die mechanische Naturlehre bleibt, selbst nach Wegschneidung fremdartiger Zusätze, eine äufserst weitläuftige und in der That für die Kräfte eines einzigen Mannes fast zu schwierige Wissenschaft. Besonders lassen sich in dieser Hinsicht zwei Theile unterscheiden, die nach ihrem ganzen Umfang zu verbinden, die gewöhnlichen Kräfte auch eines guten Kopfes übersteigt. Die strenger mathematischen Theile, Mechanik und Optik, erfodern, wenn nicht blofs vom Vortrag für Anfänger, sondern von Erweiterung der Wissenschaft die Rede ist, die tiefsten Kenntnisse der ganzen Mathematik, und so sind sie mehr als hinreichend, die vollen Kräfte eines einzigen Kopfes zu beschäftigen. Die übrigen Theile, Electricität, Thermometrie, Magnetismus, erfodern zwar gegenwärtig noch nicht schlechthin die tiefste Mathematik, sondern nur geübten mathematischen Scharfsinn; aber da hier noch die ersten Naturgesetze zu entdecken oder zu berichtigen sind, so machen sie eine unendliche Menge der feinsten Experimentalarbeiten nothwendig, die wiederum den Kräften des feinsten Kopfes volle Beschäftigung geben; und wie viel für die Wissenschaft zu erwarten ist, wenn ein guter Kopf seine ganze Kraft auf einen einzigen dieser Gegenstände concentrirt, difs beweist das Beispiel des trefflichen Volta.

5) Chemische Naturlehre.

Die chemische Naturlehre, als der zweite Theil der besondern Physik, ist die Wissenschaft der materiellen Veränderungen, die wir in der nichtorganischen Natur wahrnehmen. Es wird nöthig seyn, dieser Erklärung ein Paar erläuternde Bemerkungen beizufügen.

1) Es wird ohne Zweifel dem Leser auffallen, daſs ich das Gebiet der chemischen Naturlehre auf die nichtorganische Natur beschränke, da doch die Analyse organischer Stoffe einen sehr wichtigen Theil der Chemie in allen Lehrbüchern derselben ausmacht. Um alle Hindernisse einer richtigen Ansicht zu entfernen, muſs ich den Leser an dasjenige erinnern, was ich in der Einleitung über idealische und empirische Ansicht der Dinge gesagt habe. Übersicht einer Wissenschaft, als Wissenschaft, ist etwas ganz anderes, als Anordnung für den Vortrag; jenes ist eine rein idealische Arbeit; bei dieser sind empirische Rücksichten zu beobachten; sie läſst daher nur Annäherung an das Idealische zu. Die Natur verbindet oft Dinge untrennbar, die in der Idee geschieden werden müssen, und oft machen es empirische Rücksichten nöthig, oder nützlich, selbst das zu verbinden, was wohl an sich getrennt werden könnte. Die Untersuchung der Mischung organischer Stoffe gehört wohl ganz unstreitig in die organische Naturlehre; aber sie verdankt ihr ganzes Daseyn der neuern

Chemie, und bei der groſsen Unvollkommenheit, in welcher sich noch jetzt die organische Naturlehre befindet, würde diese äuſserst wichtige Untersuchung gänzlich vernachläſsigt werden, wenn sich die Chemie nicht mütterlich ihrer Pflege unterzöge. Überdiſs wird sich die Chemie nie der Betrachtung organischer Stoffe gänzlich entziehn können, weil sie mehrere wichtige Reagentien aus der organischen Natur hernimmt. Aber dennoch bleibt alles organische in der Idee etwas so scharf begränztes, daſs alles, was die Chemie daher aufnimmt, nur als aus einem fremden Gebiete entlehnt, betrachtet werden muſs.

2) Zwischen Mechanik und Chemie ist durch unsere Erklärungen eine so bestimmte Gränzlinie gezogen, daſs es gar nicht schwierig seyn kann, in jeder Naturerscheinung bestimmt zu unterscheiden, ob sie mechanisch oder chemisch, oder in welcher Rücksicht sie das eine oder das andere sey. Aber dennoch ist es auch hier nicht möglich, die deutliche idealische Gränzlinie in der Wirklichkeit überall zu beobachten. Es giebt Naturkräfte, welche mechanisch und chemisch zugleich wirken, z. B. Wärme und Electricität; hier ist in beiden Gebieten die Überschreitung der idealischen Gränze unvermeidlich. In andern Fällen ist eine Beobachtung der Gränze möglich, aber nicht rathsam. Die Veränderungen des Agregatzustandes sind chemische Erscheinungen. Der mechani-

sche Naturforscher muſs wenigstens davon Kenntniſs nehmen, daſs es verschiedene Agregatzustände der Körper gebe, weil die Gesetze der Bewegung dadurch sehr modificirt werden; indessen kann er den chemischen Erörterungen beinahe gänzlich ausweichen, wenn er es bloſs als unmittelbare Thatsache annimmt, daſs es feste tropfbare und luftförmige Körper gebe; aber er thut doch sehr wohl, wenn er die chemische Seite des Gegenstandes nicht aus der Acht läſst, weil er sonst leicht, z. B. bei ärostatischen Versuchen, in Gefahr kommen kann, Wirkungen der Luft und des ausdehnsamen Wasserdunstes zu verwechseln.

Um den Inhalt der chemischen Naturlehre mit einiger Anschaulichkeit darlegen zu können, ist es nöthig, den Begriff einer materiellen Veränderung, ob er gleich an sich nicht dunkel und zweideutig ist, dennoch etwas näher zu beleuchten. Daſs Holz, Stein, Metall, Wasser, gemeine Luft u. s. w. Stoffe von ganz verschiedener innerer Beschaffenheit seyn, sagen uns alle unsere Sinne; auch sehen wir täglich vor unsern Augen Umwandelungen der Körper vorgehen, die wir für neue Schöpfungen würden halten müssen, wenn nicht das bei den auffallendsten Umwandelungen doch stets sich gleichbleibende Gewicht aller Materie uns belehrte, daſs in der Natur kein Stäubchen wägbaren Stoffes weder entstehe, noch untergehe. Wir sehn (um von den zahllosen zauberähnlichen Umwandelungen zu schweigen, welche täglich unter der Hand des Chemikers hervorgehen) wir sehen das Eis zu Wasser, das Wasser zu unsichtbarem Dunste werden und umgekehrt; wir sehen das Eisen sich in Rost verwandeln und tausend Körper in Staub und Moder zerfallen; wir sehn den brennbaren Körper sich in Rauch und Dunst umwandeln oder gänzlich verschwinden. u. s. f. Diſs sind materielle Veränderungen, und die eigenthümliche allgemeine Aufgabe der Chemie ist: den Grund und die Gesetze dieser Veränderungen zu erforschen. Will man die Auflösung dieser Aufgabe, so weit sie bis jetzt die Chemie gefunden hat, in einen einzigen allgemeinen Satz zusammenfassen, so muſs man sagen: es gebe eine nicht groſse Anzahl wesentlich verschiedener Grundstoffe, aus deren mannigfaltiger Mischung alle körperliche Verschiedenheit hervorgehe. Im Wesentlichen scheint diese Antwort zwar nicht von der verschieden zu seyn, welche schon Aristoteles auf die Frage gab, indem er alle Körper aus den sogenannten vier Elementen zusammensetzte: auch beantworteten die Naturforscher nach ihm die Frage eben so, nur daſs sie andere Elemente an die Stelle der Aristotelischen zu setzen versuchten; dennoch ist ein sehr groſser Unterschied zwischen der ältern und gegenwärtigen Vorstellungsart. Was man bis in die letzte Hälfte des vorigen Jahrhunderts Elemente nannte, waren entweder Stoffe, die man aus unzulänglichen Gründen blofs aus der gemeinen Erfahrung aufgegriffen hatte, wie das Wasser und die Luft des Aristoteles, oder es waren Stoffe, von denen man überall keinen deutlichen und bestimmten Character angeben konnte, wie des Aristoteles Erde, oder es waren blofs hypothetische Wesen, wie sein Feuer, nebst den Elementen, welche späterhin Paracelsus, Becher und zuletzt Stahl in die Chemie einführten. Eben deswegen war es auch nicht möglich, von den Mischungen dieser Elemente deutliche und bestimmte Begriffe zu geben, und die Zusammensetzung der Körper aus ihnen durch synthetische und analytische Versuche darzuthun. In der neuern Chemie hingegen hat man es als Grundsatz anerkannt, obgleich nicht ganz consequent befolgt, nur solche Stoffe als Grundstoffe zuzulassen, deren Daseyn sich durch wirkliche Darstellung derselben, und durch genaue Bestimmun gihrer unterscheidenden Eigenschaften auf eine völlig unzweideutige Art darthun läfst; die Mischungen der Körper aber nicht errathen zu wollen, sondern sie gerade nur so anzuerkennen, wie sie aus unzweideutigen, analytischen oder synthetischen Versuchen hervorgehen. Hierdurch ist zwar die Anzahl der Grundstoffe bis gegen vierzig angewachsen; allein wem ist es unbekannt, welche bewundernswürdige Fortschritte die Wissenschaft seit der Anerkennung dieses Grundsatzes gemacht hat? In einem Zeitraum kaum eines halben Jahrhunderts hat der Fleifs und

Scharfsinn der Chemiker fast die ganze Körperwelt analysirt; ein auffallender Beweis, daſs der Weg der Erfahrung der einzig richtige im Reich der Naturwissenschaft sey. Dieser rasche Fortschritt der Chemie und das eigenthümliche ihrer Erkenntniſsart geben derselben ein eigenes, höchst anziehendes Interesse. Der Chemiker scheint einen Sinn zu haben, der den übrigen Sterblichen mangelt, indem er in allen Körpern um sich herum die Grundstoffe wahrnimmt, aus welchen sie die Natur mit geheimniſsvoller Kraft gemischt hat! Aber täuscht sich der Chemiker nicht, wenn er seine vierzig Grundstoffe für die einfachen Elemente der Körperwelt hält? Allerdings würde er sich täuschen, wenn er diſs wähnte. Aber der gründliche Chemiker ist weit von dieser Behauptung entfernt; er unterscheidet sorgfältig zwischen Grundstoffen und Elementen, die erstern sind ihm diejenigen Stoffe, die er nicht weiter zerlegen kann; in Ansehung der letztern bescheidet er sich, sie nicht zu kennen: ja er sieht ein, daſs der menschliche Geist nie zu einer sichern Kenntniſs derselben gelangen könne; aber er begreift auch deutlich, daſs die Grundlage eines haltbaren Gebäudes eben nicht nothwendig einfach, sondern nur fest seyn müsse, und daſs er eine feste Grundlage seiner Wissenschaft nur dann haben könne, wenn das Daseyn seiner Grundstoffe gewiſs ist, mögen sie übrigens in sich einfach oder noch so zusammengesetzt seyn, als man will. Mag dann immerhin die Zeit einen oder alle seine Grundstoffe noch ferner zerlegen: keine Entdeckung dieser Art bezüchtigt ihn eines Irrthums, sondern fügt nur zu dem Schatz schon erkannter Wahrheiten neue hinzu *).

Die chemischen Arbeiten, welche auf Erweiterung der Wissenschaft abzwecken, sind entweder practische oder theoretische.

In Ansehung der erstern begnüge ich mich, folgendes wenige zu bemerken. Ein grofser Theil dieser Arbeiten hat den Zweck, die Mischung und chemischen Eigenschaften aller Naturkörper kennen zu lernen. Diese Arbeit ist von grofser Wichtigkeit: denn ihr allein verdanken wir es, dafs die Chemie gegenwärtig in der Liste der unzersetzten Grundstoffe eine völlig feste und ganz durchgeführte Grundlage besitzt. Dafs aber diese Arbeit grofse Schwierigkeit haben müsse, und in der That nur eine Sache des glücklichen Genies, verbunden mit grofsem Fleifs und Geschicklichkeit, sey, ist schon daraus klar, dafs sie auch unter den guten Che-

---

*) Bestätigt es sich, dafs der problematische Stoff, den man vermittelst der Voltaschen Säule aus den Alkalien abscheidet, metallisch sey, so braucht deswegen in einem mit Kritik geschriebenen Lehrbuche der Chemie auch nicht eine einzige Periode abgeändert zu werden; sondern es erhält blofs der Abschnitt von den alkalischen Grundlagen und von den Metallen einige Zusätze.

mikern so wenigen mit dem seltenen Erfolg eines Klaproth oder Vauquelin gelingt. Ein anderer Stoff zu praktischen Arbeiten liegt in den künstlichen Producten der Wissenschaft selbst. Noch sind lange nicht alle mögliche Mischungen der Grundstoffe bekannt; von andern kennt man noch nicht genau, entweder die Bestandtheile oder das quantitative Verhältniſs derselben. Besonders ist die letzte Arbeit weitläuftig und schwierig, aber für die Theorie von groſser Wichtigkeit. Endlich gehören hierher die Versuche, die bis jetzt unzersetzten Grundstoffe zu zerlegen: eine Arbeit, bei der wir, wie die vielen fruchtlosen Anstrengungen einiger Chemiker zu beweisen scheinen, mehr von dem glücklichen Zufall, als von dem Fleiſs und Genie werden erwarten müssen.

Die theoretischen Untersuchungen sind in dem Gebiete der Chemie beinahe ganz neu, und haben daher, wenn ich so sagen darf, noch nicht das volle Bürgerrecht erhalten, weil die frühern Versuche dieser Art nicht geeignet waren, den Chemikern Vertrauen zu dieser ungewohnten Ansicht der Gegenstände einzuflöſsen. Es wird daher nöthig seyn, etwas umständlicher über diesen Gegenstand zu reden. Bergmans Verwandschaftslehre verdient Achtung als erster Versuch; aber ihr Urheber war nicht genug Mathematiker, um seiner Theorie vollkommene Bestimmtheit und innere Haltbarkeit zu geben. Indessen fand sie Beifall durch ihre groſse Einfachheit und durch die Vortheile, welche sie auf den ersten Blick versprach; sie ging daher in alle Lehrbücher über, und herrscht darin bis auf den heutigen Tag. Daſs die Erfahrung mit der Theorie nicht harmonire, nahm Bergman selbst wahr, aber er versuchte die auffallendsten Abweichungen durch sinnreiche Hypothesen oder durch die Betrachtung besonderer mitwirkender Umstände als erklärliche Anomalien darzustellen. Zu eben dem Zwecke haben andere Chemiker nach ihm ihren Scharfsinn erschöpft, aber ohne gedeihlichen Erfolg; es giebt eine Menge von Versuchen, welche dieser Theorie geradezu widersprechen, andere, die nur durch unnatürliche Künsteleien mit ihr zu vereinigen sind, keinen einzigen, dessen Erfolg man ohne einen Cirkel im Schlieſsen zu begehen, aus dieser Theorie voraussehen könnte.

Nach Bergman haben sich, in England Kirwan, in Frankreich Guyton Morvau, und besonders in Deutschland Richter, sehr eifrig mit theoretischen Untersuchungen beschäftigt. Aber sie gingen alle bei ihren Arbeiten von der Bergmanischen Theorie und zum Theil auch von anderweitigen unrichtigen Hypothesen aus. Daher war der Erfolg ihrer Arbeiten nicht so bedeutend, als man hätte erwarten sollen. Das wichtigste hat unstreitig der deutsche Chemiker geliefert. Es macht seinem Scharfsinn Ehre, daſs er zuerst die merkwürdigen Neutralitätsgesetze wahrnahm, welche aus der ganz einfachen

Beobachtung fliefsen, dafs neutrale Mischungen sich nie anders, als neutral zersetzen. Auch verdanken wir ihm eine unendliche Menge quantitativer Bestimmungen von Mischungsverhältnissen, deren Werth sich indessen erst nach oftmaliger sorgfältiger Wiederholung aller Versuche wird bestimmen lassen. Es ist in der That zu beklagen, dafs dieser sinnreiche Kopf sich durch eine nicht genug gezügelte Phantasie öfters zu Übereilungen und schimärischen Vorstellungen hat verleiten lassen; auch war es weder für die Wissenschaft, noch für die Anerkennung seiner eigenen reellen Verdienste zuträglich, dafs er seinen Vortrag mit algebraischen Formeln überlud, die sehr oft nicht aus der Tiefe geschöpft waren. Durch alle diese Arbeiten wurde die Bergmanische Theorie nicht verdrängt, sondern im Gegentheil ihre Mängel künstlich verschleiert. Man hat sie daher in allen Lehrbüchern beibehalten, aus Gewohnheit und in Ermangelung von etwas Besserem. Das letzte ist indessen gegenwärtig nicht mehr der Fall, seitdem Berthollets Scharfsinn theils die Widersprüche und die gänzliche Unhaltbarkeit der Bergmanischen Theorie unwiderleglich dargethan, theils an ihrer Statt Grundsätze aufgestellt hat, deren Richtigkeit um so einleuchtender wird, je tiefer man in sie eindringt und je mehr man sie mit der Erfahrung vergleicht. Zwar umfassen diese Grundsätze noch nicht das ganze Gebiet der Chemie mit gleichem Erfolg; aber sie verbreiten doch über einen grofsen, wichtigen und wohlbegränzten Theil derselben ein auffallendes Licht, nämlich über alle Erscheinungen, bei welchen sich nichts, als das Spiel wahrnehmbarer, wägbarer Stoffe zeigt; also besonders über die weitläuftige und äufserst wichtige Lehre von den Salzen, wo Berthollets Grundsätze sogar eine vollständige und strenge mathematische Theorie möglich machen würden, wenn nicht hiebei zum Theil Kräfte mitwirkten (besonders Cohäsionskräfte) deren Bestimmung durch Mafs und Zahl sehr grofse Schwierigkeiten hat. Auch den Einflufs der Wärme auf die chemischen Erscheinungen hat Berthollet mit so befriedigender Klarheit auseinandergesetzt, dafs es sichtbar wird, es fehle uns auch hier zu einer strengen und vollendeten Theorie nur an einer genauen Bestimmung ihrer Wirkungen nach Zahl und Mafs. Es wird indessen immer sichtbarer, dafs aufser der Wärme auch das Licht, die Electricität, und wer weifs was noch für unsichtbare Kräfte, bei vielen Erscheinungen mitwirken, über welche man eine volle Aufklärung nicht eher erwarten darf, als bis es dem menschlichen Geiste gelungen seyn wird, die Gesetze dieser unsichtbaren Kräfte zu enthüllen. Wie geht es zu, dafs diese Theorie, welche die Geschichte einst als eine Epoche in der Wissenschaft auszeichnen wird, bei den meisten Chemikern, selbst in Frankreich, nicht die lebhafte

Aufnahme findet, welche sie verdient? Vielleicht erklärt sich die Erscheinung durch folgende Bemerkungen: 1) Die Unbrauchbarkeit der bisherigen Theorie hat nicht nur Mifstrauen gegen alle Theorien erregt, sondern das Bedürfnifs hat die Theorie in einem gewissen Sinn entbehrlich gemacht: die vollständige empirische Kenntnifs von dem Verhalten eines jeden Reagens gegen alle übrige Stoffe vertritt ihre Stelle und macht, dafs der Chemiker beinahe eben so sicher arbeitet, als ob er eine Theorie hätte: 2) Der Urheber der neuen Theorie, der eben so bescheiden als scharfsinnig ist, nennt seine Theorie einen Versuch, und gesteht, dafs sie nicht erschöpfend sey; aber leider hat die Bescheidenheit in unserm Zeitalter immer das Schicksal, kein Zutrauen zu erwecken: 3) Berthollets Theorie ist in der That schwierig; sie macht es sichtbar, dafs die Theorie der Chemie so einfach nicht seyn kann, als man bisher glaubte, dafs man mit einer einzigen Verwandschaftskraft nicht ausreicht, und dafs bei dem einfachsten Versuch mehrere Kräfte, die sich nicht isoliren lassen, in Betrachtung zu ziehen sind, um über den Erfolg gehörig zu urtheilen. Auch wird es sichtbar, dafs man eine Theorie der Chemie nicht wird vollenden können ohne Beihülfe der Mathematik, mit der sich angelegentlich zu beschäftigen die Chemiker in ihrem Gebiete bisher sehr wenig Veranlassung gehabt haben. 4) In dem schreibseligen Deutschland kam noch der Um-

Umstand hinzu, daſs kurz nach der Erscheinung der Bertholletschen Verwandschaftslehre einige junge Chemiker die Feder ergriffen, um über oder wider dieselbe zu schreiben, offenbar zu früh und ohne den Gegenstand durchdrungen zu haben; ein Verfahren, das offenbar der guten Sache der Wahrheit und Wissenschaft nicht förderlich seyn kann. Endlich muſs ich noch bemerken, daſs die theoretischen Untersuchungen in diesem Felde untrennbar mit den allerfeinsten Experimentalarbeiten zusammenhängen, wie überall in der Naturlehre, wenn es auf Festsetzung und Berichtigung der ersten Grundsätze ankommt. Alle Schwierigkeiten reiflich erwogen, so sage ich nicht zu viel, wenn ich behaupte, daſs das ganze Leben und die angestrengte Kraft der besten Köpfe erfoderlich seyn wird, um der Theorie diejenige Vollkommenheit zu geben, deren sie empfänglich ist.

6) Organische Naturlehre.

Die organische Naturlehre ist der dritte Theil der besondern Physik. Es ist sonderbar, daſs der menschliche Geist oft so viele Schwierigkeiten findet, gewisse Begriffe, die sich ihm selbst aufzudringen scheinen, rein und bestimmt aufzufassen *). Der unendliche Unter-

*) Eine Erscheinung die viel häufiger vorkommt, als man glauben sollte. Die zweite und dritte Abhandlung werden sogar Beispiele im Feld der reinen Mathematik bemerklich machen.

schied des nichtorganischen und organischen spricht sich aus in jedem Stein, in jeder Pflanze, in jedem Thier; und doch hat man erst in unserm Zeitalter wahrgenommen, daſs es unumgänglich nothwendig sey, die Untersuchung der organischen Wesen, als einen eigenthümlichen Theil der Naturlehre, abgesondert zu behandeln. Wie sehr man vormals den Unterschied organischer und nichtorganischer Erscheinungen verkannt habe, ist daraus klar, daſs man sich von jeher so viel Mühe gegeben hat, die organischen Erscheinungen bloſs als das Produkt mechanischer und chemischer Kräfte darzustellen. Wunderbar, daſs es noch jetzt Physiologen giebt, welche in der Bildung fester organischer Theile nichts, als Crystallisationen *), in der Entstehung organischer Säfte nichts, als chemische Mischungen erblicken. Ein gründliches Studium der Mechanik und Chemie muſs jeden unbefangenen Kopf überzeugen, daſs alle Mechanik nicht hinreicht, ein einziges Blutgefäſs; daſs alle Chemie nicht hinreicht, einen einzigen Tropfen Blut zu erzeugen; daſs in diesem geheimniſsvollen Theil der Schöpfung eine höhere Art von Kräften und unsichtbare Stoffe, deren Daseyn wir nur ahnen können, eine Rolle spielen.

---

*) Wörter sind freilich an sich willkührlich; aber sie sind es nicht mehr, wenn sie dienen, Vorurtheile fortzupflanzen.

Noch giebt es kein einziges Werk, welches den Versuch enthielte, die ganze organische Naturlehre, auch nur in ihren allerersten Elementen, zu umfassen. Nur einzelne Theile sind bearbeitet; das Ganze existirt erst in der Idee: aber der Umfang der bearbeiteten Theile macht schon jetzt sichtbar, von welchem unermeſslichen Umfang das Ganze einst seyn werde. So tiefes Dunkel indessen noch auf einigen Gegenden dieses Gebietes, besonders auf den ersten wissenschaftlichen Begriffen und Grundsätzen, liegt, so lassen sich doch die gröſsern Abtheilungen desselben schon jetzt ziemlich bestimmt und deutlich unterscheiden.

Daſs man bei einer vollständigen Bearbeitung dieser Wissenschaft die Naturlehre der Pflanzen und Thiere gänzlich werde trennen müssen, fällt in die Augen. In jeder dieser beiden Wissenschaften aber wird sich, wie es mir scheint, alles unter drei Titel bringen lassen.

a) Den ersten Theil nenne ich den mechanisch-organischen. Sein Gegenstand ist die Kenntniſs der räumlichen Erscheinungen im organischen Körper, also der Bau derselben. Es ist mit einem Worte das, was man Anatomie der organischen Körper nennt. Diſs ist der am meisten angebaute Theil der organischen Naturlehre, weil schon im Alterthume der Arzt einsah, daſs ihm die Kenntniſs von dem Bau des menschlichen Körpers unentbehrlich sey.

Dieser Theil der Naturlehre hat eines Glückes genossen, dessen sich kein anderer rühmen kann, nämlich, dafs er von seinem ersten Ursprung an auf keinem andern als dem richtigen Wege, auf dem Wege der Beobachtung und Erfahrung bearbeitet werden konnte, indem es auch dem stumpfesten Kopfe einleuchten mufste, dafs hier nur die Sinne und das Messer, nicht metaphysische Vernünfteleien anwendbar sind. Wer sollte also nicht glauben, dafs nach den Jahrhunderte lang fortgesetzten Arbeiten der scharfsichtigsten Beobachter, die Wissenschaft vollendet seyn müsse? Und doch findet der einsichtvollste Zergliederer, selbst im Bau des einzigen menschlichen Körpers, fortdauernd unerschöpflichen Stoff zu neuen Entdeckungen. Und was ist der einzige menschliche Körper gegen den ungeheuren Umfang des ganzen Thier- und Pflanzenreichs? Wer sich einen angemessenen Begriff von diesem Umfange machen will, der betrachte Lionees Werk über die Weidenraupe, und werfe dann einen Blick auf das zahllose Heer von Pflanzen und Thieren, die neben uns diesen Erdball bewohnen.

b) Den zweiten Theil nenne ich den chemisch-organischen. Er untersucht die materielle Beschaffenheit aller Stoffe, die entweder in den organischen Körpern enthalten sind, oder ihnen ihren Ursprung verdanken; er ist mit einem Worte die chemische Untersuchung der organischen Körper. Nichts ist mehr geeignet, den Unterschied des Organischen und Anorganischen sichtbar zu machen, als die Resultate der neuern Chemie über diesen Gegenstand. Von der ganzen Anzahl körperlicher Grundstoffe sind es kaum vier bis fünf, aus welchen die Natur die ganze unendliche Mannigfaltigkeit organischer Stoffe mischt; aber alle diese Mischungen tragen in jeder Beziehung einen so eigenthümlichen Character an sich, daſs wohl kein gründlicher Chemiker ihren wesentlichen Unterschied von chemischen Mischungen verkennen kann. Der Chemiker kann sehr leicht den organischen Stoff zerstören, und ihn bis in seine Grundstoffe zerlegen; aber er kann ihn nie aus diesen Grundstoffen wieder zusammensetzen; ja, er kann bei einer stufenweise fortschreitenden Zerlegung auch nicht einen einzigen vorwärts gethanen Schritt wieder rückwärts thun. Die organische Mischung kann lediglich nur in den Gefäſsen des organischen Körpers entstehen, und ursprünglich nur während und durch das organische Leben. Daſs aber der ganze Umfang eigenthümlicher Erscheinungen, wodurch sich Pflanzen und Thiere bis zum Menschen herauf auszeichnen, weder bloſs räumliche, d. i. mechanische, noch bloſs materielle, d. i. chemische Erscheinungen, mit einem Worte, nicht bloſs äuſsere Erscheinungen, sondern innere durch höhere unsichtbare Kräfte bewirkte seyn; diſs liegt in der ganzen Geschichte jedes organischen Wesens, diſs liegt in den Erscheinungen des thierischen Lebens, diſs liegt vor allem in den Erscheinungen des Empfindens, Denkens und Wollens, so wie sie uns unser eigenes Selbstbewuſstseyn unmittelbar darbietet, so klar vor Augen, daſs es schwer zu begreifen ist, wie ein denkender Kopf in seinen eigenen Gedanken nichts, als Bewegungen der Fibern des Gehirns, oder chemische Mischungsveränderungen seiner Säfte sehen könne. Ich bin überzeugt, daſs ein gründliches Studium der Mechanik, Chemie, Mathematik und Philosophie Miſsgriffe dieser Art unmöglich mache.

Ich hoffe, diese wenigen Bemerkungen werden es hinreichend sichtbar machen, daſs die Untersuchung der organischen Stoffe, als solcher, ein ganz eigenthümliches und sehr schwieriges Geschäft sey, welches nicht nur sehr vielumfassende gründliche Kenntnisse und Geschicklichkeiten, sondern in der That einen ganz eignen innern Beruf des Genie's voraussetzt. Eine solche Untersuchung, welche zur festen Grundlage dienen soll, einer Wissenschaft, die gröſstentheils noch neu, aber die wichtigste von allen Theilen der Naturlehre ist, eine solche Untersuchung zu einem bloſsen Anhang der Chemie zu machen, kann nur so lange verzeihlich seyn, als man das wahre Verhältniſs der Dinge noch nicht deutlich eingesehn hat.

c) Der dritte Theil der organischen Naturlehre ist der physiologische. Sein Zweck ist: die Gesetze der organischen Kräfte zu enthüllen. Er soll also ganz eigentlich die Theorie der organischen Naturlehre enthalten. Ohngeachtet das Bedürfniſs schon seit Jahrhunderten gereizt hat, wenigstens die Physiologie des menschlichen Körpers zu studiren, so muſs man dennoch gestehen, daſs diese Wissenschaft bis jetzt mehr in der Idee, als in der Wirklichkeit vorhanden ist. Das ewige Wechseln der sogenannten Systeme (das rechte Wort heiſst Hypothesen) ähnlich dem, was wir auf dem Felde der speculativen Philosophie wahrnehmen, beweist in jedem Fall, daſs man in einer Wissenschaft noch nicht einmal den richtigen Weg der Untersuchung, geschweige denn feste Wahrheit gefunden habe. Aber ich bin überzeugt, daſs die Zeit einst kommen werde, wo man, geleitet durch ein gründliches Studium aller übrigen Theile der Naturlehre, durch Beobachtung des Weges, auf welchem man hier Wahrheit gefunden hat, durch ein tieferes und philosophisches Studium der Mathematik, wodurch man allein zur vollendeten Deutlichkeit in Begriffen gelangen kann, wo man, sage ich, durch diese Hülfsmittel geleitet, es allgemein anerkennen wird, daſs man in diesem Gebiete der Naturlehre so wenig als in irgend einem andern durch Speculation, sondern nur durch mühsame Zergliederung sicherer Erfahrungen festen Fuſstritt gewinnen könne. Aber wahr ist es, daſs es in dem ganzen Umfang menschlicher Wissenschaften kein Gebiet giebt, wo es schwerer ist, sichere

Beobachtungen, Versuche und Erfahrungen zu machen, als in der Physiologie. Selbst die speculative Philosophie kämpft mit geringern Schwierigkeiten. Denn was in unserm Bewufstseyn liegt, läfst sich gar wohl beobachten und zergliedern, sogar noch leichter, als der Chemiker einen Körper analysirt. Der Physiologe hingegen soll das Innere eines lebenden organischen Wesens studiren, dessen Äufseres ihm nur seine Sinne zeigen; er soll Versuche mit demselben anstellen, d. h. er soll allerlei mechanische und chemische Mittel auf dasselbe wirken lassen, und sehen, welche Wirkungen sie haben; aber die Beobachtung hat gelehrt, dafs alle diese Mittel in dem lebenden organischen Wesen nach ganz andern, noch völlig unbekannten Gesetzen wirken, als in der todten Natur; und da jedes organische Wesen selbst, in einem ununterbrochenen Wechsel von Veränderungen begriffen ist, und in einer untrennbaren, zu seiner Existenz nothwendigen, Verknüpfung mit der Aussenwelt steht, so kann der Beobachter sogar bei keinem einzelnen Versuch mit Sicherheit wahrnehmen, ob eine Erscheinung, die er vor sich hat, eine Wirkung seines Versuchs, oder zufällig einwirkender Umstände sey. Nur dann erst, wenn er tausendmal beobachtet, tausendmal den Versuch wiederholt hat, kann er dahin gelangen, wohin der Chemiker meistens durch einen einzigen gelangt, zu wissen, was das angewendete Mittel wirke. Aber Schwierigkeit einer Sache ist nicht Unmöglichkeit. Ließe sich auch aus der ganzen Physiologie nichts anderes zum Beweis der Möglichkeit, auf dem Wege der Erfahrung zur Wahrheit zu gelangen, anführen, als der Begriff der Reizbarkeit, den Haller offenbar nur auf dem Wege der Beobachtung finden konnte, und der ewig als ein Grundsatz für die Physiologie feststehen wird, so würde dieses einzige Beispiel schon hinreichend seyn, den richtigen Weg vorzuzeichnen, den der Physiologe nehmen muſs. Aber unstreitig werden noch Jahrhunderte verstreichen, ehe man sich auch nur der richtigen Methode zu beobachten und Versuche zu machen in einem gewissen Grade von Vollkommenheit bemächtigen wird.

Allgemeine Naturlehre.

Wir haben die Theile der besondern Naturlehre durchlaufen; es folgt die allgemeine Physik. Sie hat es nicht, wie die besondere, mit einzelnen Klassen von Naturerscheinungen zu thun. Vor ihr liegt das ganze groſse Buch der Natur aufgeschlagen; sie soll im Zusammenhang die Charactere lesen, deren Alphabet die besondere Naturlehre untersucht. Sie zerfällt von selbst in zwei Theile. Die Naturerscheinungen, in welche sie Licht und Ordnung bringen will, sind entweder diejenigen, welche uns zunächst umgeben, welche wir mit allen unsern

Sinnen beobachten können, oder es sind diejenigen, welche sich jenseits unsers Luftkreises bloſs dem Auge aus unermeſslicher Ferne zeigen. Sie ist also theils physische Erdkunde, theils Astronomie, beide nach ihrem ganzen Umfange genommen.

7) Physische Erdkunde.

Die physische Erdkunde betrachtet den Bau unsers Erdballs und aller seiner Theile. Von der Mineralogie unterstützt, betrachtet sie zuerst seine festen Massen, den Bau und Gang des Urgebirgs und des Ganggebirgs, die vulkanischen Berge, die Schichtungen der Flötzhügel und des flachen Landes, selbst ins Innere der Erde wagt sie, so weit es ihr vergönnt ist, einen Blick. Minder beschränkt verweilt länger ihr Blick auf der weit ausgedehnten Oberfläche, wo er nichts als organische Wesen, und selbst in der obersten Schichtung des Bodens fast nichts, als Stoffe organischen Ursprungs wahrnimmt. Staunender fand schon ihr Blick, selbst in der Tiefe, Überreste früherer organischer Schöpfungen, welche wunderbare Ahnungen von wechselnden Schöpfungen erregen. Von den festen Massen geht die Betrachtung zum Wasser über, das in einem ewigen Kreislauf, nicht unähnlich dem Umlauf des Blutes, begriffen ist, indem es sich als Dunst in den Luftkreis erhebt, als Regen und Schnee zurückkehrt, und durch Quellen, Bäche und Flüsse, wie durch Adern dem ewig bewegten Ocean zuströmt, der selbst unzählbaren Schaaren organischer Wesen zum Aufenthalte dient. Das Luftmeer, welches unsern Erdball umfließt, ist ein reichhaltiger Gegenstand der Betrachtung. Die physische Erdkunde untersucht die Mischung, die mancherlei Bewegungen desselben und die zahllosen chemischen, elektrischen und optischen Erscheinungen, die wir Meteore nennen. Endlich, nachdem sie die großen Theile des Erdballs betrachtet hat, wirft sie noch einmal den Blick auf das Ganze zurück, entlehnt von ihrer Schwester, der Astronomie, die Kenntniß der Gestalt, der Größe und der Bewegungen desselben, und zeigt, wie die wechselnde Einwirkung des allbelebenden Sonnenstrahls in jedem Theile derselben den Wechsel des Tags und der Jahreszeiten hervorbringt. Kein Theil der Naturlehre ist mehr geeignet, dem Menschen die Schranken seiner Erkenntniß fühlbar zu machen. Wähnt er vielleicht, in der besondern Naturlehre eine bedeutende Höhe erklimmt zu haben, so fühlt er hier fast auf jedem Schritt, wie groß der Umfang dessen sey, was er nicht weiß. Fast überall muß er sich begnügen zu sagen: so ist es. Selten nur kann er das wie? und warum? beantworten. Nur einzelne Stellen im großen Buche der Gottheit kann er entziffern, das Ganze bleibt ihm immer und ewig ein unbegreifliches Wunder; aber jede Stelle, die er lesen kann, sey ihm hoch und heilig; denn jede ist — ein Gedanke der Gottheit! Wenn jeder Blick zur Erde den Menschen an seine Verwandschaft mit dem Staube erinnert, so läſst ihn jeder Blick zum Himmel seinen höhern Ursprung, seine höhere Bestimmung, ahnen.

8) Astronomie.

Die Sternkunde, sie ist der Triumph des menschlichen Geistes, eine lange Stelle im Buche der Natur, rein und lichtvoll aufgeklärt durch die tiefsten Geister die lebten, zwar nicht jedem zugänglich, aber um desto ehrwürdiger und heiliger, die letzte Stelle im Buche der Natur, die mit einem Blick das Weltall umfaſst. Weislich lieſs die allgütige Mutter uns am Firmament nur das Begreifliche, nur das dem menschlichen Geiste Zugängliche, die Bewegungen der nähern Weltkörper sehen, um uns den Aufschwung zu der hohen Idee des Unendlichen zu erleichtern. Aber deutlich genug zeigt sie uns in jedem Irrstern einen Erdball, in der Sonne einen Weltkörper höheren Ranges, in jedem Lichtstern eine Sonne, und zaubert dadurch wundersame Ahnungen über Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft ins Herz. Sie wollte uns einladen, die Allgütige, sie wollte uns reizen, immer tiefer einzudringen in die Wunder der nähern Natur, und uns so auf einen Weg führen, wo Ewigkeiten hindurch fortgesetztes Streben uns dem höchsten alles Genusses, dem Anschauen des All und des Einen entgegenführen kann.

Aller dieser Wissenschaften Inbegriff ist die Naturkunde! Aber haben wir ihren Umfang auch wirklich erschöpft? Ist nicht alles, was ist, Natur? Ist nicht auch des Menschen Geist ein Theil der Natur? Ja so ist's. Empirische Seelenlehre ist Naturbeschreibung des Geistes; speculative Philosophie, gelangt sie einst zur Wirklichkeit, so wird sie nichts seyn, als die Naturlehre der geistigen Kräfte. Vernunftlehre und Mathematik sind schöne schon vollendete Theile derselben. Auch Geschichte, ist sie etwas anderes, als fortgeführte Naturgeschichte des menschlichen Geistes? Auch Alterthumskunde, ist sie etwas anders, als eben diese Naturgeschichte des Geistes aus einem schönen Zeitraume der Vergangenheit, vorzüglich geeignet, das Hohe, das Geistige, das heilige Idealische, wonach jedes edlere Herz strebt, gleichsam herabzuneigen zur Wirklichkeit, und so den Geist für dasselbe zu erwärmen und zu beleben? Ja, es giebt nur eine Wissenschaft! sie heifst Naturkunde. Was wir Wissenschaften nennen, sind nur Zweige der einen, verbunden durch ein schwesterliches Band, jede die andere ehrend, keine die andere zurückstoſsend, keine der andern die Hülfsmittel entziehend, deren sie bedarf, um in gleichem Schritt emporzuklimmen zu den Höhen des Lichts, die lieblich und liebevoll das Auge des Sterblichen reizen, sollte auch die geheimniſsvolle Hand, die uns leitet, nur das Geschlecht, nicht den Einzelnen zum Ziele führen.

ZWEITE ABHANDLUNG.

Versuch

einer idealischen Übersicht der Mathematik

nach ihrem ganzen Umfang.

Versuch
einer idealischen Übersicht der Mathematik nach ihrem ganzen Umfange.

Die Mathematiker pflegen bekanntlich selten sich des zusammenhängenden Vortrags zu bedienen, sondern sie zerstückeln den Vortrag in einzelne Sätze; und soll die Form schulgerecht seyn, so setzen sie über jeden Satz, Aufgabe, Grundsatz, Lehrsatz u. s. f. Der gröſste Theil der Leibnitz - Wolfischen Schule glaubte in der pünktlichen Beobachtung dieser Form den Grund von der absoluten Gewiſsheit der Mathematik zu finden, und hoffte daher, durch Nachahmung derselben, die mathematische Gewiſsheit auch auf andere Felder des menschlichen Wissens verpflanzen zu können. Der Versuch ist nicht gelungen; entweder führte er nicht zum Ziele, wie in der speculativen Philosophie, oder er wurde lächerlich, wo man ihn sonst auszuführen unternahm. Man ist jetzt wohl allgemein überzeugt, dafs diese Methode nur das äufsere Fachwerk der Wissenschaft sey. Aber merkwürdig ist es immer, theils, dafs andere Wissenschaften dieses Fachwerk nicht annehmen, theils, dafs es die Mathematik fast nothwendig zu fodern scheint. Es kann daher nicht ohne Interesse seyn, dieses Fachwerk etwas näher zu beobachten.

Die Logiker sagen uns: ein Grundsatz bedürfe keines Beweises, ein Lehrsatz sey dessen bedürftig; eine Aufgabe fodere etwas, wozu Auflösung und Beweis nöthig sey; ein Postulat fodere etwas, wozu man keines von beiden bedürfe. Fragt man, wie das zugehe? so sagen sie, dafs gewisse Sätze unmittelbar und durch sich selber deutlich seyn, andere nicht. Difs alles ist richtig, aber es bleibt noch immer die Frage übrig, wie geht es zu, dafs gewisse Sätze unmittelbar deutlich sind, andere nicht? Ich erinnere mich nicht, hierüber irgendwo etwas befriedigendes gefunden zu haben; da es aber mein Geschick gebietet, mich mit jedem Jahre wieder in den Elementen, wie in einem Wirbel, herumzudrehen, so habe ich es mir zu einer heiligen Pflicht gemacht, die Kraft, welche ich der Erweiterung der Wissenschaft nur selten opfern darf, wenigstens durch unablässiges Streben nach vollendeter Deutlichkeit in den ersten Begriffen ihrer festesten Begründung zu widmen. Meine gegenwärtige Ansicht von dem Fachwerk der Mathematik ist kürzlich folgende:

Der unmittelbare Zweck jedes einzelnen mathematischen Satzes ist dreifach: 1) Vollendete Deutlichkeit im Begriff einer Gröſse, (z. B. Erklärung des gleichseitigen Dreiecks, oder Erklärung einer Quadratzahl); 2) Hervorbringung einer Gröſse, dem Begriffe gemäſs (Construction eines gleichseitigen Dreiecks; Erhebung einer Zahl zum Quadrat); 3) Erweiterung der Kenntniſs einer Gröſse durch Bemerkung von etwas, das in der construirten Gröſse liegt, ohne im Begriff gedacht zu seyn (z. B. Bestimmung der Winkel im gleichseitigen Dreieck, oder Untersuchung des innern Baues einer Quadratzahl aus Theilen der Wurzel).

Die meisten Gröſsen, welche der Mathematiker betrachtet, sind zusammengesetzt, d. h. ihre Vorstellung ist aus ungleichartigen Vorstellungen gemischt. (So liegen in der Vorstellung des Dreiecks die Vorstellungen, Fläche, Linie, Begränzung u. s. f. in der Vorstellung der Quadratzahl die Vorstellungen von Produkt, Factoren, Gleichheit u. s. f.) Wenn sich in irgend einem Object ungleichartige Bestandtheile unterscheiden lassen, so muſs jeder dieser Bestandtheile für sich betrachtet, etwas gleichartiges seyn. Was aber durchaus gleichartig ist, nenne ich materiell-einfach. Die Vermischung des Ungleichartigen setzt also das Daseyn des Gleichartigen oder materiell - Einfachen voraus. Also müssen allen mathematischen Begriffen einfache Begriffe zum Grunde liegen, d. h. Begriffe, die etwas durchaus Gleichartiges vorstellen. Von dieser Art sind in der Geometrie die Begriffe von Punkt, Linie, Fläche, Raum, in der Arithmetik Einheit und Vielheit.

Auf diesem Unterschied einfacher und zusammengesetzter Begriffe von Gröſsen, verbunden mit dem obigen dreifachen Zweck der Sätze, beruht die Eintheilung aller mathematischen Sätze, und man übersieht schon, daſs wir sechs Arten derselben erhalten müssen, drei, die es mit einfachen Begriffen, und drei, die es mit zusammengesetzten Begriffen zu thun haben.

Die Natur und unser eigenes Vorstellungsvermögen geben uns allezeit das Zusammengesetzte früher als das Einfache; denn die allgemeine Aufgabe, welche die gesammte äuſsere und innere Wirklichkeit dem Verstande vorlegt, ist eigentlich, in dem Zusammengesetzten das Einfache zu erkennen. Ich will daher von den zusammengesetzten Begriffen zuerst sprechen.

1) Erklärungen, *(definitiones)* sind Zerlegungen eines zusammengesetzten Begriffs in einfachere; soll die Erklärung absolute Deutlichkeit geben, so müssen die einfacheren Begriffe, die sie enthält, von neuem zerlegbar seyn, bis zum schlechthin einfachen. (Z. B.

Quadrat ist — ein Parallelogram — ein gleichseitiges — ein rechtwinkeliches; Parallelogram ist ferner — eine vierseitige Figur — eine parallelseitige; Figur endlich ist — eine Fläche — eine begränzte. Offenbar sind diſs lauter Zerlegungen der Vorstellungen, die bis in das ganz einfache fortgeführt werden können.)

2) Eine Aufgabe *(problema)* ist die Foderung, eine zusammengesetzte Gröſse zu construiren. Ein zusammengesetztes Object kann nur durch eine zusammengesetzte Operation construirt werden; eine zusammengesetzte Operation setzt das Daseyn einfacher Operationen voraus; die Aufgabe muſs folglich eine Auflösung haben; d. h. sie muſs mir sagen, welche einfache Operationen und in welcher Ordnung ich sie verbinden müsse, um das zusammengesetzte Object zu erhalten. Sie bedarf auch eines Beweises; denn sie muſs mich überzeugen, daſs ich durch das vorgeschriebene Verfahren wirklich und vollständig und genau das durch den Begriff bestimmte zusammengesetzte Object erhalte.

3) Ein Lehrsatz *(theorema)* ist ein Satz, welcher behauptet, daſs in einer construirten Gröſse etwas enthalten sey, was zwar durch den Begriff bestimmt war, aber in demselben nicht gedacht wurde. Daſs sich zwei Sehnen im Kreise in proportionale Stücke schneiden, oder daſs die Quadratwurzel einer ganzen Zahl, die sich nicht unter den ganzen Zahlen findet, sich

überall nicht ohne Fehler in Zahlen ausdrücken lasse, diſs sind Eigenschaften zusammengesetzter Objecte, die offenbar im Begriffe derselben nicht gedacht wurden. — Daſs ein Lehrsatz eines Beweises bedürfe, bedarf selbst keines Beweises.

Bei einem einfachen Object findet derselbe dreifache Zweck statt, den wir eben angegeben haben; vollständige Deutlichkeit in der Vorstellung, Construction und erweiterte Kenntniſs. Wir haben aber, wie es scheint, nur zwei Classen von Sätzen für sie übrig: Postulate für die Construction, und Axiome für die Erweiterung der Erkenntniſs über den Begriff hinaus. Indessen findet sich die dritte Classe leicht genug auf. Sie liegt in der Classe der Definitionen. Jedermann weiſs, wie viel man an der Definition einer geraden Linie gekünstelt hat, ohne eine befriedigende zu finden. Aber die gerade Linie und die Linie überhaupt, ist nicht das einzige, was sich nicht definiren läſst. Euklides Definition vom Punkt, paſst eben so gut auch auf den Zeitpunkt, und enthält überdieses kein einziges positives Merkmal, also keine wahre Zergliederung des Begriffs. Seine Definition von der Ebene ist ein Grundsatz, keine Definition. Kurz es ist sichtbar, daſs Punkt, Linie, Fläche und Raum lauter einfache, und in sich selbst gleichartige Vorstellungen sind, die eben deswegen keine Definition zulassen, weil die Definition eine Zergliederung des ungleichartigen ist. Man mufs folglich offenbar diese Begriffe von den Definitionen trennen, und so erhalten wir in Beziehung auf die einfachen mathematischen Begriffe folgende drei Classen von Sätzen:

1) Grundbegriffe *(notiones primae)*, deren Gegenstand ein in sich einfaches und gleichförmiges Elementar-Object der Mathematik ist. Die Logiker irren sich, wenn sie den einfachen Begriffen Deutlichkeit absprechen; denn was kann deutlicher seyn, als die Begriffe der einfachen mathematischen Objecte? Ist es nicht klar, dafs man überhaupt alle Deutlichkeit leugnen müsse, wenn man sie den Grundbegriffen abspricht? Denn ich möchte wohl wissen, wie es möglich wäre, aus lauter undeutlichen Begriffen einen deutlichen zusammenzusetzen? Aber die Logiker haben den innern Bau unserer Vorstellungen, der in der Mathematik sicherer, als irgendwoanders aufzufinden ist, noch nicht genug studirt. Ihre Erklärung der Deutlichkeit mufs anders gefafst werden, wenn sie nicht zu Widersprüchen führen soll. Kant urtheilte nicht richtig, wenn er die Logik für vollendet hielt; aber dieser Gegenstand würde uns zu weit von unsern gegenwärtigen Zweck entfernen. Ich berufe mich daher blofs auf das klare Bewufstseyn eines jeden Menschen, dafs keine Vorstellung bestimmter, unzweideutiger, vollendeter, also mit einem Worte deutlicher seyn könne, als die Vorstellung einer Linie oder

irgend eines andern einfachen mathematischen Objects. Ein Streit hierüber würde übrigens nicht das wesentliche meines Vortrags treffen.

2) Ein Foderungssatz *(postulatum)* fodert die Construction eines einfachen mathematischen Objects; z. B. eine gerade Linie durch zwei Punkte zu ziehen; eine Ebene durch drei Punkte zu legen u. dgl. m. Die Foderung geschieht aber offenbar nicht an die Hand, sondern an die Einbildungskraft. Die mit der Hand gezogene Linie ist bekanntlich keine Linie, sondern nur ein mangelhaftes Bild dessen, was sich der Verstand denkt, und die Einbildungskraft im Innern realisirt; ich kann sie auch nicht verlängern, so weit ich will, sondern nur so weit, als meine begränzte Tafel reicht. Die innern Operationen der Einbildungskraft hingegen sind absolut unbeschränkt; an sie kann ich die Foderung machen, die gerade Linie so weit ich nur will zu verlängern u. s. f. Wäre die Operation der Hand gemeint, so wäre diſs keine ganz einfache Operation, sie erfodert mehr als ein Instrument, und läſst also eine Zergliederung oder eine Auflösung zu. Die Operation der Einbildungskraft hingegen, wenn sie eine Linie, eine Fläche construirt, ist eine völlig gleichförmige, also ganz einfache Operation, und es hat also keinen Sinn, wenn ich eine Zergliederung derselben, d. h. eine Auflösung fodere.

3) Ein Grundsatz *(Axioma)* setzt et-

was zu dem Begriff eines einfachen Objects hinzu, was nicht in dem Begriffe gedacht war. Was kann aber zu der Vorstellung des Einfachen noch hinzukommen, was nicht schon darin gedacht wäre? Lag noch etwas anders darin, so war es ja nicht einfach! Ganz richtig; auch setzt der Grundsatz in der That nichts zu dem Begriff eines einzelnen Objects hinzu, sondern er betrachtet nur zwei einfache Objecte in Verbindung mit einander, und bemerkt, was aus dieser Verbindung entstehe. Zwei Punkte fallen zusammen: zwei gerade Linien schneiden sich nur in einem Punkte: durch zwei verschiedene Punkte kann nur eine gerade Linie gezogen werden; die gerade Linie ist die kürzeste Ausdehnung zwischen zwei Punkten u. s. f. Bei solchen Sätzen nach einem Beweise fragen, hat wieder keinen Sinn; denn was durch die unmittelbare Verbindung zweier einfachen Objecte entstehe, kann auch nur durch die unmittelbare Anschauung erkannt werden.

Man mufs Euklides Geist bewundern, der gewifs keine ganz deutliche Einsicht in den Grund dieser Classification hatte, und doch die Sätze so richtig sonderte, dafs nur wenig daran zu ändern ist. Alles, was die einfachen Objecte betrifft, schickt er voran, und dann läfst er erst die übrigen Sätze folgen. Die Grundbegriffe sonderte er zwar nicht von den Definitionen, liefs sie aber nach einer ganz richtigen topischen Ordnung auf einander folgen, und vor den zusammengesetzten Begriffen vorangehn. Seine Postulate sind nicht vollständig, aber das fehlende läfst sich leicht ergänzen. Die Axiome geben zu mehreren Bemerkungen Veranlassung: dafs Gleiches zu Gleichem gesetzt, gleiche Aggregate gebe u. dgl., ist nicht ein Axiom der Geometrie, sondern der allgemeinen Mathematik; dafs alle rechte Winkel einander gleich sind, ist kein Axiom, sondern ein Corollar zur Definition des rechten Winkels, so wie die Gleichheit der Halbmesser und Durchmesser ein Corollar zur Definition des Kreises. Nach den hier aufgestellten Begriffen ist es möglich, die wahren Axiome methodisch, also vollständig aufzufinden.

Es kommen in der Mathematik noch einige Benennungen von Sätzen vor, die sich aber blofs auf zufällige Stellung, nicht auf Zweck und Inhalt der Sätze beziehn. Ein Zusatz *(corollarium)* ist ein Satz, der durch einen unmittelbaren Schlufs aus dem vorhergehenden folgt, also aus einem andern Grunde, als die Axiome und Postulate, keines Beweises bedarf. Oft ist das Corollar wichtiger, als der Satz, woraus es folgt. Eine Anmerkung *(scholion)* nennt der Mathematiker alles, was nur beiläufig bemerkt wird, nicht nothwendig in die Folge der Sätze gehört. Ein Lehnsatz *(lemma)* ist jeder Satz, der dem Inhalte nach in einen andern Abschnitt gehört, aber hier, wo er steht, nur um eines folgenden Beweises willen entlehnt wird.

Ungeachtet die Beobachtung dieses Fachwerks nicht den eigentlichen Grund von der Gewifsheit und Deutlichkeit der Mathematik enthält, so ist doch nicht zu leugnen, dafs sie die Deutlichkeit ungemein befördert, indem sie die Aufmerksamkeit auf jeden einzelnen Schritt heftet, den man thut, wodurch falsche Schritte wenigstens erschwert werden. Dafs man aber fest auftreten kann, liegt nicht in der Methode des Gehens, sondern offenbar in dem festen Grund und Boden, den man unter sich hat. Es liegt mit einem Worte in der absoluten Deutlichkeit und Vollständigkeit der Grundbegriffe so wohl von den Gröfsen selbst, als von ihrer Construction. Der Grund dieser Vollständigkeit und Deutlichkeit jedes Grundbegriffs liegt aber darin, dafs diese Grundbegriffe Geschöpfe unsers eigenen Vorstellungsvermögens, also auch ganz und vollständig in demselben enthalten sind. Bei allem, was von aufsen in mich kommt, kann ich nie wissen, ob ich das Ding ganz habe; was in mir und durch mich selbst erzeugt ist, besitze ich ganz und vollständig. Aber die mathematischen Grundbegriffe sind nicht willkührliche Erzeugnisse der Einbildungskraft, wie die Ideale der Kunst; sondern dem Wesen unsers Vorstellungsvermögens wesentlich zugehörige. Darum sind sie in jedem Kopfe vorhanden; sind in jedem Kopfe die nämlichen; nur in dem einen dunkel, in dem andern klar, in einem dritten deutlich gedacht. Aber ihre Zusammensetzungen sind willkührlich, wenn gleich an gewisse Regeln gebunden; das heiſst, die Regel ist nothwendig, und in dem Wesen des Vorstellungsvermögens gegründet; aber ob ich nach der Regel construiren will, das steht bei mir; daher kann die Vorstellung einer Parabel, oder eines Integrals in einem Kopfe fehlen, ohne daſs ihm etwas abginge, was wesentlich zum Vorstellungsvermögen gehört; aber die Vorstellung von einer Linie, von einer Zahl, kann in keinem Kopfe fehlen.

Nach diesen Erörterungen kann es nicht schwer seyn, die Idee, welche der gesammten Mathematik zum Grunde liegt, rein und deutlich aufzufassen. Die Lehrsätze der Mathematik sind es eigentlich, in welchen sich die idealische Tendenz des Ganzen offenbaret. Denn selbst das Problem hat nur den Zweck, Stoff zu neuen Untersuchungen herbeizuschaffen. Der Zweck jedes Lehrsatzes aber ist etwas zu erkennen, was in einem gegebenen Zusammenhang von Gröſsen zwar nicht unmittelbar gedacht war, aber doch durch denselben bestimmt ist. Der idealische Zweck der Mathematik kann also kein anderer seyn, als: Erkenntniſs alles dessen, was durch irgend einen gegebenen Zusammenhang von Gröſsen bestimmt ist. Gegeben aber ist ein Zusammenhang von Gröſsen nur dann, wenn er durch die Einbildungskraft nach nothwendigen Regeln (oder wie Kant sagt, nach Begriffen) in einem anschaulichen Bilde dargestellt ist, in welchem ich, weil es mein eigenes Geschöpf ist, auch das wahrnehmen kann, was meine Willkühr bei der Construction nicht hineingelegt hatte, sondern was von der Natur der Gröſsen, die ich construire, abhängig ist.

Die Hervorbringung eines anschaulichen Bildes in der Einbildungskraft heiſst Construction. Es findet aber in der Mathematik eine doppelte (aber auch nur eine doppelte) Construction statt. Entweder ist das Bild, welches die Einbildungskraft producirt, selbst eine Gröſse, oder es ist ein bloſs willkührliches Zeichen, an welches wir die Vorstellung von einer Gröſse durch dasselbe unerklärliche Kunststück der Geisteskraft anknüpfen, durch welches wir mit dem leeren Schall der Worte Begriffe verbinden und damit denken.

In dem ganzen Umfang unsers Vorstellungsvermögens kommt nur eine einzige Art von Gröſsen vor, die unmittelbar durch sich selbst und ohne willkührliche Zeichen darstellbar ist: die räumliche Gröſse. Die übrigen Gröſsen sind, wie alle allgemeine Begriffe, nicht abgesondert darstellbar, aber wohl sind sie darstellbar *in* sinnlichen Gegenständen. So ist die Zahl in jeder Menge sinnlicher Gegenstände vollkommen dargestellt; aber ich kann sie schlechterdings nicht für sich allein darstellen, sondern ich muſs mindestens Punkte oder Striche, also etwas, was nicht Zahl ist, zu Hülfe nehmen, um sie darzustellen. Es ist nicht einmal nothwendig, daſs die Dinge, welche ich zähle, an sich sinnliche Dinge sind; man kann bloſse Vorstellungen, ja sogar Nullen zählen.

Vermöge dieser doppelten Constructionsart zerfällt die Mathematik in zwei groſse Gebiete, welche ich die räumliche Mathematik und die allgemeine Mathematik nenne. Bei der idealischen Übersicht einer Wissenschaft kommt man sehr leicht in den Fall, gewisse bestimmte Unterschiede deutlicher wahrzunehmen, als sie der empirische Gang der Wissenschaft unterscheidet. Dann fehlt es an Worten, diese Unterschiede zu bezeichnen. Diſs ist der Grund, warum ich die obigen Ausdrücke statt der gangbaren Arithmetik und Geometrie wähle, um diese für einen weiterhin zu machenden Unterschied aufzubewahren, ohne jedoch, wie sich zeigen wird, von dem gewöhnlichen Sprachgebrauch sehr weit abzuweichen.

Gemeiniglich unterscheidet man die beiden Theile, von denen ich hier rede, so, daſs man sagt: die Arithmetik sey die Lehre von den discreten Gröſsen, die Geometrie von den stetigen. Der Unterschied ist nicht unrichtig; denn alle räumlichen Gröſsen sind stetig: die Zahl hingegen als Grundbegriff der Arithmetik ist eine Menge von Einheiten, also wenigstens in der Vorstellung discret. Aber man setzt auf diese Art den wesentlichen Unterschied beider Theile ins Object der Wissenschaft, und diſs ist wenigstens nicht genau; denn wer weiſs nicht, daſs Körper, Flächen und Linien, also stetige Gröſsen, Gegenstände arithmetischer Untersuchungen seyn können, und daſs umgekehrt die Findung einer Wurzel in Zahlen, also ein eigentlich arithmetisches Problem, der Gegenstand einer geometrischen Construction seyn könne. Eigentlich sind allgemeine und räumliche Mathematik bloſs zwei verschiedene Methoden, mathematische Fragen aufzulösen. Denn auf der einen Seite schlieſst die allgemeine Mathematik stetige Gröſsen aus ihrem Gebiete gar nicht aus, sondern umfaſst alles, was Gröſse ist. Auf der andern Seite aber ist bei einer geometrischen Construction das räumliche selbst nicht nothwendig der eigentliche Gegenstand der Betrachtung. Denn da jeder anschauliche Gegenstand Bild einer Gröſse seyn kann, so kann auch die räumliche Gröſse bloſses Bild irgend einer andern Gröſse seyn. So kann z. B. die Linie das Bild einer Zahl (wie bei einer geometrischen Wurzelausziehung), oder irgend einer andern Gröſse, z. B. einer Zeit, einer Geschwindigkeit u. s. f. seyn, wie so oft in der reinen Mechanik geschieht. In der That ist auch keine mathematische Frage erdenklich, die nicht eben sowohl geometrisch, als arithmetisch aufgelöst werden könnte. Denn wie speciell sich auch die Frage auf eine eigene Art von Gröſsen beziehen mag; so ist doch leicht einzusehen, daſs das Specielle in jedem Fall nur

Hülle einer allgemeinen mathematischen Frage ist. Wer nach der Zunahme eines Capitals durch Zinseszins fragt, will eigentlich nur wissen, wie die Glieder einer geometrischen Reihe wachsen, und diese läſst sich eben sowohl geometrisch, als arithmetisch construiren. u. dgl. m.

Es giebt aber noch einen andern allgemeinen Unterschied in der Betrachtung der Gröſsen, der in beiden Gebieten statt findet und eine Unterabtheilung derselben bestimmt. Diſs ist der Unterschied beständiger und veränderlicher Gröſsen. In der Mathematik der beständigen Gröſsen setzt man, daſs ein gewisser Zusammenhang unveränderlicher Gröſsen (wie z. B. in algebraischen Gleichung oder in einer gegebenen geometrischen Figur) vor mir liege, und die Frage ist, was dadurch bestimmt sey. In der Mathematik der veränderlichen Gröſsen setzt man, es liege ein Zusammenhang von Gröſsen vor mir, deren einige oder mehrere gleichförmig wachsen oder abnehmen (wie z. B. in einer Function oder in der Frage über die Bewegung eines Punkts, dessen Geschwindigkeit gleichförmig wächst); und die Aufgabe ist, was hierdurch für bestimmte Veränderungen in dem ganzen Zusammenhang dieser Gröſsen entstehen. Die Mathematik der veränderlichen Gröſsen ist ganz eine Erfindung der neuen Zeiten, und man sieht aus den Fortschritten, welche diese Wissenschaft gemacht hat, von welcher unendlichen Wichtigkeit sie ist. Übrigens findet der Begriff der

der Veränderlichkeit, wie die beigefügten Beispiele zeigen, sowohl in der allgemeinen, als in der räumlichen Mathematik statt; und es zerfällt daher jedes dieser beiden Gebiete in zwei grofse Theile.

Die allgemeine Mathematik des Beständigen nenne ich reine Arithmetik; die allgemeine Mathematik des Veränderlichen Analysis.

Die räumliche Mathematik des Beständigen heifst reine Geometrie; die räumliche Mathematik des Veränderlichen ist nichts, als die reine Bewegungslehre, ich nenne sie Phorometrie, um sie von der physischen Bewegungslehre zu unterscheiden, welcher der Name Mechanik ethymologisch und herkömmlich gebührt.

Ich hoffe, diese Eintheilung des ganzen Umfangs der reinen Mathematik, die sich gewifs durch Einfachheit und Klarheit empfiehlt, werde sich auch bei der näheren Auseinandersetzung nicht als geschöpft aus den Quellen der dichtenden Phantasie, sondern als aus der Natur der Sache abgeleitet, bewähren.

I. Allgemeine Gröfsenlehre.

In der allgemeinen Gröfsenlehre wird die Gröfse construirt durch willkührliche Zeichen. Diese sind von doppelter Art; Zeichen für die Gröfsen selbst, und für die mit ihnen vorzunehmenden Operationen. Der Gröfsen-Zeichen giebt es zwei Arten: bestimmte (Ziffern) und unbestimmte (Buchstaben). Zu den Operations- oder Rechnungs-Zeichen gehören 1) die sogenannten algebraischen; diſs sind die Zeichen der gemeinen Rechnungsarten nebst der Potenzerhebung und Wurzelausziehung. 2) Die sogenannten transcendentischen sind zuerst diejenigen, durch welche man andeutet, daſs zu einer Zahl der Logarithmus oder umgekehrt genommen werden solle; ferner mehrere Zeichen, die ursprünglich aus der Trigonometrie genommen sind, aber bekanntlich einen rein arithmetischen Sinn haben können, die Zeichen nämlich, durch welche man in der Trigonometrie andeutet, daſs man zu einem Bogen irgend eine trigonometrische Linie, oder umgekehrt, nehmen solle. Ich erinnere mich nicht, irgendwo den Unterschied beider Operationen recht deutlich auseinander gesetzt gefunden zu haben. Es wird daher nicht überflüssig seyn, ihn hier anzugeben. Was durch eine algebraische Rechnung gefunden wird, ergiebt sich entweder durch eine einzige Operation, obgleich diese in gewissen Fällen unendlich seyn kann, wie z. B. bei Wurzelausziehungen, ja selbst bei nicht aufgehenden Divisionen: oder durch eine bestimmte endliche Zahl solcher Operationen. Was durch eine transcendentische Operation bestimmt ist, kann nur durch unendlichvielmalige Wiederholung bestimmter algebraischer Rechnungs-Operationen gefunden werden, die man nicht als bloſse Theile einer einzigen Operation, wie bei den Wurzelausziehungen, ansehen kann. Im Grunde sind die algebraischen Operationen die einzigen Elemente alles Rechnens, und wenn z. B. der Logarithmus einer Zahl gesucht wird, so sind es offenbar lauter Operationen dieser Art, die man anwendet. Aber will man diese Rechnung durch algebraische Zeichen andeuten, so sieht man leicht, daſs es nur durch eine Zusammensetzung von unendlich vielen geschehen könne. Die unendlichen Reihen, durch welche man Logarithmen und trigonometrische Verhältnisse vorstellt, sind im Grunde nichts anders, als die Andeutung der unendlich vielen algebraischen Operationen, die man vornehmen muſs, um eine solche Gröſse zu finden. Für den gewöhnlichen Gebrauch sind daher Tabellen bei diesen Gröſsen ein unentbehrliches Bedürfniſs, wo ich das ein für allemal berechnet finde, was ich in jedem einzelnen Falle durch eine desto gröſsere Menge von Operationen suchen müſste, je genauer ich das Resultat haben wollte.

Die allgemeine Mathematik theile ich in Arithmetik und Analysis.

A. Arithmetik.

Ich verstehe also unter Arithmetik die Lehre von *beständigen Gröſsen*, sofern sie durch willkührliche Zeichen construirt werden. Ich weiche daher hier von dem gewöhnlichen Sprachgebrauch etwas ab, der eigentlich die ganze allgemeine Mathematik, obgleich etwas schwankend, so nennt. Die Arithmetik in dieser engeren Bedeutung hat drei Abschnitte:

1) Zahlen-Rechenkunst;
2) Buchstaben-Rechenkunst;
3) Algebra.

Der erste ist die Theorie der Rechnungsoperationen in bestimmten Zeichen (Ziffern); der zweite ist eben die Theorie in unbestimmten Zeichen (Buchstaben); der dritte ist die Lehre von den Gleichungen.

Um den idealischen Zusammenhang dieser Theile zu übersehen, bemerke ich, daſs die Algebra eigentlich der Hauptabschnitt der Arithmetik und die beiden ersten nur Vorbereitungen dazu sind. Das Problem nämlich, welches die Arithmetik der beständigen Gröſsen aufzulösen hat, allgemein ausgedrückt, lautet so: einen gegebenen Zusammenhang beständiger Gröſsen symbolisch zu construiren, und alles zu finden, was durch denselben bestimmt ist. Und man sieht leicht, daſs dieses die Idee der Algebra ist. Aber vor ihr müssen die einfachen Elemente aller arithmetischen Operationen erklärt seyn, welches in den beiden ersten Abschnitten geschieht.

B. Analysis.

Die Analysis ist die Theorie *der veränderlichen Gröſsen*, sofern sie durch willkührliche Zeichen construirt werden. Der Unterschied zwischen beständigen und veränderlichen Gröſsen ist so wichtig, und so sichtbar, daſs es in der That auffallend ist, zu bemerken, wie unsere besten Schriftsteller, zwar nicht ihn übersehn, (denn wer könnte das?) aber doch ihn nicht scharf herausheben, und die Gränzen, die er vorschreibt, deutlich beobachten. Ich weiſs keinen einzigen Schriftsteller zu nennen, bei welchem ich eine deutliche und bestimmte Erklärung von der Analysis gefunden hätte. Hätte man diese gesucht, (und unser eben gegebener Begriff muſs sich, dünkt mich, jedem, der die Sache kennt, als richtig aufdringen); so würde man eingesehn haben, daſs die Analysis zwar Buchstaben-Rechnung und Algebra voraussetzt, wie alle spätere Theile einer Wissenschaft die früheren; aber daſs sie nicht zur Analysis gehören. Selbst Segner und Kästner, unsere genausten Verfasser von Lehrbüchern, beobachten diese Gränzen nicht.

Die Analysis theilt man bekanntlich in die gemeine und in die höhere Analysis; Benennungen, die ich den Ausdrücken Analysis des Endlichen und Unendlichen vorziehen möchte. Der Begriff der ersteren hat gar keine Schwierigkeit. Das allgemeine Problem, welches sie zu lösen hat, ist folgendes: aus der symbolischen Construction eines gegebenen Zusammenhangs veränderlicher und beständiger Gröſsen (welche der Analyst eine *Function* der veränderlichen Gröſsen nennt,) alles zu finden was durch denselben bestimmt ist. Dieser Begriff hat keine Schwierigkeit: wir halten uns daher bei demselben nicht auf.

Was aber die höhere Analysis betrifft, so sagt zwar jedem, der sie kennt, ein klares unzweideutiges Bewuſstseyn, daſs sie etwas anders sey, als die gemeine Analysis; indem sie eine eigene Classe sehr allgemeiner Aufgaben umfaſst, und diese nach einer ganz eigenen Methode behandelt. Allein dieser ganze Calcul, der an Scharfsinnigkeit alles übertrifft, was man sonst scharfsinnig nennt, wurde von seinen beiden Erfindern auf einen Begriff gegründet, den weder die ersten Erfinder selbst, noch irgend ein Analyst nach ihnen, zur vollendeten Deutlichkeit hat bringen können. Leibnitz nannte ihn das Differenzial einer veränderlichen Gröſse, und erklärte dieses durch die unendlich kleine Veränderung einer Function, welche dadurch entsteht, daſs eine in ihm enthaltene veränderliche Gröſse eine unendlich kleine Veränderung leidet. Newton nannte ihn die Fluxion einer veränderlichen Gröſse, und erklärte diese durch die Geschwindigkeit, mit der sich eine Function ändert, wenn eine in ihr enthaltene veränderliche Gröſse mit einer bestimmten Geschwindigkeit wächst oder abnimmt. Beruhigt man sich mit diesen Erklärungen, so hat übrigens die Worterklärung der höheren Analysis nicht die geringste Schwierigkeit. Sie lehrt: entweder aus einem gegebenen Zusammenhang veränderlicher Gröfsen, den Zusammenhang ihrer Differenziale zu finden: oder umgekehrt, aus einem Zusammenhang von Differenzialen den Zusammenhang der zugehörigen veränderlichen Gröfsen zu finden. Jenes geschieht in der Differenzial-Rechnung, dieses in der Integral-Rechnung. Da die ganze folgende Abhandlung bestimmt ist, diesen schwierigen Gegenstand vollständig zu erörtern, so halte ich es für überflüssig, hier noch etwas hinzuzufügen.

II. Die räumliche Mathematik.

Wir kommen zu dem zweiten Haupttheil der Mathematik, den wir räumliche Mathematik genannt haben. Sie hat es mit der einzigen in unserm Vorstellungsvermögen vorkommenden Gröfse zu thun, welche unmittelbar durch sich selbst darstellbar ist; so dafs sie einer Construction durch Zeichen, zwar wie jede Gröfse, wohl empfänglich, aber nicht schlechthin bedürftig ist. Wir theilen sie, wie die allgemeine Mathematik, in die Theorie des Unveränderlichen und in die Theorie des Veränderlichen im Raume. Jene haben wir Geometrie genannt, diese Phorometrie.

A. Geometrie.

Das allgemeine Problem, welches die erstere aufzulösen hat, ist: einen Zusammenhang räumlicher Gröſsen, der durch einen Begriff oder Satz gegeben ist, zu construiren, um dadurch alles zu finden, was durch denselben bestimmt ist. So construirt die Geometrie ein Dreieck, seinem Begriffe gemäſs, um die Eigenschaften desselben kennen zu lernen, d. h. alles zu finden, was durch drei Linien, die in einer Ebene einen Raum begränzen, bestimmt ist. So construirt sie einen Kegel, eine Kugel und einen Cylinder von gleichem Durchmesser und Höhe, um zu untersuchen, was für ein Verhältniſs die so bestimmten Räume haben u. s. f. Da die Geometrie die ausgedehnte Gröſse selbst, nicht ein bloſses Zeichen derselben betrachtet, so hat sie, zwar nicht an Gewiſsheit, aber wohl an Anschaulichkeit einen Vorzug vor der allgemeinen Mathematik. Auch ist eben deswegen ihre Methode ganz eigenthümlich. Die allgemeine Mathematik rechnet, d. h., alle ihre Operationen sind im Grunde nichts, als Vermehrung und Verminderung der Gröſsen nach mehr oder minder einfachen Regeln. Die Methode der Geometrie ist: unmittelbare Anschauung und Betrachtung der Gröſse selbst. Sie sucht alles auf, was auſser den bestimmenden Stücken im Objecte selbst liegt, und betrachtet, in welchem Verhältniſs jedes, was sie wahrnimmt, gegen die bestimmenden Stücke stehe; sie vergleicht alle Theile und Bestandtheile des Objects unter sich, und mit andern schon bekannten Objecten, um so wo möglich seine Erkenntniſs zu erschöpfen. Um aber den Geist der Geometrie ganz aufzufassen, ist noch zweierlei zu bemerken. 1) Die Objecte der Geometrie können nicht bloſs unmittelbar, sondern auch, wie alle Gröſsen überhaupt, mittelbar durch willkührliche Zeichen construirt werden, d. h. die geometrischen Gegenstände sind einer arithmetischen und algebraischen Behandlung empfänglich. 2) Da die Zeichen, durch welche man Gröſsen in der allgemeinen Mathematik vorstellt, gänzlich willkührlich sind, so können die Objecte der Geometrie selbst als Zeichen jeder andern Art von Gröſsen gebraucht werden: so kann man die Linie als das Bild einer Zahl, einer Zeit, einer Geschwindigkeit, einer Kraft u. s. f. betrachten, und so selbst jede solche Frage, welche nicht räumliche Gröſsen betrifft, in das Gebiet der Geometrie herüberziehen. Kurz die geometrische Methode ist im Grunde eine eben so allgemeine Methode als die arithmetische, und jede mathematische Frage läſst sich daher eben so wohl geometrisch, als arithmetisch und algebraisch untersuchen. Es hat aber jede dieser Methoden ihre eigenen Vorzüge. Die geometrische hat den Vorzug der Anschaulichkeit und äuſseren Evidenz; aber sie giebt in der Anwendung auf äufsere Gegenstände der Sinne nur sehr mangelhafte Annäherungen: denn die wahren Objecte der geometrischen Untersuchung sind blofs im Kopfe, und können äufserlich nur annähernd, und wegen der Beschränktheit der Sinne nur sehr mangelhaft dargestellt werden. Dagegen hat die arithmetische Methode den Vorzug, dafs ihre Zeichen nicht mehr oder weniger gelten, als die Begriffe, die man an sie knüpft; sind diese also richtig, so sind ihre Operationen entweder ganz fehlerfrei, oder wenn man sich einer Näherungsmethode bedient, so kann man die Annäherung zu jedem Grade von Genauigkeit treiben. Bei der geometrischen Methode sind in der Anwendung auf die sinnliche Welt zwei Quellen von Fehlern unvermeidlich, Unsicherheit der sinnlich gegebenen Gröfsen, und Unsicherheit der mit ihnen vorzunehmenden Operationen. Bei der arithmetischen Methode ist blofs die erste Quelle von Fehlern unvermeidlich.

Die reine Geometrie hat es blofs mit der Construction beständiger Gröfsen zu thun; denn wenn sie auch zuweilen von dem Begriff einer Bewegung Gebrauch macht, so geschieht es doch mehr einer Bequemlichkeit wegen, als weil es nothwendig wäre; wenigstens ist in keinem Falle die Bewegung selbst der Gegenstand der Betrachtung. Hierin liegt der Grund, warum die sogenannten genetischen Erklärungen nicht ganz rein geometrisch sind, ob sie gleich bisweilen, besonders in der Stereometrie, grofse Bequemlichkeiten gewähren, und an sich der geometrischen Evidenz nicht den geringsten Eintrag thun. Man hat daher eigentlich nur dann Ursache, dem Begriff der Bewegung möglichst auszuweichen, wenn man einen Versuch machen will, wie weit sich der ganz reine Vortrag der Geometrie treiben lasse. Wie weit difs möglich sey, zeigt deutlich die Geometrie der Alten; doch sieht man leicht, dafs die Einmischung fremder besonders arithmetischer Begriffe (Zahl, Verhältnifs, Vervielfältigung, Theilung u. s. f.) zum Theil selbst in den allerersten Begriffen der Geometrie ganz unvermeidlich sey. Überhaupt lassen sich in keinem Theile der Mathematik die idealischen Gränzen weniger genau beobachten, als in der Geometrie. Schon in der Analysis ist es schwer, und wenn es möglich ist, nicht rathsam, den geometrischen Ansichten auszuweichen: aber in der Geometrie ist die Einmischung der Zahlen- und Buchstaben-Rechnung ein wesentliches Bedürfnifs geworden; indem man offenbar die Lehre von der Ausmessung der Linien, Flächen und Räume, gegenwärtig, um der mannigfaltigen Anwendungen willen, als einen integrirenden Theil der Geometrie ansehen mufs. Es ist daher zwar nöthig, sowohl in der Elementar- als höhern Geometrie, den reinen Vortrag bis zu einem gewissen Punkt streng zu beobachten, um den Geist der Wissenschaft zu erhalten; aber ich halte es für tadelhaft, diesen Versuch zu weit zu treiben. So gewiſs es eine kleinliche Ansicht der Dinge ist, immer nur in der Wissenschaft Nutzen, nicht Wahrheit, zu suchen, eben so gewiſs ist es ein Vorurtheil, zu glauben, daſs jede Rücksicht auf Anwendung die Wissenschaft erniedrige. Im Gegentheil muſs jeder, der die Dinge unbefangen betrachtet, einräumen, daſs jede wissenschaftliche Theorie um desto sorgfältiger bearbeitet werden müſse, je fruchtbarer sie sich in der Anwendung zeigt.

Man theilt die Geometrie in elementare und höhere. Die Gränze zwischen beiden ist zwar im Grunde nur willkührlich gezogen, aber doch natürlich und sehr bestimmt. Alles was durch die gerade Linie und durch den Kreis construirt werden kann, gehört in die niedere Geometrie, alles, wobei andere Curven vorkommen, in die höhere.

Die Elementar - Geometrie theilt man in Planimetrie (oder Epipedometrie), und Stereometrie. Jene umfaſst alles, was in einer Ebene construirt werden kann, also Linien, Winkel und ebene Figuren; diese begreift alles, was sich nur in einem Raume von drei Dimensionen construiren läſst.

Jeder dieser beiden Theile hat wieder einen rein geometrischen und einen aus Verbindung von Geometrie und Arithmetik gemischten Theil. In der Planimetrie enthält dieser gemischte Theil die Lehre von der Ähnlichkeit der Figuren, von ihrer Ausmessung und die Lehre von der Berechnung der Dreiecke. Die letzte ist für die Anwendung von solcher Wichtigkeit, daſs man zweckmäſsig gefunden hat, ihr durch den eigenen Namen der ebenen Trigonometrie den Character einer eigenen mathematischen Wissenschaft zu geben. Es erstreckt sich aber ihre Anwendbarkeit nicht bloſs auf Natur- und Kunstgegenstände, sondern man weiſs, daſs sie für alle Theile der Mathematik selbst, besonders für die Analysis, von unendlicher Wichtigkeit ist. Man muſs daher in der Analysis entweder sehr viel verlieren, oder zu einem höchst gekünstelten Vortrag seine Zuflucht nehmen, wenn man den Versuch, sie rein vorzutragen, hartnäckig durchsetzen will.

Zwischen der Planimetrie und Stereometrie ist bisher eine Lücke gewesen, welche Monge und Lacroix sehr glücklich durch die *Géométrie descriptive*, die ich im deutschen Projectionslehre nenne, ausgefüllt haben. Man bedient sich in der Stereometrie perspectivischer Zeichnungen, ohne vorher den Lehrling in den Stand zu setzen, daſs er sie verstehen könne. Zwar kann und muſs man sich auch wirklicher körperlicher Figuren beim mündlichen Unterricht bedienen; aber man sieht auch leicht ein, daſs ihr Gebrauch nur sehr eingeschränkt ist, und daſs er bei dem schriftlichen Unterricht aus Büchern ganz wegfällt. Daſs die

Perspective, die man bisher als einen Theil der angewandten Mathematik vorgetragen hat, sehr wenig aus der Physik voraussetze, bemerkte schon Kästner in seinen Anfangsgründen, und liefs sie daher gleich auf die Elementar-Geometrie folgen. Sie braucht aus der Physik nichts als den Begriff eines Lichtstrahls, und das Gesetz seiner geradlinigen Bewegung; aber beides gehört gar nicht zum Wesen dieser Wissenschaft, und sie erscheint als vollkommen reine Geometrie, wenn man die allgemeine Aufgabe, welche sie aufzulösen hat, auf folgende Art ausdrückt: es sind zwei Ebenen der Lage nach gegeben, nebst einem Punkt aufser ihnen; von diesem Punkt zieht man unbegränzte gerade Linien durch bestimmte Punkte der einen Ebene; man soll die Durchschnittspunkte dieser Linien mit der andern Ebene finden. Wenn man diese Durchschnittspunkte in der zweiten Ebene Projectionen von den Punkten in der ersten Ebene nennet, so ist auch dieser Begriff rein geometrisch. Übrigens ist der Begriff einer Projection bei sehr vielen mathematischen Untersuchungen von Nutzen, und verdient schon deswegen in die Elementar-Mathematik aufgenommen zu werden.

Die Stereometrie wird also folgende Abschnitte haben müssen. 1) Die Projectionslehre; 2) Die Lehre von der Lage der Ebenen; 3) Die Lehre von den Körpern, soweit sie ohne Arithmetik vorgetragen werden kann. Difs sind die rein geometrischen Abschnitte. Vermischte Abschnitte sind: 4) die Ausmessung der Körper, und 5) die sphärische Trigonometrie.

Die höhere Geometrie hat ihren schönen rein geometrischen Character in den neuern Zeiten zum Schaden der Wissenschaft beinahe ganz verlohren. Es ist wahr, die Anwendung der Analysis auf die Curven, giebt ihrer Theorie eine so bewundernswürdige einfache Ansicht, dafs es kein Wunder ist, wenn sich die Mathematiker haben verleiten lassen, über derselben die Methode der Alten beinahe zu vergessen. Aber auf der andern Seite gewährt wieder die rein geometrische Methode so wichtige Vortheile, und beschäftigt den Scharfsinn auf eine so eigenthümliche Art, dafs jedem, der es mit der Wissenschaft gut meint, die Aufrechthaltung der Methode der Alten am Herzen liegen mufs. Man sollte daher in jedem Lehrbuche wenigstens die Lehre von den Kegelschnitten erst im Geiste der Alten vortragen, ehe man ihre analytische Behandlung zeigte. Ein gewisser Mittelweg, den einige eingeschlagen haben, die Lehrsätze aus den Alten, und die Beweise aus der neuern Analysis zu nehmen, scheint mir nicht zweckmäfsig. Seit Newton wüfste ich in der That keinen Geometer zu nennen, der beide Methoden so vollkommen vereinigt hätte, als dieser eminente Geist.

B. Phorometrie.

Ich komme zu dem letzten Theil der reinen Mathematik, zu der reinen Bewegungslehre, die ich Phorometrie genannt habe. Der bloſse Zusammenhang, in welchem ich diese Wissenschaft hier aufstelle, macht es schon sichtbar, daſs sie nothwendig als Construction des *Veränderlichen* im Raum zur reinen Mathematik gerechnet werden müsse, weil sonst hier eine groſse Lücke bleiben würde, welche man nothwendig auszufüllen suchen müſste, wenn sie in der reinen Mechanik nicht schon längst und höchst vollständig ausgefüllt wäre. Bisher schwankte diese Wissenschaft, die man bald reine Mechanik, bald Dynomik, bald höhere Mechanik nannte, immer auf den Gränzen der reinen und angewandten Mathematik hin und her, als ob ihre Abkunft wirklich unsicher wäre. Indessen fühlte es jeder, der sich mit ihr beschäftigte, daſs es lauter rein mathematische Arbeiten waren, die er unter Händen hatte. Wie geht es also zu, daſs man dennoch nicht wagt, ihr ganz bestimmt den Platz anzuweisen, der ihr gebührt, und sie als wirkliche reine Mathematik zu behandeln. Der Grund ist nicht schwer zu finden. Einige Begriffe, die unleugbar von physischem Ursprung sind, die Begriffe von Masse, Beharrungsvermögen, und besonders Kraft, laufen durch alle Theorien der Mechanik hindurch, von den ersten Begriffen und Grund-

Grundsätzen an, so daſs sie untrennbar dazu zu gehören scheinen. Diſs ist aber unrichtig, und nur eine Folge des Ganges, welchen der menschliche Geist bei der Erfindung dieser Theorie genommen hat. Die erste Veranlassung zu diesen Untersuchungen sind lauter Aufgaben der Physik: der freie Fall, und die Wurfbewegung eines Körpers, die Schwingungen eines Pendels, einer gespannten Saite, die Bewegungen der Weltkörper: diſs waren die Gegenstände, welche den menschlichen Geist zuerst reizten, die allgemeinen Gesetze der Bewegung aufzusuchen; und hier hatte man es freilich überall mit Massen und Kräften zu thun. Es gelang dem Scharfsinn, alle diese Fragen in viel gröſserer Allgemeinheit aufzulösen, als in der sie die Natur selbst vorgelegt zu haben schien; und so behielt man die Begriffe, welche bloſs dem speciellen Fall, von welchem man ausgegangen war, zugehörten, auch in der allgemeinen Theorie bei. Der freie Fall der Körper war z. B. ein von der Natur aufgestelltes Problem; es war die Wirkung einer physischen K r a f t, der Schwerkraft. Man fand, die Bewegung sey eine gleichförmig zunehmende, und man entwickelte ganz allgemein die Gesetze dieser Art von Bewegung: aber die Begriffe von M a s s e und Kraft, die der speciellen physischen Aufgabe zugehörten, schlichen sich unvermerkt mit hinüber in die allgemeine Theorie, aber ganz unnöthig: denn das allgemeine Problem lautet so:

wenn sich ein Punkt so bewegt, dafs seine Geschwindigkeit in jedem Augenblick um gleichviel zunimmt, wie grofs wird seine Geschwindigkeit, und sein zurückgelegter Weg, am Ende jedes Zeitraums seyn? Wer sieht nicht ein, dafs diese Frage eine rein mathematische ist, und mit den Begriffen von Masse und Kraft gar nichts zu schaffen hat?

Die unnöthige Einmischung jener physischen Begriffe in die Theorie, hat hin und wieder ganz ohne Noth Schwierigkeiten veranlafst, weil der Begriff einer Kraft etwas idealisches anzeigt, was an sich gar nicht anschaulich ist. So hat man öfters Schwierigkeiten gefunden bei der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte, die in der That ein Cardinalpunkt für die ganze Mechanik ist; und man hat sehr künstliche Wege versucht, um diese Schwierigkeiten zu heben. Sie verschwinden aber von selbst, sobald man das rein mathematische und physische trennt. Die rein mathematische Frage heifst: wie kann ein Punkt zwei Bewegungen von gegebener Richtung und Geschwindigkeit auf einmal haben? Und wer sieht nicht ein, dafs, diese Frage zu beantworten, die ersten Elemente der Geometrie hinreichen. Die Beantwortung der physischen Frage aber, von der Wirkung zweier zugleich thätigen Bewegungskräfte, ist offenbar nichts anders, als die einfache Anwendung eines rein mathematischen Satzes auf einen physischen Fall. Selbst die allgemeine Theorie der Centralbewegungen läſst sich von allem physischen entkleiden und als eine rein mathematische Frage darstellen, wenn man nur bemerkt, daſs das Gesetz und der Ausdruck der Kräfte nichts anders ist, als das Gesetz und der Ausdruck der in jedem Augenblick zu der schon vorhandenen Bewegung in gewissen Richtungen hinzukommenden Geschwindigkeiten. Man bedenke nur, wie man dazu gekommen ist, Kräfte in mathematische Formeln zu bringen? Kraft ist die ihrem Wesen nach völlig unbekannte Ursache einer Bewegung, also gewiſs nichts meſsbares; was wir messen können, ist lediglich ihre Wirkung, die Bewegung, welche wir ihr zuschreiben. Die Gröſse der Bewegung aber ist das Produkt der Masse und Geschwindigkeit; und da die Masse immer etwas beständiges ist, so ist jeder Ausdruck der Kraft offenbar nichts, als der Ausdruck für das Gesetz der in jedem Augenblick entstehenden Geschwindigkeit, multiplicirt mit einem beständigen Coefficienten; und dieses sind lauter rein mathematische Begriffe. Wenn man sagt, die Centralkraft der Sonne stehe im verkehrten Verhältniſs mit den Quadraten der Entfernung, so sagt man nichts anders, als: der Zusatz an Geschwindigkeit, welchen ein Körper in der Richtung gegen das Centrum der Bewegung in jedem Punkte erhält, stehe in dem gedachten Verhältnisse u. s. f.

Die Trennung des rein mathematischen und des physischen ist also hier möglich; und sie würde für beide Wissenschaften von grofsem Nutzen seyn. Sie füllt eine Lücke, die sonst in der Mathematik bleiben würde, und macht die theoretische Untersuchung der Bewegungen offenbar einfacher und leichter. Die Physik aber bringt sie der reinen Idee der Wissenschaft näher, indem sie nicht mehr gezwungen seyn würde weitläuftige und schwierige mathematische, Theorien aufzunehmen, sondern, so wie sie mit Recht sich schon jetzt nicht für verpflichtet hält, die Lehrsätze der Arithmetik und Geometrie zu beweisen, berechtiget ist, sie aus ihrem eigenthümlichen Gebiete zu entlehnen; eben so würde sie nach Absonderung der Phorometrie die Lehrsätze dieser Wissenschaft entlehnen dürfen; und als mathematische Arbeit würde ihr blofs die ganz specielle Anwendung derselben auf die Naturerscheinungen übrig bleiben.

Ich mufs noch ein Paar Einwürfe erwähnen, die man vielleicht meiner Ansicht der Phorometrie entgegenstellen wird. Die Theorie des Veränderlichen im Raume, wird man vielleicht sagen, ist schon in der höhern Geometrie realisirt, indem man Abscissen, Ordinaten, Bögen, Flächen, kurz alles, als veränderliche Gröfsen behandelt. Dafs diese Ansicht der Curven phorometrisch sey, ist richtig; aber es ist auch klar, dafs hier die Bewegungen nicht Zweck, sondern blofs Hülfsmittel sind. Es wird wohl niemand leugnen, dafs es die Elementar-Geometrie nur mit beständigen Gröfsen zu thun habe; und würde sie aufhören, die Theorie beständiger räumlicher Gröfsen zu seyn, wenn man dergleichen phorometrische Ansichten in sie aufnähme, was gar wohl möglich ist, und sogar bisweilen geschieht! Die Mathematik bedarf eines Theiles, wo die Bewegung nicht Hülfsmittel, sondern Zweck ist.

Ein anderer Einwurf, dem ich entgegensehe, ist der, dafs der Begriff der Bewegung selbst kein mathematischer, sondern ein empirischer Begriff sey. Ich mufs diesen Einwurf um so mehr erwarten, da Kant selbst und sein Commentator Schulze in Königsberg, der ein guter mathematischer und philosophischer Kopf war, und aufser ihnen vielleicht noch viele andere, diesen Begriff zu einem empirischen machen. Aber was ist denn die Bewegung eines Punktes? Kann man anders antworten, als es sey eine stetige Veränderung seines Orts im Raume? Und ist Veränderung etwas anders als successive Verschiedenheit? Nun möchte ich doch wohl wissen, wo in dieser, dünkt mich, sehr vollendeten Analyse des Begriffs das Empirische läge? Im Punkt? Oder im Ort? oder im Raum? Oder in der Succession? Oder in der Verschiedenheit? Oder in der Stetigkeit? — Ich gestehe, es würde mir ganz unbegreiflich seyn, wie man den ganz rein mathematischen Ursprung dieses Begriffs verkennen könnte, wenn ich nicht wüſste, wie oft der innere Ursprung eines Begriffs verwechselt wird mit seinem Übergang aus dem dunklen ins deutliche Bewuſstseyn. Die Vorstellung vom Raum muſs offenbar allen andern Vorstellungen äuſserer Gegenstände zum Grunde liegen: denn wie könnte ich mir etwas als auſser mir vorstellen, ohne daſs ich vorher schon eine Vorstellung von dem Auſsermir hätte? Aber zum deutlichen Bewuſstseyn bringen wir ihn allerdings erst dadurch, daſs wir Ausdehnung und Entfernung mit den Sinnen wahrnehmen. Eben diese Bewandniſs hat es nicht nur mit dem Begriff der Bewegung, sondern überall mit allen mathematischen Begriffen. Ihr Ursprung liegt in dem Wesen unseres Vorstellungsvermögens; aber zum deutlichen Bewuſstseyn kann sie nur die sinnliche Wahrnehmung bringen?

Ich schlieſse diese Übersicht der reinen Mathematik mit einem Rückblick auf den ungeheuren Umfang derselben. Wer sie in allen ihren Theilen gründlich kennen will, muſs ihr sein ganzes Leben widmen, und doch ist dieses in der That nicht hinreichend, sich alles wichtige, was man entdeckt hat, völlig anzueignen. Diſs zeigt sich unter andern sehr deutlich in der schon erwähnten Erscheinung, daſs es gegenwärtig nur wenige Gelehrten dieses Faches geben möchte, welche in der höhern Geometrie in dem vollen Besitz der rein geometrischen Methode wären. Gewiſs hat diese Methode eben den unwiderstehlichen Reiz, der allen Theilen der Mathematik eigen ist, in einem vorzüglich hohen Grade. Ihre Vernachlässigung ist also wohl nicht einer Geringschätzung, sondern dem zu groſsen Umfang der Wissenschaft zuzuschreiben. Ich möchte daher vorschlagen, bei jeder Academie der Wissenschaften einen eigenen Gelehrten für die reine Geometrie anzustellen, um den Geist der alten Methode nicht unter der Last der neuern Analyse erdrücken zu lassen.

Die angewandte Mathematik.

Was ist nun die angewandte Mathematik? Die allgemeine Idee derselben hat keine Schwierigkeit. Sie ist Anwendung der reinen Gröſsenlehre auf empirische Gegenstände. Jeder wahrnehmbare Körper hat extensive Gröſse; jede Eigenschaft, jede Kraft eines Dinges, intensive; wir können nichts betrachten, nichts uns vorstellen, nichts denken, worauf der Begriff der Gröſse nicht auf mannigfaltige Art anwendbar wäre. Das idealische Feld der angewandten Mathematik ist daher in der That nicht kleiner, als das Universum selbst, unsere eigene Geisteskräfte nicht ausgenommen. Hieraus erklärt sich die besonders in allen Theilen der Naturlehre sichtbare Erscheinung, daſs die Wissenschaften, je weiter sie angebaut werden, sich dem Gebiete der Mathematik desto mehr nähern, und dasselbe oft in ganz unerwarteten Stellen berühren: eine Erscheinung, welche ohne Zweifel in Zukunft immer häufiger sich zeigen wird.

Es ist daher unstreitig interessant, die mannigfaltigen Anwendungen, welche schon jetzt von der Mathematik gemacht werden, in einem leichten Umriſs zu übersehen. Einen richtigen idealischen Leitfaden hierzu aufzufinden, dürfte schwer seyn, da diese Anwendungen äuſserst mannigfaltig und die meisten nur sehr zufällig entstanden sind. Ich muſs mich daher begnügen, einen empirischen Leitfaden gefunden zu haben.

Wir wenden die Mathematik an, entweder auf Werke der Natur, oder auf Werke des Menschen. Jene ist physische angewandte Mathematik, diese will ich die technische nennen:

Physische angewandte Mathematik.

Die verschiedenen Theile der erstern lassen sich ziemlich leicht nach den verschiedenen Theilen der Naturkunde übersehen.

In der Naturgeschichte haben uns kürzlich Haüy's schöne Entdeckungen zu einer unerwarteten Anwendung in dem Gebiete der Mineralogie geführt. In der Botanik und Zoologie sind wir noch nicht so weit, Gleichungen für die Curven angeben zu können, welche die idealische Gestalt des Blatts der Eiche oder Linde, oder die Gestalt der Krystall-Linse im Auge bestimmen.

In der mechanischen Naturlehre herrscht die Mathematik überall. Daher

1) Die mechanischen Wissenschaften, welche die Lehre vom Gleichgewicht und von der Bewegung fester, tropfbarer und ausdehnsamer Körper enthalten: Statik und Mechanik, Hydrostatik und Hydraulik, Aërostatik und Pneumatik.

2) Die optischen Wissenschaften, welche die Mechanik des Lichts enthalten: Optik, nebst Lamberts Photometrie; Dioptrik und Katoptrik.

Die Lehre von der Wärme, von der Electricität und magnetischen Kraft machen Hoffnung zu künftigen neuen Theilen der angewandten Mathematik, und man wagt es schon jetzt, das Wort Thermometrie auszusprechen.

Die chemische Naturlehre berührt in ihren neuen theoretischen Untersuchungen die Gränzen der Mathematik; und wenn auch jetzt noch die Anwendung fast lediglich auf die Lehre von Verhältnissen und Proportionen beschränkt ist, so kann man doch mit vieler Zuversicht erwarten, daſs einst die Zeit kommen werde, wo man die Auflöslichkeit eines Salzes für jede Temperatur, oder die Dichtigkeit und andere Eigenschaften der Mischungen durch analytische Formeln oder krumme Linien construiren werde.

Hales schrieb eine Statik der Gewächse, Borelli über die Bewegung der Thiere. Beides sind mangelhafte Versuche, welche aber dennoch die Möglichkeit sichtbar machen, die Anwendungen der Mathematik in das Gebiet der organischen Naturlehre überzutragen. Vielleicht gelingt es unsern Enkeln glücklichere Versuche zu machen.

Die physische Erdbeschreibung hängt mit der mathematischen innigst zusammen; und die Astronomie ist durchaus mathematisch; und von welchem Umfang!

Soll ich noch Anwendungen auf eine geistige Naturlehre erwähnen? Die Berechnung der Wahrscheinlichkeit zeigt, daſs die Idee nicht schimärisch ist.

Technische angewandte Mathematik.

Das Wort technisch ist bei der Benennung der technischen Mathematik in etwas weitem Sinne zu nehmen. Es soll nicht bloſs die Anwendung der Mathematik auf Künste anzeigen, sondern im Gegensatz der physischen Mathematik Anwendung auf alles, was nicht unmittelbar Werk der Natur ist. Es dürfte schwer seyn, hier in den Objecten der Anwendung einen Leitfaden zu ihrer Classificirung zu finden, da sie so vielfach und von so äuſserst mannigfaltiger Art sind. Dagegen geben die gesammten Theile der reinen und angewandten Mathematik selbst einen bequemen Leitfaden ab, an welchem sich alle erheblichen Theile der technischen Mathematik ziemlich leicht und vollständig aufzählen lassen. Zwar entlehnen die technischen Anwendungen das, was sie bedürfen, oft aus verschiedenen Theilen der Mathematik, indessen ist doch gewöhnlich ein bestimmter Theil derjenige, aus welchem sie vorzüglich schöpfen.

Die arithmetischen Operationen der reinen Mathematik wendet man an, in der gemeinen practischen und kaufmännischen Rechenkunst; in der politischen Arithmetik; in der Berechnung der Glücksspiele.

Aus der Geometrie schöpft das meiste, dessen sie bedarf die gemeine Feldmeſskunst oder practische Geometrie; desgleichen die Markscheidekunst.

Als Anwendungen der mechanischen Wissenschaften muſs man betrachten: die practische Mechanik oder Maschinenlehre, die ein sehr weitläuftiges Feld wird, wenn man die unzähligen zum Theil höchst sinnreichen Maschinerien dazu rechnen will, welche in den Künsten gebraucht werden; ferner Hydrotechnik. Auch lassen sich am schicklichsten hierher rechnen die in der That sehr mannigfaltigen und weitläuftigen Anwendungen der Mathematik auf alle Zweige der bürgerlichen und der Kriegsbaukunst, ob diese gleich nicht allein aus der Mechanik, sondern besonders auch aus der reinen Mathematik sehr vieles schöpfen. Endlich gehört hierher noch die Geschützkunst.

Die Lehrsätze der optischen Wissenschaften finden ihre Anwendung in der praktischen Optik, d. i. in der Lehre von der technischen Zusammensetzung aller Arten von optischen Werkzeugen; desgleichen in der Perspective, sofern man sie nicht als reine Mathematik behandelt (S. 93. f.), sondern eigentlich für den Künstler bearbeitet.

Auf den astronomischen Wissenschaften beruhen die mathematische Chronologie, die Gnomonik, und die so wichtige Steuermannskunst.

DIſs sind die gröſsern Parthien mathematischer Anwendungen auf Geschäfte und Verhältnisse des Lebens; der kleinern sind unzählig viele: denn es giebt wohl keine Handarbeit, welche nicht Veranlassung zum Rechnen und Messen, dem der es versteht, darbieten sollte. Verbindet man hiermit eine andere Bemerkung, daſs die Mathematik in ihren Elementarübungen eben so leicht, als in ihren höchsten Theorien schwer sey, daſs der stumpfste Kopf wenigstens zählen lerne, daſs die mathematische Elementar - Operationen die leichteste und einfachste Art des Verstandesgebrauchs, und die Fähigkeit zu denselben ein Gemeingut aller Sterblichen sey; eine Bemerkung, deren Richtigkeit bestätigt wird durch das Vergnügen, welches allen verständig unterrichteten Kindern das Rechnen macht, durch die Fortschritte, welche auch mittelmäſsige Köpfe darin machen, besonders aber durch den auffallenden Erfolg wohl überlegter Pestallozzischen Übungen: bedenkt man endlich, daſs die Mathematik die einzige Wissenschaft ist, in welcher vollendete Deutlichkeit der Begriffe, strenge Richtigkeit und Evidenz der Schlüsse erreicht werden kann: kurz, erwägt man den eigenthümlichen Charakter dieser Wissenschaft und ihr Verhältniſs gegen unser Vorstellungsvermögen: so muſs es jedem Unbefangenen einleuchtend werden, daſs das Studium der Mathematik bei weitem das wirksamste Hülfsmittel für die Bildung der intellectuellen Geisteskraft sey, an welchem schlechterdings jeder Mensch in gewissem Grade Antheil nehmen kann: ein Vorzug, durch welchen sich die Mathematik von jedem andern Bildungsmittel des Verstandes unterscheidet. Namentlich kann das Studium der Grammatik, so wichtig es in anderer Rücksicht ist, doch dieses Bildungsmittel nicht ersetzen: denn es muſs doch, dünkt mich, für jeden unbefangenen Beurtheiler einleuchtend seyn, daſs es nicht möglich ist, einem Kinde von einem Casus oder Modus einen so richtigen und deutlichen Begriff, als von einer geraden Linie und einem Kreise beizubringen; da die grammatischen Begriffe eigentlich zu den feinsten philosophischen gehören, wobei selbst geübte Denker Schwierigkeit finden, ganz ins deutliche zu kommen. Das Studium der Grammatik zu früh angefangen, dürfte daher vielleicht den Verstand mehr verbilden, als bilden; denn es ist wohl der geradeste Weg zur Seichtigkeit, wenn man frühzeitig gewöhnt wird zu glauben, man verstehe etwas, was man nur halb, oder weniger als halb gefaſst hat.

Daſs man die Frage aufgeworfen hat: ob

man den grofsen Haufen der Menschen aufklären solle? kann nur durch die Vieldeutigkeit des Worts aufklären entschuldigt werden: denn wenn man die Frage bestimmter so fafst: ob man die Geisteskräfte jedes Menschen zu wecken, zu üben und zu beleben suchen solle? so kann wohl kein Mensch von hellem Kopf und reinem Herzen einen Augenblick anstehen, wie sie zu beantworten sey. Die Frage kann nur seyn: auf welche Art man aufs zweckmäfsigste, und ohne Nachtheil des Ganzen, die Kräfte jedes einzelnen Menschen bilden könne? Die Erhaltung der menschlichen Gesellschaft erfodert eine unendliche Menge von Geschäften und Verhältnissen, unter welchen sehr viele niedrige, kleinliche und den Geist beengende, aber doch für das Ganze schlechterdings nothwendige sind. Hieraus folgt, dünkt mich, unwidersprechlich der Grundsatz: dafs man den Verstand dessen, den eine höhere Hand auf eine niedrige Stufe des Glücks gestellt hat, mehr intensiv, als extensiv bilden müsse. Menschenfreundliche Männer, in deren Hand Gott das Geschäft legte, mittelbar oder unmittelbar künftige Generationen zu bilden! O sorgt dafür, dafs auch der armseligste, der verlassenste, nach dem Beispiel des edlen Pestallozzi geübt werde, in den einfachsten Verstandesarbeiten, in den ersten Operationen des Rechnens und Messens. Difs wird ihm das kleinliche Geschäft, das er als Mann treiben muſs, nicht verhaſst machen; er wird es mit Liebe treiben, weil er es mit dem Gefühl geistiger Selbstthätigkeit treibt; und doch werdet ihr ihn auf der Stufenleiter empfindender und denkender Wesen heben. Aber verschont ihn mit einer extensiven Ausbildung, die er auf seinem Standpunkt nicht fassen, die sein gefesselter Fuſs nicht verfolgen kann und darf, die ihn mit seinem Geschick unzufrieden, die ihn unglücklich, und vielleicht moralisch schlechter machen würde.

DRITTE ABHANDLUNG.

Untersuchung

über

den eigentlichen Sinn der höheren Analysis.

Untersuchung
über
den eigentlichen Sinn der höheren Analysis.

I.

Einleitung.

1. Vollendete **Deutlichkeit** der Grundbegriffe ist für die feste Begründung einer wissenschaftlichen Theorie zwar von unschätzbarem Werthe, aber nicht von unbedingter Nothwendigkeit. Nur **dunkle** Begriffe sind der Tod alles wissenschaftlichen Fortschreitens; dagegen würde es nicht schwer seyn zu zeigen, daſs auſser dem Gebiete der Mathematik, z. B. in der Logik, Moral, Rechtslehre, Politik, u. s. f. die wichtigsten Untersuchungen, deren Richtigkeit die Übereinstimmung aller selbstdenkenden, wahrheitliebenden, und durch keine Sophisterei verdrehten Köpfe verbürgt, dennoch bloſs auf mehr oder

minder **klaren**, nicht auf **deutlichen** Begriffen beruhen. Ja selbst in dem Gebiet der Gröſsenlehre giebt es einige wenige Punkte auf welche sich eben diese Bemerkung anwenden läſst. Kein gehörig unterrichteter kann an der Richtigkeit der Lehrsätze von Parallellinien, oder an der Haltbarkeit unserer Theorie von den Logarithmen zweifeln, und doch beweisen die bekannten Schwierigkeiten dieser Theorien, daſs in den Grundbegriffen, worauf sie beruhen, noch irgend ein Mangel an vollendeter **Deutlichkeit** versteckt liegen müsse. So wahr und haltbar übrigens eine auf bloſs **klaren** Begriffen beruhende Theorie seyn kann, so ist sie doch von **der** Seite jederzeit in einer ungünstigen Lage, daſs sie Bedenklichkeiten, Zweifeln, und Angriffen bloſs gestellt ist, die sich bei der innigsten Überzeugung von der Richtigkeit der Sache, dennoch nie ganz siegreich zurückschlagen lassen *).

---

*) Ich möchte die sehr wichtige und fruchtbare Lehre der Logiker von **deutlichen**, **klaren** und **dunkeln** Begriffen selbst als Belag zu dem Inhalt dieses §. aufstellen. Denn der Begriff eines **Merkmals**, dessen sie sich bei dieser Classification bedienen, ist so vage und unbestimmt, daſs es unmöglich ist, vermittelst dieses Begriffes eine deutliche und scharf bestimmte Erklärung jener drei Arten von Begriffen zu geben. Denn **ein Merkmal** kann die zufälligste gar nicht zum Wesen des Dinges gehörige Sache seyn. Wenn

2. Das auffallendste Beispiel zur Bestätigung unserer Bemerkung dürfte wohl die höhere Analysis geben: denn man muſs gestehen, daſs der eigenthümlichste Grundbegriff derselben, der Begriff eines Differenzials, oder wie ihn Newton nannte, einer Fluxion nichts weniger, als deutlich ist. Selbst die beiden scharfsinnigen Erfinder des Algorithmus der höhern Analysis,

---

man sagt: eine Fläche sey die Gränze eines Körpers, so giebt man unstreitig ein richtiges Merkmal an, das aber nur eine äuſsere Beziehung ausdrückt, welche nicht zum Wesen der Sache gehört, und das Innere des Begriffs einer Fläche nicht im geringsten aufklärt: denn eine Fläche kann man sich gar wohl auch ohne einen Körper vorstellen. Ich möchte daher diese drei Arten von Begriffen auf folgende Art bestimmen. Deutlich ist ein Begriff, wenn ich ihn nicht nur im Ganzen vollständig und genau aufgefaſst habe, sondern mich auch der einfachen Begriffe bewuſst bin, aus denen er, als aus ungleichartigen Bestandtheilen zusammengesetzt ist. Klar ist ein Begriff, den ich zwar im Ganzen genau und vollständig aufgefaſst habe, ob ich gleich seine Bestandtheile gar nicht, oder nur mangelhaft darlegen kann. Dunkel ist endlich ein Begriff, wenn ich nicht einmal seinen Umfang, und seine Gränzen vollständig, und bestimmt aufgefaſst habe. Vom Kreise hat einen deutlichen Begriff der Geometer, einen klaren fast jedermann, einen dunkeln der welcher ihn noch mit einer Ellipse verwechseln kann. Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes würde eine eigne Abhandlung erfodern.

schwankten, wie wir zeigen werden, in der genauen Bestimmung, oder im Gebrauche desselben. Die vortrefflichsten Analysten nach ihnen, haben mancherlei Wege versucht, die Schwierigkeiten zu heben, auf welche jener undeutliche Begriff führt, aber dafs keiner von allen diesen Versuchen seinen Zweck vollkommen erreicht kaben könne, ist schon daraus klar, dafs ein vollkommen gelungner Versuch längst jede andere Vorstellungsart verdrängt haben müfste, welches der Fall nicht ist.

3. Es liegt am Tage, welche erstaunenswürdigen und alle Erwartung übertreffenden Fortschritte die Gröfsenlehre in sich selbst und in allen ihren Anwendungen durch den Algorithmus der Differenzial- und Integral-Rechnung gemacht hat. Und je vertrauter der Analyst mit den Geheimnissen dieses Calculs wird, um so unerschütterlicher wird seine Überzeugung von der strengen Richtigkeit desselben, ob er gleich nicht im Stande ist, sich gewisse Paradoxien befriedigend aufzulösen. Versucht er es den Begriff des Differenzials zu analysiren, so sieht er sich gezwungen, den Begriff des Unendlichkleinen entweder, wie es Leibnitz, Euler, Segner, und andere thun, unverhüllt hineinzulegen, oder ihn, wie Newton, Maclaurin, d'Alembert, l'Huilier und andere, künstlich zu verschleiern, und wir werden in der Folge sehen, dafs difs, und warum es unvermeidlich sey. Aber was ist eine unendlich

kleine Gröſse? Kann ein Ding, was man bald als im strengsten Sinn = o zu setzen, bald wieder als eine wirkliche Gröſse anzusehen gezwungen ist, etwas anders seyn, als ein unbegreifliches Mittelding zwischen Nichts und Etwas? und sträubt sich nicht der gesunde Verstand des Mathematikers mit vollem Recht gegen einen solchen Mysticismus?

4. Und doch beweiset nicht nur der glänzende Erfolg, den ein methodischer Gebrauch dieses Begriffs in der höhern Analysis gehabt hat, daſs er kein Hirngespinst sey, sondern es läſst sich auch aus anderweitigen Gründen trotz des Widerspruchs, den er in sich zu tragen scheint, seine vollgültige Realität auſser Zweifel setzen. Zu dem Ende bemerke ich zuerst, daſs die Idee des Unendlichen in ihren beiden Bestimmungen, als unendlichgroſs, und unendlichklein, nicht etwa bloſs der höhern Analysis, sondern der ganzen Mathematik, selbst in ihren allerersten Begriffen zum Grunde liegt. Man muſs Euklides zweites Postulat ausstreichen, wenn man nicht die Unendlichkeit des Raums voraussetzen will. Denn ist der Raum nicht absolut unbegränzt, d. h. unendlich groſs, so kann ich eine Linie, eine Fläche, einen Raum nicht, so weit ich will, sondern nur bis zu den Gränzen des Raums erweitern. Die absolute Unbegränztheit der natürlichen Zahlenreihe führt nothwendig auf die Idee des Unendlichgroſsen, oder setzt dieselbe, gerade so,

wie Euklides zweites Postulat, voraus. Und da der Begriff der Zahl auf alle erdenkliche Arten von Gröſsen anwendbar ist, so ist man auch genöthigt, die Anwendbarkeit der Idee des Unendlichgroſsen, auf alle Arten von Gröſsen einzuräumen. Eben so führt die absolute Unbegränztheit in der Theilung einer jeden Gröſse, nothwendig auf die Idee des Unendlichkleinen. Euklides beweiset im ersten Satz des zehnten Buches, auf eine Art, die Niemand in Anspruch nimmt, oder nehmen kann, daſs man durch fortgesetzte Theilung auf Gröſsen komme, welche kleiner sind als jede gegebene; hieraus aber folgt durch einen Schluſs, gegen welchen die feinste Dialektik nichts aufbringen kann, daſs es kein Hirngespinst sey, Gröſsen zu denken, welche kleiner sind, als alles, was gegeben werden kann d. h. welche unendlichklein sind. Ich gestehe indessen gern, daſs Schlüsse dieser Art den Verstand mehr zwingen, als überzeugen. Der Mathematiker ist gewohnt die Realität eines Begriffs nur dann erst einzuräumen, wenn er ihm in einem wirklichen Fall realisirt vorgelegt wird. Aber auch an solchen Beweisen für die Realität der Idee des Unendlichen fehlt es nicht. Die Tangente und Secante des rechten Winkels sind von jeher unendlich groſs gewesen, und werden es in alle Ewigkeit bleiben; und zu sagen, daſs der rechte Winkel keine Tangente habe, ist eine dialektische Sophisterei, die man nur machen kann, so lange man das eigentliche Wesen der mathematischen Unendlichkeit noch nicht deutlich aufgefaſst hat. Man macht indessen gewöhnlich viel weniger Einwendungen gegen das Unendlichgroſse, als gegen das Unendlichkleine; aber glücklicher Weise existirt auch für dessen Realität ein Beweis, gegen welchen die feinste Dialektik nichts gültiges einwenden kann; und es ist sonderbar, daſs die Vertheidiger des Unendlichkleinen, nicht mit Nachdruck Gebrauch davon gemacht haben. Im sechzehnten Satz des dritten Buchs beweist Euklides so streng, als irgend etwas bewiesen werden kann, daſs der Winkel eines Kreisbogens mit seiner Tangente kleiner sey, als jeder spitzige Winkel; d. h. kleiner als jeder Winkel, der gegeben werden kann; und dennoch ist man gezwungen, nach den ersten Begriffen von einer Gröſse, diesem unendlich kleinen Winkel eine gewisse Art von Gröſse beizulegen: denn er wird gröſser, wenn man den Halbmesser des Kreises kleiner nimmt, und umgekehrt; und ungeachtet er, wie Euklides streng erweiset, durch keine gerade Linie getheilt werden kann, so kann er doch, was eben so streng erweislich ist, durch Kreisbögen von gröſserem Halbmesser und zwar schlechthin ins Unendliche getheilt werden. Hier haben wir also eine unendlichkleine Gröſse, in einem anschaulichen Gegenstand vor uns, und man muſs einräumen, daſs die Realität eines Begriffs, durch Darlegung eines wirklichen Falls, nicht strenger erwiesen werden kann.

Es würde nicht schwer seyn aus dem ganzen Umfang der Mathematik, und selbst aus den Elementen derselben mehrere Sätze anzuführen, von denen man dreist behaupten hann, daſs ihre ersten Erfinder nur durch Betrachtung unendlich kleiner Gröſsen auf sie gekommen sind, und nur auf diesem Wege sie finden konnten: denn der Begriff dringt sich bei vielen Gelegenheiten unausweichlich auf: man kann ihn durch künstliche Wendungen verschleiern, aber man kann ihn nicht beseitigen. Ich halte es aber für überflüssig hier mehrere Beispiele aufzustellen, da der einzige angeführte Satz, die Realität des Begriffs, trotz seiner widersinnig scheinenden Natur doch auf eine Art darthut, welche die schärfste Kritik aushält.

5. Betrachtungen dieser Art hellen zwar das Dunkel nicht auf, was auf diesem Begriffe liegt, aber sie zeigen doch unwidersprechlich, daſs er keine Schimäre, keine Geburt der schwärmenden Phantasie, sondern aus dem Wesen des Vorstellungsvermögens selbst entsprungen, und untrennbar mit der Mathematik verbunden sey. Die Gründe welche sich dafür aufstellen lassen, scheinen mir so evident, so unzweideutig, daſs ich schon lange, ich gestehe es, nicht bloſs miſstrauisch gewesen bin gegen jeden Versuch das Unendliche aus der Mathematik zu verbannen, sondern daſs ich diſs für ganz unausführbar gehalten habe. Daher glaube ich, man müsse diesen sonderbaren Begriff aufzuklä-

ren, nicht ihn zu verdrängen suchen. Unstreitig ist der Begriff des Unendlichen von ganz eigenthümlicher Art, und von andern mathematischen Begriffen sehr verschieden; aber difs berechtigt uns nicht ihn zu verwerfen, sobald er sich als nothwendig aufdringt. Bei öfters wiederholtem Nachdenken über den Begriff des Differenzials, bin ich auf eine Vorstellungsart gekommen, die ohne allen Mysticismus jede Schwierigkeit zu lösen scheint. Ihre Auseinandersetzung ist der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung.

6. Ehe ich aber diese Ansicht darlegen kann, halte ich es für nöthig, die vornehmsten Versuche durchzugehen, die man bisher gemacht hat, um die Schwierigkeiten der höhern Analysis zu heben; denn ich würde etwas überflüssiges zu unternehmen scheinen, wenn ich es nicht sichtbar machte, dafs alle bisherigen Versuche dem Begriff des Unendlichkleinen auszuweichen, nur sinnreiche Verschleierungen desselben sind.

II.

Über die Unzulänglichkeit aller bisher gemachten Versuche, die Grundbegriffe der höheren Analysis aufzuklären.

7. Zu den Versuchen, dem Begriff des Unendlichkleinen auszuweichen, muſs man schon die Exhaustionsmethode der Alten rechnen. Es ist nöthig, hier von ihr zu reden. Denn ob sie gleich den Begriff des Differenzials nicht ersetzen, noch zur alleinigen Grundlage der höhern Analysis dienen kann, so wird sie doch bei sehr vielen Theorien unentbehrlich, so bald man den Versuch macht, den Begriff des Differenzials ganz zu entbehren. In der That kann wohl die strengste Kritik nichts gegründetes aufbringen gegen den allgemeinen Gang der Schlüsse, der bei dieser überaus scharfsinnigen Methode zum Grunde liegt. Demohngeachtet dürfte sie, gerade in dem Fall, wenn sie angewendet wird, um den Begriff des Unendlich-

kleinen auszuweichen, nur zu einer künstlichen Verschleierung desselben führen. Es würde eine eigne Abhandlung erfodern dieses allgemein zu untersuchen: denn der Grund liegt nicht in der Methode selbst, sondern in den Objecten, auf welche sie angewendet wird, weswegen die Untersuchung nur durch Induction geführt werden könnte. Wir müssen uns daher begnügen, einen einzigen Fall anzuführen, nach welchem sich aber die übrigen leicht werden beurtheilen lassen. Die Alten bewerkstelligten bekanntlich die Vergleichung des Kreises mit dem Dreieck durch die Exhaustionsmethode. Die ganze Stärke des Beweises beruht darauf, dafs der Perimeter jedes äufsern Polygons gröfser, jedes innern Polygons kleiner ist, als die Kreislinie, oder einfacher, und in neuern Ausdrücken, dafs die Tangente eines Bogens gröfser, die Sehne kleiner ist, als der Bogen. Das letzte folgt aus dem Grundsatz, dafs die gerade Linie die kürzeste Ausdehnung zwischen zwei Punkten sey. Das erste nahm Archimedes gleichfalls als blofsen Grundsatz an: man hat aber längst die richtige Bemerkung gemacht, dafs dieser Satz eines Beweises bedürfe, und man hat verschiedene Versuche gemacht, diese Lücke auszufüllen. Man analysire jeden solchen Beweis, und alle darin enthaltene Begriffe, so weit als möglich, und ich fürchte, man wird jederzeit, entweder einen Fehler im Beweis, oder den Begriff des Unendlichkleinen versteckt finden. Eben so einfach als sinnreich ist z. B. die Art, wie der neuere Euklides, *Légendre* in seinen *Elémens de Géométrie* diese Lücke ergänzt. Er giebt L. IV. Pr. IX. (p. 115.) folgenden Satz: wenn über den Endpunkten einer geraden Linie eine krumme oder gebrochene, oder gemischte, aber nur nach auswärts convexe Linie beschrieben ist, so ist dieselbe kleiner, als jede sie einschliefsende und blofs auswärts convexe Linie. Den Beweis führt er auf folgende Art. Wäre die eingeschlossene Linie nicht kleiner, als jede einschliefsende, so müfste es unter allen einschliefsenden Linien eine geben, welche die kleinste wäre. Nun giebt es aber keine solche kleinste: denn welche einschliefsende man auch für die kleinste annehmen mag, so läfst sich jederzeit leicht zeigen, dafs es noch kleinere gebe. Folglich ist die eingeschlossene Linie kleiner, als jede einschliefsende. Ich weifs nicht, liegt die Schuld an meiner Einsicht, oder an dem Beweis, er hat mir nie ganz befriedigend geschienen. Der Schlufs, dafs, wenn die eingeschlossene Linie nicht kleiner sey, als jede einschliefsende, sich unter den einschliefsenden eine kleinste finden müsse, scheint mir nicht genau, es müfste, dünkt mich, heifsen: so müssen sich unter den einschliefsenden welche finden, die kleiner als die eingeschlossene Linie, oder auch derselben gleich sind. Dann verliert aber der Beweis seine ganze Kraft, denn räumt man als denkbar ein, dafs unter den einschlieſsenden Linien kleinere seyn könnten, so muſs man auch vor dem Beweis als denkbar einräumen, daſs alle einschlieſsenden Linien kleiner seyn könnten, und dann folgt aus dem Beweise weiter nichts, als daſs es unter ihnen keine kleinste gebe; nicht aber, daſs sie alle gröſser seyn, als die eingeschlossene. Wenn man bei einem Beweise untersuchen will, nicht ob der Satz richtig, sondern ob in der Form der Schlüsse ein Fehler sey, so scheint mir kein Mittel sicherer und leichter zu seyn, als daſs man die bloſse reine Form der Schlüsse abgesondert betrachte, indem man statt der besondern Gröſsen, welche der Satz enthält, allgemeine Zeichen wählt. Bei unserm Beweise wäre nun der Fall folgender. Es ist eine bestimmte Gröſse A (die eingeschlossene Linie) gegeben, mit welcher eine Unendlichkeit anderer Gröſsen derselben Art (die einschlieſsenden), die wir als Werthe einer veränderlichen Gröſse vorstellen können, und mit x bezeichnen wollen, in einer gewissen gegebenen speciellen Verknüpfung (des Einschlieſsens und Eingeschlossenseyns) stehen, die zwar unmittelbar über das Verhältniſs ihrer Gröſse nichts aussagt, woraus man aber durch Schlüsse eine Vergleichung abzuleiten versucht. Es soll also, und zwar durch einen indirecten Schluſs, gezeigt werden, daſs A kleiner sey, als jeder Werth von x. Zu dem Ende werde ich sagen müssen: wenn A nicht kleiner ist, als jedes x, so müssen die einzelnen Werthe von x entweder alle, oder einige derselben kleiner als A, oder auch A gleich seyn. Nur im zweiten Fall (wenn einige x kleiner als A sind) darf ich annehmen, es gebe unter ihnen ein *Minimum*; im ersten Fall ist diſs nicht nothwendig u. s. f. Wenn der Beweis in unzweideutiger Strenge geführt werden soll, so sehe ich in der That keine andere Möglichkeit ein, als daſs man ihn lediglich von gebrochnen Linien erweise, und dann schlieſse, was von jeder nur erdenklichen gebrochnen Linie gilt, das gilt auch von einer krummen. In diesem Schluſs würde aber der Begriff des Unendlichkleinen versteckt liegen: denn eine krumme Linie kann nur durch Hülfe dieses Begriffs als eine gebrochene betrachtet werden. Aber ich bin auch überzeugt, daſs jeder Versuch, dem Unendlichkleinen auszuweichen, bei ähnlichen Fragen, nur auf Verschleierungen desselben hinauslaufen möchte. In der That begreife ich auch nicht, wie irgend ein Übergang vom Geraden zum Krummen anders möglich sey, als durch das Unendlichkleine: denn diſs ist das einzige, was eine gerade und krumme Linie gemein haben können, und worin alle Verschiedenheit zwischen gerade und krumm gänzlich verschwindet. Überhaupt aber dürfte derselbe Fall überall eintreten, wo zwei zu vergleichende Gröſsen bei jedem endlichen Werth ungleichartig sind, aber im Unendlichkleinen als gleichartig erscheinen.

8. Die

8. Die neuern Versuche, die man gemacht hat, die höhere Analysis gegen den Vorwurf zu sichern, dafs sie auf unsichern Grundbegriffen beruhe, lassen sich unter zwei Abtheilungen bringen. Entweder behielt man den Begriff und das Zeichen eines Differenzials bei, und suchte nur den Begriff so zu bestimmen, dafs die Widersprüche, auf welche er zu führen schien, beseitigt würden; oder man verwarf den ganzen Begriff, und suchte auf anderm Wege zu dem zu gelangen, was man vermittelst jenes Begriffs gefunden hatte. Diejenigen, welche den ersten Weg einschlagen, legen entweder den Begriff des Unendlichkleinen unverhüllt zum Grunde, und suchen nur durch allerlei Vernünfteleien die Widersprüche zu entkräften, auf welche er zu führen scheint; oder sie suchen ihm gleich anfänglich in der Erklärung des Differenzials auszuweichen. Ob mit Glück, wollen wir in der Folge untersuchen. Was Versuche der zweiten Art betrifft, so scheint es, wenn man den Begriff eines Differenzials ganz aufgiebt, in der That möglich, und zwar auf mehr als eine Art, alles, was man gewöhnlich durch einmaliges oder mehrmaliges Differenziren findet, durch Operationen der gemeinen Analysis zu finden, wodurch auch für die Operationen der Integralrechnung der paradoxe Begriff des Unendlichen als entbehrlich erscheint. Allein, wenn man entweder die entfernteren Sätze aufsucht, welche einer solchen Theorie mittelbar

zum Grunde liegen, oder wenn man versucht, sie auf Gegenstände der Geometrie und Mechanik anzuwenden, so kommen eben die Schwierigkeiten, denen man ausweichen wollte, wieder unverdrängbar zum Vorschein.

9. Unverhüllt legten den Begriff des Unendlichkleinen zum Grunde, Leibnitz, die Bernoulli, l'Hospital, Varignon, Euler, Segner, *etc.* Aber in der That schwankte in der Erklärung des Differenzials niemand mehr als der Erfinder. Selbst seine allerersts Erklärung des Differenzials trägt, sogar im Ausdruck, den Charakter der Unsicherheit. Nachdem er in der Abhandlung, *Nova methodus tangentium etc.* (Act. erudit. 1684. p. 467 f.) den Algorithmus der algebraischen Differenziale blofs historisch dargelegt hat, fährt er (p. 469.) fort: *Demonstratio omnium facilis erit in his rebus versato, et hoc unum consideranti ipsas* ∂x, ∂y, ∂v, ∂w, ∂z, *ut ipsarum* x, y, v, w, z *(cujusque in sua serie) differentiis seu incrementis et decrementis momentaneis proportionalis haberi posse etc.* Bis dahin hatte er, wenn x die Abscisse, und y die rechtwinkliche Ordinate einer Curve ist, ∂x angesehen als eine beliebige Linie, und ∂y als die vierte Proportionale zur Subtangente, Ordinate, und ∂x. Weiterhin betrachtet er die Tangente ausdrücklich als die geradlinige Verlängerung eines un-

endlichkleinen Bogens. In spätern Abhandlungen, besonders in der, *De motuum coelestium causis* (Act. er. 1689. p. 82 f.) spricht er nicht nur bestimmt von *infinite parvis*, sondern sogar von *incomparabiliter parvis*, und scheint die höhern Differenziale nicht anders als durch diese Erklärung retten zu können. Ich führe diſs nicht an, um ein so groſses Genie herabzusetzen, im Gegentheil scheint mir daraus hervorzugehen, daſs ein so feiner philosophischer Kopf die Unsicherheit eines bloſs klar aufgefaſsten Begriffs viel lebhafter wahrgenommen habe, als seine Nachfolger.

10. Newtons Fluxionen sind schon eine scharfsinnige, doch nicht vollständige Verschleierung des Unendlichkleinen. In dem Begriff der Fluxionen kommt unmittelbar das Unendlichkleine nicht vor: denn sie sind Geschwindigkeiten, mit welchen sich veränderliche Gröſsen ändern. Auch weicht er sinnreich dem Begriff in allen Lehrsätzen und Aufgaben aus; und so viel ich finden kann, ist in dem ganzen scharfsinnigen Werke, *Methodus fluxionum*, nur eine einzige Stelle, wo sich der Begriff unverhüllt hervordrängt; nämlich bloſs in dem Beweis, (nicht in der Auflösung), des ersten Problems; *Data relatione, quam invicem habent fluentes quantitates, determinare relationem, quae inter earum fluxiones intercedit etc.* Er fängt diesen Beweis mit

folgenden Worten an *): *fluentium quantitatum momenta (videlicet earum partes indefinite parvae, quarum accessione in indefinite parvis partibus temporis quantitates ipsae jugiter augentur) sunt ut velocitates quibus fluunt aut crescunt etc.*

Man weiſs, daſs Newton die Herausgabe dieses unendlich wichtigen Werks sehr lange verzögerte, ohne einen andern Grund anzugeben, als daſs er den Streit nicht liebe. Ohne Zweifel befriedigte ihn seine Ansicht des Grundbegriffes nicht, und diſs bestätigt sich noch mehr dadurch, daſs er in seinem zwar früher herausgegebenen, aber später ausgearbeiteten *Principiis philosophiae naturalis*, von den Fluxionen keinen Gebrauch macht, sondern für sie die Gränzverhältnisse substituirt, von welchen gleich umständlicher die Rede seyn wird.

Niemand hat sich wohl gröſsere oder vielmehr unsäglichere Mühe gegeben, die Fluxionsrechnung von dem Vorwurf eines Mangels an Evidenz in ihren Grundbegriffen zu befreien, als *Maclaurin*, und doch kann er in dem wichtigsten Fundamentalsatz seiner Theorie, im 14ten Theorem des ersten Buchs, den Begriff von etwas, das kleiner ist als alles, was sich

*) In *Castillons* Ausgabe von Newtons *Opusculis*, Vol. I. p. 59.

geben läſst *), nicht ausweichen, und in der Anwendung auf besondere Gegenstände der Geometrie und Mechanik kann man doch, wie wir in der Folge allgemein zeigen werden, der Betrachtung unendlichkleiner Gröſsen nicht entgehen.

Man hat übrigens beide noch, und nicht ohne Grund, getadelt, daſs sie in die Grundbegriffe der Analysis, mechanische Begriffe, Bewegung und Geschwindigkeit einmischten, was zwar der Evidenz keinen Eintrag thun würde, (denn jene Begriffe gehörig gefaſst, sind reine mathematische Begriffe) aber doch den Gesetzen einer richtigen Topik nicht gemäſs ist.

11. Keine Vorstellungsart ist in den neuern Zeiten beliebter geworden, als die Theorie der Gränzverhältnisse. Daſs Newton sie schon in seinen *Principiis* gebraucht habe, ist schon oben erinnert worden; und die ganze erste Section des ersten Buchs enthält in elf Lehrsätzen vielleicht das scharfsinnigste, was sich über diese Vorstellungsart sagen läſst. Nach ihm hat besonders d'Alembert dieselbe dringend empfohlen, und l'Huilier hat sie besonders sorgfältig, auf Veranlassung einer Preisfrage der Kgl. Acad. der Wiss. in Berlin für das Jahr 1786 ausgeführt **).

---

*) In Pezanas fr. Üb. *Traité des fluxions par Maclaurin, Paris* 1749. *Vol. I. p.* 45.

**) *Exposition élémentaire des principes des calculs superieurs, par l'Huilier à Berlin.* Die neue Aus-

Um diese Vorstellungsart richtig zu würdigen, ist es nöthig, die Idee welche ihr zum Grunde liegt, kürzlich auseinander zu setzen. Es sey y gleich irgend einer Function von x, oder $y = Fx$: man nehme an, x wachse um die beliebige Gröſse Δx, und y gehe dadurch über in $y + \Delta y$, so läſst sich beweisen, daſs seyn werde

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + q\,\Delta x + r\,\Delta x^2 + s\,\Delta x^3 + \text{etc.}$$

wo p, q, r, s etc. in allgemeinen Functionen von x, und nach gewissen Gesetzen von der ursprünglichen Fx abhängig sind: in besondern Fällen kann ein oder der andere dieser Buchstaben einen beständigen Werth erhalten, oder auch $= 0$ oder selbst unendlich groſs werden. Nun ist klar, daſs, so lange Δx irgend eine bestimmte Gröſse hat, wie klein sie auch seyn mag, das Verhältniſs $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ doch von Δx abhängig sey. Stellt man sich aber Δx vor als eine veränderliche stetig abnehmende Gröſse, so leidet auch das Verhältniſs $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ eine stetige Veränderung, und wird endlich $\Delta x = 0$, so bleibt bloſs übrig $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p$; für diesen Fall schreibt

---

gabe dieser Schrift hat den Titel: *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris* 1795.

man nun statt Δ das Differenzialzeichen, und so erhält man $\frac{\partial y}{\partial x} = p$; d. h. es folgt aus dieser Betrachtung, dafs das Differenzialverhältnifs $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine bestimmte Function von x, und in besondern Fällen auch eine beständige Gröfse, oder $= o$, auch sogar unendlich grofs, kurz, was man will, seyn könne. Ist nun p eine Function von x, so ist klar, dafs auf sie alle die Schlüsse angewendet werden können, die man bei der ursprünglichen Function gemacht hatte; dafs folglich der zweite Differenzial-Quotient $\frac{\partial p}{\partial x}$ eben so als der erste eine Function von x u. s. f. seyn könne. Und so scheint in der That auf eine sehr einfache Art der Algorithmus der Differenzialrechnung nach seinem ganzen Umfang gerechtfertigt werden zu können, ohne dafs man nöthig habe, den zweideutigen Begriff des Unendlichkleinen zu Hülfe zu nehmen.

Wir wollen diese Vorstellungsart etwas genauer zergliedern, weil die Schwierigkeiten, auf welche diese Analyse führt, gröfstentheils die nämlichen sind, die sich bei jeder andern Vorstellungsart finden.

12. Erstlich. Da die strenge Richtigkeit der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ schlechterdings voraussetzt, dafs der strengste Sinn $\partial x = o$ sey; woraus eben so nothwendig folgt, dafs auch $\partial y = o$

sey, so nöthigt die obige Darstellung zwar einzuräumen, daſs der Quotient $\frac{0}{0}$ jede Gröſse vorstellen könne; aber über die innere Möglichkeit, daſs zwei strenge Nullen ein bestimmtes Verhältniſs haben können, giebt weder diese, noch irgend eine andere mir bekannte Vorstellungsart einen befriedigenden Aufschluſs.

13. Zweitens. Nimmt man die erste Schwierigkeit für beseitigt an, so zeigt zwar diese Vorstellungsart sehr befriedigend, daſs man den Werth des ersten Differenzial - Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ einer zweiten Differenzial - Operation unterwerfen könne, und beweiset auf diese Art im allgemeinen die Möglichkeit höherer Differenzial-Ausdrücke, aber sie giebt durchaus keinen befriedigenden Aufschluſs darüber, wie man berechtigt sey, jedes einzelne Differenzialzeichen als eine veränderliche Gröſse, oder auch das eine als eine veränderliche, und das andere als eine beständige Gröſse anzusehen und zu behandeln: denn das thut man offenbar, indem man sich erlaubt statt $\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ z. B. zu schreiben $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Und so führt die Idee der Gränzverhältnisse gerade auf dieselbe Schwierigkeit, als die unverhüllte Idee unendlichkleiner Gröſsen: dagegen hat die letzte den wichtigen Vorzug, daſs aus ihr der Algorithmus der höhern Analysis auf eine viel einfachere Art abgeleitet werden kann.

14. Drittens. Wenn der Algorithmus in

strenger Allgemeinheit erwiesen werden soll, so setzt die Theorie der Gränzverhältnisse den Satz voraus, daſs jede Function in eine Reihe verwandelt werden könne, deren Glieder nach Potenzen irgend einer in der Function enthaltenen Gröſse fortschreiten. Es fragt sich also, auf welche Art man vor der höhern Analysis zur Überzeugung von der allgemeinen Richtigkeit dieses Satzes gelangen könne? Mir scheint kein anderer Weg offen zu seyn, als der einer vollständigen Induction. Diese hat bei algebraischen Functionen keine Schwierigkeit. Was aber die transcendentischen betrifft, so scheint die Sache mehr Schwierigkeit zu haben. Zuerst ist es wohl nicht möglich vor der Integral-Rechnung auch nur den Begriff transcendentischer Verhältnisse in völliger Allgemeinheit aufzufassen. Doch würde diſs auch nicht unumgänglich nothwendig seyn: wofern sich nur der Beweis für diejenigen transcendentischen Verhältnisse, welche schon die gemeine Analysis kennt, ohne Schwierigkeit geben läſst. Allein hier scheint mir, ich gestehe es, eine unüberwindliche Schwierigkeit zu liegen. Mir ist keine Art bekannt exponentielle oder logarithmische Functionen in Reihen zu verwandeln, wobei man der Betrachtung unendlichkleiner Gröſsen aus dem Wege gehen könnte. Was die trigonometrischen Functionen betrifft, so haben sich einige Analysten eines Vortrages bedient, wobei sie der Schwierigkeit zu entgehen scheinen. Sie nehmen die beiden bekannten Reihen, welche den Sinus und Cosinus durch den Bogen ausdrücken, als gegeben oder als willkührlich gebildete Reihen an; untersuchen die Eigenschaften derselben, und suchen dann aus diesen zu beweisen, daſs die eine der Sinus, die andere der Cosinus eines Bogens sey. Allein ich zweifle, daſs sich dieser letzte Beweis in erforderlicher Strenge führen lasse. Zwar läſst sich leicht beweisen, daſs beide Reihen, wenn man jede zum Quadrat erhebt und sie dann addirt, nothwendig die Summe 1 geben, woraus strenge folgt, daſs, wenn man die eine als den Ausdruck eines Sinus betrachtet, die andere den Cosinus ebendesselben Bogens vorstelle: auch muſs man einräumen, daſs dieser Bogen irgend eine Function der veränderliche Gröſse x sey, nach deren Potenzen beide Reihen geordnet sind: daſs aber diese Function nichts anders sey, als diese veränderliche Gröſse x selbst, diſs strenge zu erweisen, dürfte, wie ich glaube, sehr schwierig seyn.

15. Viertens. Es giebt eine groſse Menge von Aufgaben, wo man einen Differenzialausdruck sucht, nicht durch Differenzirung einer gegebenen endlichen Function, sondern durch unmittelbare Betrachtung eines gegebenen Verhältnisses gewisser Gröſsen, oder einer geometrischen Figur. Von dieser Art sind fast alle Anwendungen der höhern Analysis auf die höhere Geometrie und Mechanik. Es scheint mir

sogar, als müsse man die **Methode, einen Differenzial-Ausdruck** *unmittelbar* **zu finden**, in gewisser Rücksicht für das Eigenthümlichste der höhern Analysis ansehen, indem sie auf diesem Wege Aufgaben auflösen kann, die man durch andere Mittel entweder gar nicht, oder nur mit großen Umschweifen würde auflösen können. Denn wenn jeder Ausdruck, der integrirt werden soll, auf keinem anderen Wege, als dem der Differenzirung einer endlichen Function, gefunden werden könnte, so liefe der wichtigste Theil dieser erhabnen Wissenschaft, wie mich dünkt, auf nichts, als auf ein sinnreiches Spielwerk des Scharfsinns hinaus: denn das hieße nichts anders, als einen Weg AB mit großer Kunst von A nach B zurücklegen, bloß zu dem Zweck, um eben so künstlich wieder von B nach A zurück zu kommen, also am Ende nichts weiter zu finden, als das, wovon man ausging. Kann man hingegen auf irgend einen Weg unmittelbar nach B kommen, ohne durch A zu gehen, so begreift man, daß man oft durch den Rückweg von B nach A Wahrheiten entdecken könne, zu welchen kein anderer Zugang offen seyn möchte. So viel ist wenigstens unstreitig, daß die unmittelbare Aufsuchung von Differenzial-Ausdrücken eine Sache von der größten Wichtigkeit sey, und ich begreife nicht, wie man bei dieser Arbeit der Betrachtung unendlichkleiner Größen entgehen könne. Versucht man es, so sieht man sich genöthigt zu den lästigen Weitschweifigkeiten der Exhaustionsmethode seine Zuflucht zu nehmen, gegen welche ich meine Bedenklichkeiten schon oben vorgetragen habe.

16. Ich muſs hier noch eines Versuches erwähnen, die Schwierigkeiten der Differenzial-Rechnung zu heben. Der in Königsberg verstorbne Johann Schulz liefert in seiner Entwickelung einiger mathematischen Theorien (Königsberg 1803. Seite 179.), eine Abhandlung: Über das Fundament der Differenzial-Rechnung. Ich muſs gestehen, es scheint mir, als wäre Niemand dem deutlichen Begriff eines Differenzials näher gekommen, als er. Er zeigt sehr befriedigend, das Differenzial sey nichts, als die Gränze einer veränderlichen Gröſse, oder ihrer Function, und daher im strengsten Sinn = 0. Aber er macht es durchaus nicht anschaulich, daſs und in welchem Sinn man eben diese Null auch als eine wirkliche Gröſse betrachten könne und müsse. Er betrachtet die Differenziale als absolute Nullen, und sieht den Algorithmus der Differenzial-Rechnung nicht als ein nothwendiges Erzeugniſs der Vernunft an, sondern nennt sie eine heuristische Fiction. Er betrachtet also im Grunde die Differenzialzeichen als leere und an sich bedeutungslose Formen, mit denen man aber nach gewissen sinnreich erdachten Gesetzen eine richtige Rechnung führen könne. Eine Vorstellungsart, deren vollständiger Beweis, wo-

fern er möglich ist, nur durch sehr tiefe metaphysische Erörterungen gegeben werden könnte.

17. Wegen dieser Unzulänglichkeit aller Versuche, den Begriff des Differenzials aufzuklären, scheinen mehrere der gröſsten Analysten geneigt, den ganzen Begriff als völlig unhaltbar aufzugeben. Hieraus sind verschiedene höchst sinnreiche Versuche entstanden denselben entbehrlich zu machen. Der scharfsinnigste und am vollständigsten ausgeführte Versuch ist unstreitig der, welchen der ehrwürdige *La Grange* in seiner Theorie der analytischen Functionen geliefert hat: Doch ist nicht minder sinnreich die Art, wie Pasquich, Grüson und neuerlich auch Langsdorf eben diesen Zweck zu erreichen suchen. So verschieden übrigens diese Theorien sind, so lassen sie sich doch unter einen allgemeinen Gesichtspunkt bringen. Nimmt man nämlich von irgend einer Function fortschreitend das erste, zweite, dritte Differenzial u. s. f. so weiſs man 1) daſs jedes Differenzial bestehe aus einer bestimmten Function, die man den Differenzial-Coefficienten nennt, multiplicirt in ein Differenzialzeichen, 2) daſs jeder folgende Differenzial-Coefficient von dem vorhergehenden, so wie der erste von der ursprünglichen Function, nach einem und demselben Gesetz abhängig sey.

Da nun jeder dieser Coefficienten im Allgemeinen betrachtet, eine bestimmte endliche Function ist, so muſs es auch einen endlichen

Weg durch lauter analytische Elementar-Operationen geben, zu jedem Coefficienten den nächstfolgenden, oder umgekehrt aus diesem den vorhergehenden zu finden. Jenes muſs offenbar ein vollständiges Surrogat für die Differenzial-Rechnung, dieses für die Integral-Rechnung geben; und so scheinen in der That Theorien möglich zu seyn, bei welchen man dem zweideutigen Begriff eines Differenzials gänzlich ausweichen könne. Allein geht man aus diesen Theorien heraus, einerseits in die entfernteren Sätze, auf welchen sie in ihrem ersten Ursprunge beruhen, anderseits auf diejenigen Fälle ihrer Anwendung, wo ein Differenzial-Ausdruck unmittelbar gesucht wird, so stöſst man auf dieselben Schwierigkeiten, von welchen wir schon oben §. 14. und §. 15. geredet haben.

18. Das Resultat aus allem bisherigen dürfte folgendes seyn. Der Begriff des Unendlichen und seine besondere Bestimmung als Differenzial ist keine willkührliche Erfindung, die man beliebig annehmen oder verwerfen könnte. Er muſs vielmehr nothwendig aus dem Wesen unserer Vorstellung entspringen, weil wir ihm nicht ausweichen können: man muſs ihn daher aufzuklären suchen. Aber es liegt auf demselben eine gewisse noch nicht aufgeklärte Undeutlichkeit, vermöge deren er einen Widerspruch in sich zu enthalten scheint; indem man durch gleich stark bindende Gründe gezwungen ist, das Differenzial einmal im strengsten Sinne = 0

zu setzen, und doch auch wieder auf der andern Seite als eine wirkliche Gröſse zu behandeln. Ob mein Versuch, diesen schwierigen Gegenstand aufzuklären, die Prüfung einer strengen Kritik aushalten werde, muſs ich dem Urtheil einsichtsvoller Leser überlassen, doch hoffe ich, daſs man bemerken werde, der Versuch sey nicht entsprungen aus einem zufälligen Einfall, sondern aus dem sorgfältigen Bestreben über das Wesen unseres Vorstellungsvermögens selbst, wo möglich, zu deutlichen Begriffen zu gelangen.

III.

Versuch den Begriff des Differenzials völlig aufzuklären.

19. Die Logiker sind einverstanden, daſs der analytische Gang der eigentliche und ursprüngliche aller Untersuchung sey: denn Synthesis setzt allezeit Vollendung der Untersuchung und Übersicht des Ganzen voraus *). Ich glaube daher, daſs es überall von Nutzen sey, neue Ansichten wissenschaftlicher Gegenstände zuerst analytisch vorzutragen. Selbst Newtons groſse Ent-

*) Es wird kaum nöthig seyn zu bemerken, daſs hier nicht von mathematischer, sondern von logischer Analysis und Synthesis die Rede ist. Die Analysis betrachtet ihren Gegenstand zuerst in einzelnen Fällen und steigt von da allmählig zu allgemeinen Ansichten empor. Die Synthesis hingegen hebt umgekehrt mit allgemeinen Begriffen und Ansichten an, und steigt von da allmählig zur Anwendung auf einzelne Fälle herab.

Entdeckungen würden früher gefaſst, und ihre Richtigkeit allgemeiner anerkannt worden seyn, wenn er vor dem streng synthetischen Vortrag, in seinen Principiis, wenigstens einige seiner mechanischen Untersuchungen, in ihrer ursprünglich analytischen Gestalt dem Publikum mitgetheilt hätte. Aus dieser Ursache werde ich hier den analytischen Gang vorziehen. Ist meine Ansicht die richtige, so wird der synthetische Vortrag in der Folge nicht die geringste Schwierigkeit haben.

20. Seitdem ich den Begriff des Differenzials für nothwendig und unausweichlich halte, habe ich geglaubt, nicht sicherer ihn zur vollendeten Deutlichkeit bringen zu können, als wenn ich ihn zuerst in geometrischen Constructionen betrachtete und ihn dann erst ganz allgemein auf alle Arten von Gröſsen anzuwenden versuchte; weil die räumliche Gröſse die einzige unmittelbar anschauliche in dem ganzen Umfang unsers Vorstellungsvermögens ist. Ist übrigens die geometrische Methode, wie wohl Niemand bezweifeln wird, von eben so allgemeinem Umfang, als die arithmetische, so ist nicht zu besorgen, daſs man auf diesem Wege einen zu eingeschränkten Begriff finden werde, wenn man nur zuletzt alles, was aus dem Wesen des Räumlichen entspringt, gehörig absondert. Wir wollen daher hier einen solchen Gang der Untersuchung befolgen, daſs wir zuerst einige sehr einfache Functionen, die sich leicht geometrisch construiren lassen, nebst ihren Differenzialen, in

Betrachtung ziehen; und versuchen wollen, ob wir nicht in der Construction, klar und bestimmt, dasjenige auffinden können, was durch die Differenziale vorgestellt wird. Gelingt uns diſs, so wollen wir den so gefundenen Begriff allgemein zu machen und auf alle Arten von Gröſsen anzuwenden suchen.

21. Man betrachte ein Produkt von drei veränderlichen Gröſsen vxz nebst dessen Differenzial $xz\partial v + vz\partial x + vx\partial z$. Ein solches Produkt kann am einfachsten construirt werden durch ein Parallelepipedum von drei veränderlichen Dimensionen. Die Entstehung eines solchen Parallelepipedi kann man sich auf folgende Art vorstellen. In dem Punkt A. Fig. 1. denke man sich drei Linien AB, AC, AD senkrecht aufeinander, und zwischen den Schenkeln der rechten Winkel BAC, BAD, CAD unbegränzte Ebenen. Man denke sich ferner drei bewegliche Flächen, von denen die eine, von der Ebene DAC an, aufwärts sich parallel fortbewege bis in die Lage BH, und der zurückgelegte Weg AB sey $= v$: Die zweite Ebene rücke aus der Lage BAD gegen die rechte Seite fort bis in die Lage CH, und es sey AC $= x$. Die dritte Ebene endlich rücke von vorne nach hinten aus der Lage BAC bis in die Lage DH, und es sey AD $= z$: so ist das ganze Parallelepipedum AH $= vxz$: die drei Endflächen aber BH+OH,+DH, durch welche das Parallelepipedum beliebig begränzt worden, sind =

$xz+vz+vx$. Die erste von diesen Endflächen $BH = xz$ bezieht sich auf die veränderliche Gröſse $AB = v$: denn sie ist dadurch entstanden, daſs eine Ebene aus der Lage DC in die Lage GF, um die veränderliche Entfernung $AB = v$ fortgerückt ist, und sie ist von dem ersten Gliede unsers obigen Differenzials nur darin verschieden, daſs hier ∂v fehlt: die zweite Endfläche $CH = vz$ bezieht sich auf die veränderliche Gröſse $AC = x$, und ist von dem zweiten Glied des Differenzials bloſs darin verschieden, daſs hier ∂x fehlt: eben so bezieht sich die dritte Endfläche $DH = vx$ auf die veränderliche Linie $AD = z$, und ist von dem dritten Stück des Differenzials nur darin verschieden, daſs hier ∂z fehlt. Das ganze Differenzial von vxz scheint also in der That nichts anders vorzustellen, als die drei Endflächen BH, CH, DH; doch mit einer eigenen Nebenbestimmung, welche durch die beigefügten Differenzialzeichen angedeutet wird. Es scheint mir nicht schwierig, diese Nebenbestimmung aufzufinden. Zwischen einem Körper und einer Fläche kann gar keine Vergleichung, folglich auch kein Übergang von dem einen zum andern gemacht werden, wofern man nicht beide unter einen gemeinschaftlichen Begriff subsummiren kann. Diſs hat auch keine Schwierigkeit: denn man kann eine Fläche jederzeit vorstellen, als einen Körper, in welchem einer seiner Dimensionen bis auf Null abgenommen hat. Eine Fläche für sich betrachtet kann jederzeit als ein Produkt von zwei Dimensionen angesehen werden; soll sie aber als ein Körper mit einer verschwundenen Dimension symbolisch bezeichnet werden, so muſs ein dritter Factor hinzukommen, welcher mir andeutet, daſs eine Dimension verschwunden sey, und welche? mit einem Wort, es muſs ein Differenzialzeichen hinzukommen, denn dieses deutet mir beides an. Nach dieser Ansicht der Sache stellt also das Differenzial $xz\partial v+vz\partial x+vx\partial z$ nichts anders vor, als die Summe der Endflächen $BH+CH+DH$, nur nicht als bloſse Flächen, sondern als Körper mit einer verschwundenen Dimension vorgestellt.

22. In der That kann auch der Sinn des Differenzials gar kein anderer seyn, als der hier angegebene. Diſs scheint mir völlig evident zu werden, wenn man auf die Grundregeln zurückgeht, nach welchen die Differenzial-Ausdrücke gebildet werden. Das Differenzial von vxz findet man nach diesen Grundregeln bekanntlich auf folgende Art: Man schreibt $v+\Delta v$ statt v; $x+\Delta x$ statt x, $z+\Delta z$ statt z, wo Δv, Δx, Δz Stücke von beliebiger Gröſse sind. Sollte diſs in der Figur vorgestellt werden, so müſste man jede der drei Linien AB, AC, AD um ein Stück von beliebiger Gröſse verlängern, und durch die Endpunkte derselben drei neue Flächen, parallel mit den schon vorhandenen Endflächen, legen, wodurch der Körper auf drei Seiten vergröſsert erscheinen würde. Dieses ver-

größserte Parallelepipedum würde gleich seyn $(v+\Delta v)\,(x+\Delta x)\,(z+\Delta z)$. Entwickelt man diese Formel, so erhält man

$$\begin{aligned}&vxz\\&+xz\Delta v+vz\Delta x+vx\Delta z\\&+z\Delta v\Delta x+x\Delta v\Delta z+v\Delta x\Delta z\\&+\Delta v\Delta x\Delta z.\end{aligned}$$

Da die Zeichen Δv, Δx, Δz Linien von beliebiger Länge anzeigen, so stellt jedes einzelne Glied dieser Formel, weil es lauter Produkte von drei Faktoren sind, einen Körper vor, wovon man sich durch genauere Betrachtung aller einzelnen Theile mit Rücksicht auf die Figur leicht überzeugen kann. Das erste Glied vxz ist das unvergrößserte Parallelepipedum selbst: läßt man dieses weg, so stellt das Aggregat der übrigen Glieder die Zusätze vor, welche der Körper über seinen drei Endflächen erhalten hat. Man lasse nun die drei Linien Δv, Δx, Δz bis auf Null abnehmen, und setze in diesem Sinn dafür ∂v, ∂x, ∂z, so stellen die drei Glieder der zweiten Reihe drei Körper mit *einer* verschwundnen Dimension vor, das heißt drei Flächen, nämlich unsere oben betrachteten Endflächen. Die Glieder der dritten Reihe stellen vor drei Körper mit *zwei* verschwundenen Dimensionen, das heißt drei bloße Linien; und das Glied in der vierten Zeile stellt einen Körper von *drei* verschwundnen Dimensionen vor, das heißt einen bloßen Punkt. Da nun ein Punkt gegen eine Linie, und eine Linie gegen eine Fläche im strengsten Sinne = o ist, so ist klar, daſs wenn man auch die dritte und vierte Zeile wegläſst, die übrigbleibende zweite Zeile nichts anders sey, und seyn könne, als ein streng richtiger Ausdruck für die drei Endflächen unsers Parallelepipedi. Und so scheint aus dieser Betrachtung, wie mich dünkt, ziemlich evident hervorzugehen, daſs die eigentliche Fundamental - Operation der Differenzial - Rechnung wohl auf nichts anders führe und führen könne, als auf einen eigenen, aber streng richtigen Ausdruck für die Endgränze einer Function.

23. In dem besondern Fall, von welchem wir hier reden, könnte man das Differenzial auch für einen Ausdruck der drei Anfangs-Gränzen unsers Körpers, AE + AG + AF, halten: allein schon aus dem, was im vorigen §. gesagt worden, ergiebt sich, daſs das Differenzial nur ein Ausdruck der Endgränzen sey. Denn wenn man in der vollständigen Entwickelung der Formel $(v+\Delta v)\ (x+\Delta x)\ (z+\Delta z)$ bloſs das erste Glied vxz wegläſst, so ist das Aggregat der übrigen Glieder der vollständige Ausdruck nicht für die Anfangstheile, sondern für die Endtheile des Körpers: läſst man also in diesen, Δv, Δx, Δz, verschwinden, so kann das Übrigbleibende kein Ausdruck für die Anfangsgränzen, sondern nur für die Endgränzen seyn. Zum Überfluſs kann man sich noch durch eine geometrische Betrachtung hier-

von überzeugen. Der Körper ACDEBIKL, Fig. 1., stelle eine abgekürzte vierseitige Pyramide vor; die Grundfläche derselben AE sey jetzt von beständiger Gröſse, und $= b$, die Höhe AM der ganzen unverkürzten Pyramide ACDEM sey auch von beständiger Gröſse und $= a$: Die Höhe AB der abgekürzten Pyramide sey veränderlich und $= x$; so wird die Höhe BM der abgeschnittenen Pyramide BMIKL $= a-x$ seyn, und nach bekannten Lehrsätzen der Stereometrie wird sich die untere Grundfläche AE zur obern BK verhalten, wie $a^2 : (a-x)^2$ folglich wird BK gleich seyn $\frac{(a-x)^2 b}{a^2}$ welches ein Ausdruck für BK, als bloſse für sich bestehende Fläche betrachtet, seyn würde. Betrachtet man aber BK als Endgränze eines Körpers d. i. als einen Körper, dessen Höhe verschwunden ist, so muſs man den Ausdruck noch mit dem Zeichen der verschwundnen Höhe, d. i. mit dem Differenzialzeihen ∂x, multipliciren. Auf diese Art erhält man denselben Ausdruk $\frac{(a-x)^2 b}{a^2} \partial x$, welchen die Regeln der gemeinen Differenzial-Rechnung geben. Denn es ist die Pyramide MAE $= \frac{1}{3} a b$ und die abgeschnittene MBK $= \frac{1}{3} b \frac{(a-x)^3}{a^2}$; also die abgekürzte Pyramide AK $= \frac{1}{3} a b - \frac{1}{3} b \frac{(a-x)^3}{a^2}$, wovon das Differenzial die eben für die Endgränze BK gefundene Formel $\frac{(a-x)^2 b}{a^2} \partial x$ ist. Dagegen würde der Ausdruck für die Anfangsgränze $AE = b\partial x$ seyn.

24. Schon diese Betrachtungen zeigen, dafs es gar wohl möglich sey, sich wenigstens in einer geometrischen Construction bei jedem Differenzial-Ausdruck etwas bestimmtes, deutliches und sogar anschauliches zu denken. Auch zeigen sie, dafs es so widersprechend nicht sey, als es auf den ersten Blick scheint, ein und dasselbe Ding einmal im strengsten Sinn $= 0$ zu setzen, und dann wieder als eine wirkliche Gröfse zu betrachten: denn die drei veränderlichen Endgränzen unsers Parallelepipedi sind, gegen den Körper verglichen, im strengsten Sinn nichts: aber an sich betrachtet ist ihr Aggregat eine völlig bestimmte Gröfse, und zwar in unserm Fall eine Function von v, x, und z. Es ist daher klar, dafs man ferner nach einem Differenzial von diesem Differenzial fragen könne. Denn wenn AD Fig. 2. eine von den Endgränzen unsers Körpers etwa GF (Fig. 1.) also $AC = z$ und $AB = x$ wäre, so ist die Fläche AD für sich betrachtet $= xz$; und sie ist entstanden dadurch, dafs AB in die Lage CD, AC in die Lage BD fortgerückt ist, folglich ist $CD + BD$ ihre Endgränze, und diese als blofse Linie betrachtet ist $= x + z$: betrachtet man aber CD, als eine Länge x, deren Breite z verschwunden ist, so mufs man sie durch $x\partial z$

und aus ähnlichen Gründen BD durch $z\partial x$, also die ganze Endgränze $= x\partial z + z\partial x$ setzen, wie es die Regeln der Differenzial-Rechnung geben. Auf eben die Art kann man ferner nach einem Differenzial dieser Endgränzen fragen, und wenn AB. Fig. 3. eine der veränderlichen Seiten des vorigen Parallelogramms $= x$ vorstellt, so muſs man sich diese Linie entstanden denken dadurch, daſs ein beweglicher Punkt C von A aus bis B fortgerückt ist. Die Endgränze dieser Linie ist dann der Punkt B selbst; dieser für sich betrachtet ist $= 0$, als Endgränze der Linie x aber muſs er durch ∂x vorgestellt werden. Nun scheint es zwar, daſs man mit den Differenzial-Operationen am Ende sey, und daſs man nach einem ferneren Differenzial dieses Punktes nicht fragen könne; doch siehet man leicht ein, daſs der Grund davon nicht in dem allgemeinen Begriff einer Endgränze, sondern in dem besondern Wesen räumlicher Gröſsen liege.

Es zeigen ferner die angestellten Betrachtungen durch Induction eines wirklichen Falls, daſs es nicht widersprechend sey, eine ganze Reihe von Gröſsen, A (Körper), B (Fläche), C (Linie), D (Punkt) zu denken, welche in solcher Beziehung auf einander stehen, daſs jede folgende gegen die vorhergehende schlechthin verschwindet, oder unendlich klein, und daher umgekehrt jede vorhergehende gegen die folgende unendlich groſs ist. Es ist daher auch nicht widersprechend zu sagen, D sey gegen C ein Unendlichkleines der ersten, gegen B der zweiten, und gegen A der dritten Ordnung u. dgl. m. Und wenn gleich auch hier die Reihe von beiden Seiten abbricht, so liegt doch der Grund davon sichtbar in dem Wesen des Raums, nicht in dem allgemeinen Begriff einer Gröſse.

25. Indessen lassen alle diese Betrachtungen immer noch ein Paar Hauptpunkte im Dunkeln. Denn erstlich bleibt noch immer der Verdacht, als sey alles gesagte nur eine Eigenthümlichkeit des Raums, nicht eine allgemeine Eigenschaft aller Functionen. Doch wird der aufmerksame Leser in den Schlüssen des 22sten §. nichts finden, was nicht auf alle Arten von Gröſsen anwendbar wäre: aber es wird zweckmäſsig seyn, die vollständige Erörterung dieser Frage bis zu dem Ende dieses Abschnitts zu versparen. Eine zweite Dunkelheit rührt aber daher, daſs diejenige Gröſse des Differenzials, welche wir bisher in einer geometrischen Construction betrachtet haben, genau erwogen nur die Gröſse des Differenzial-Coefficienten ist; wir haben aber im vorigen Abschnitt gesehen, daſs der Algorithmus der Differenzial-Rechnung selbst jedes einzelne Differenzial-Zeichen ∂v, ∂x, ∂z als eine wirkliche veränderliche oder beständige Gröſse behandle. Diſs scheint nicht nur ohne Sinn, sondern sogar widersprechend: denn das Differenzial-Zeichen

ist offenbar ein Stellvertreter für Null, und scheint sich von dem gewöhnlichen Zeichen der Null, bloſs durch mehrere Bestimmtheit zu unterscheiden, indem es zugleich andeutet, welche der veränderlichen Gröſsen Null geworden sey, und ob wir gleich gesehen haben, daſs ein und dasselbe Ding in gewisser Beziehung im strengsten Sinn Null, in anderer Beziehung aber eine wirkliche Gröſse seyn könne, so scheint diſs doch auf die einzelnen Differenzial-Zeichen gar nicht anwendbar zu seyn: denn in unsrer Construction waren v, x, z Längen, folglich sind ∂v, ∂x, ∂z Punkte, und diese noch als wirkliche Gröſsen anzusehen, scheint geradezu widersprechend. Doch glaube ich, daſs auch dieser dunkle Punkt sich ganz befriedigend aufklären lasse. Aber die Sache liegt etwas tiefer als das vorhergehende; daher wird es nöthig seyn, erst einige anderweitige Betrachtungen vorauszuschicken, die zwar mehr von metaphysischer als mathematischer Art sind, welches indessen der Sicherheit unserer Theorie keinen Eintrag thun wird, weil hier die Metaphysik auf festem Grund und Boden seyn möchte. Eigentlich ist es auch nur der gewählte analytische Vortrag, und die Nothwendigkeit, gewisse sehr einfache Begriffe zur vollendeten Deutlichkeit zu bringen, was diese Betrachtungen nöthig macht. Bei einem künftigen synthetischen Vortrag möchte davon nicht mehr übrig bleiben, als etwa bei dem Vortrag der Geometrie nöthig ist, um den Begriff des Raums zur Deutlichkeit zu bringen.

26. Ich erinnere mich, öfters gehört und gelesen, und ehemals selbst geurtheilt zu haben, daſs es uns an einer Mathematik des Intensiven fehle. Gegenwärtig halte ich dieses Urtheil für ungegründet. Das Intensive ist an und für sich nicht anschaulich, kann also nicht, wie das Extensive unmittelbar, sondern nur mittelbar durch willkührliche Symbole construirt werden; es ist folglich ein Gegenstand der allgemeinen Mathematik *), diese aber erstreckt sich auf alle intensiven Gröſsen ebensowohl, als auf die extensiven. Was uns in Ansehung der intensiven Gröſsen fehlt, ist mehr der Maſsstab zu gewissen Arten derselben, als die Methode ihrer Behandlung (denn diese ist vollständig in der allgemeinen Mathematik enthalten). Für einige Arten haben wir auch diesen. Z. B. für Masse, specifisches Gewicht, bewegende oder beschleunigende Kraft etc., und dann fehlt uns zu ihrer mathematischen Behandlung nichts; bei andern, z. B. der Wärme, der Lichtstärke etc. sind wir nahe dabei, ein Maſs zu finden, und sobald wir es vollständig haben werden, wird ihre Theorie keine Schwierigkeit haben; ob wir

---

*) So nenne ich den ganzen arithmetischen Theil der Mathematik. Man sehe die zweite Abhandlung S. 76 — 81, wo auch der Begriff einer Construction allgemein erklärt ist.

je ein Maſs für Geisteskräfte finden werden, läſst sich nicht sagen; aber fänden wir es, so würden sie sich, eben so wie andere intensive Gröſsen, dem Calcul unterwerfen.

27. Auſser dem Maſs, das uns bei vielen intensiven Gröſsen fehlt, vermisse ich aber auch noch im allgemeinen eine deutliche Kenntniſs der reinen Denkform, die der Vorstellung jeder empirischen intensiven Gröſse zum Grunde liegt. Denn so wie bei jeder Vorstellung einer empirischen extensiven Gröſse die reine Denkform des Raums, d. h., der rein geometrische Begriff der Ausdehnung, zum Grunde liegt, ohne welchen gar keine empirische Ausdehnung gedacht werden kann: eben so muſs jeder Vorstellung einer empirischen intensiven Gröſse eine reine Denkform, d. h., ein rein mathematischer und von allen empirischen entkleideter Begriff des Intensiven zum Grunde liegen. Mir ist nicht bekannt, daſs irgend ein Philosoph oder Mathematiker versucht hätte, diesen Begriff deutlich zu entwickeln; aber täusche ich mich nicht, so liegt gerade hierin die Quelle aller bisherigen Miſsverständnisse, in Ansehung der höhern Analysis. Aber auf welchem Wege sollen wir die reine Denkform des Intensiven aufsuchen? Auf keinem andern, als auf dem man allein die reine Denkform des Extensiven zum deutlichen Bewuſstseyn bringen kann. Man wird z. B. (um mich einer sehr passenden Erläuterung zu bedienen, die Karsten in seinen Anfangsgrün-

den B. I. S. 347 giebt) dem, in dessen Kopf sich der letzte Begriff noch nicht deutlich abgesondert hätte, sagen: er solle sich einen beliebigen Körper von ganz bestimmter Gröfse, Gestalt und Materie, etwa einen Cubikzoll von Holz, deutlich vorstellen; er solle diesen Körper in Gedanken in eine andere Materie (etwa Wachs) einschliefsen, dann solle er den hölzernen Körper im Gedanken vernichten, so werde ein leerer Raum von der Gestalt und Gröfse des vernichteten Körpers übrig bleiben, und diese Vorstellung ganz allgemein und unbegränzt genommen, sey die reine Denkform des Extensiven. Auf eben die Art betrachte man irgend eine beliebige empirische intensive Gröfse, suche ihren Begriff aufs schärfste zu fassen, lasse dann alles empirische hinweg, und überlege, was dann in der Vorstellung noch übrig bleibt. Wir wollen auf diesem Weg die Absonderung des reinen Begriffs versuchen.

28. Man stelle sich eine körperliche prismatische Röhre vor, von beliebiger Länge, von einem Quadrat-Zoll Durchschnitt, und an dem einen Ende verschlossen. Drei Cubik-Zoll derselben mögen mit Luft von einer beliebigen Dichtigkeit gefüllt, und mit einem beweglichen Stempel gesperrt seyn. Da Dichtigkeit eine intensive Gröfse ist, so überlege man, um den Begriff derselben aufs schärfste aufzufassen, auf welche Art sie vermindert oder vermehrt werden könne. Das erste geschieht, wenn sich

die in der Röhre befindlichen 3 Cubik-Zoll Luft gleichförmig in einen gröfsern Raum, z. B. von 6 Cubik-Zoll, verbreiten. Das letzte geschieht, wenn eben diese 3 Cubik-Zoll in einen kleinern Raum zusammengedrängt werden. Nehmen wir bestimmt an, sie würden in den Raum eines einzigen Cubik-Zolls zusammengeprefst, so ist die intensive Gröfse der Dichtigkeit drei geworden, wenn man die anfängliche eins setzt. Warum das? Offenbar aus keinem andern Grunde, als weil die drei Cubik-Zoll Luft, welche vorher *neben* einander vorgestellt wurden, jetzt *in* einander gedacht werden. Nun lasse man die empirischen Vorstellungen von Luft, Dichtigkeit, Pressung hinweg, und behalte blofs die reine Operation des Verstandes oder der Einbildungskraft übrig, so wird man finden: die reine Denkform des Intensiven bestehe blofs darin, dafs etwas Gleichartiges, was vorher im Raum *neben* einander war, jetzt *in* einander gedacht wird. Soll aber dieser Begriff ganz rein seyn, so mufs das Gleichartige nichts empirisches seyn. Was kann also dieses Gleichartige im reinen Begriff seyn? Offenbar nichts, als der Raum selbst, denn dieser ist die einzige ganz reine und völlig gleichartige Gröfse, von der wir eine anschauliche Vorstellung haben. Es scheint mir hieraus ganz unzweideutig zu folgen, dafs die Congruenz völlig gleicher räumlicher Gröfsen in einem und demselben Raume, der wahre

Urbegriff oder die reine Denkform des Intensiven sey. In dieser Vorstellung liegt gar nichts mystisches oder widersprechendes, denn die ersten Grundsätze der Geometrie berechtigen mich, jeden Punkt, jede Linie, jede Fläche, jeden Raum, aus so viel congruirenden Punkten, Linien, Flächen, Räumen bestehend, als ich will, mir vorzustellen, d. h., ihnen jede beliebige intensive Gröfse beizulegen. Wenn ich also zwei geometrische Cubik-Zolle vor mir habe, so mufs es mir jederzeit verstattet seyn, anzunehmen, dafs der eine z. B. aus drei, der andere aus zwei congruirenden Cubik-Zollen entstanden sey. Hierdurch gewinnt nun zwar keiner von beiden das allergeringste an extensiver Gröfse, und ist daher in dieser Rücksicht einer dem andern völlig gleich: aber die Vorstellung von drei Cubikzollen, die ich in dem ersten vereinigt habe, bleibt doch *für meinen Verstand* immer etwas anders, als die zwei Cubik-Zolle, die in dem letzten vereint sind. Jene drei, und diese zwei Cubikzolle waren vorher im Raume neben einander; jetzt denkt sie sich der Verstand in einander, d. h. nach der obigen Erklärung intensiver Gröfsen, der Verstand hat das extensive Verhältnifs 3 : 2 in ein intensives verwandelt.

29. Um allen Mifsverständnissen möglichst vorzubeugen, bemerke ich noch folgendes. Sollte jemand bei einer solchen durch Congruenz entstan-

standenen intensiven Gröſse eines Raumes, einer Fläche, einer Linie, eines Punktes, gleichsam an eine vermehrte Dichtigkeit des Räumlichen oder Extensiven denken, der würde den Sinn der Erklärung noch nicht scharf gefaſst haben; ja er würde, dünkt mich, zeigen, daſs er selbst den Begriff des geometrischen Raumes noch nicht ganz rein aufgefaſst habe. Der Raum ist nichts als die reine Vorstellung von Ausdehnung; er enthält nichts materielles und darf nichts enthalten, wie fein man sich es auch denken möchte: denn alles materielle ist empirisch. Hat man den Begriff rein gefaſst, so wird man leicht begreifen, daſs in dem Raum von drei Cubik-Zollen, selbst wenn sie neben einander sind, nicht mehr Materie enthalten sey, als in dem Raum eines einzigen; nämlich gar keine; und eben so verhält es sich, wenn man die drei Cubik-Zoll in einander denkt. Drei Cubik-Zolle neben einander enthalten nur mehr Vorstellung, nicht mehr Materie, als ein einzelner, aber eben so enthalten auch drei Cubik-Zolle in einander mehr Vorstellung, nicht mehr Materie, als ein einzelner. Der ganze Unterschied ist nur der, daſs das Nebeneinander anschaulich, das Ineinander bloſs denkbar ist. Daſs aber das Intensive überhaupt nichts anschauliches sey, darüber ist man, dünkt mich, wohl allgemein einverstanden.

30. Aus diesen Betrachtungen folgt, wie ich glaube, wenigstens soviel unzweideutig,

dafs es keinen Widerspruch enthalte, sondern vielmehr den Regeln des Denkens und den ersten Grundsätzen der Geometrie gemäfs sey, sich in irgend einem räumlichen Object eine intensive Gröfse zu denken. Liefse sich nun aus anderweitigen Betrachtungen zeigen, dafs man vermöge eines unstreitigen Grundsatzes genöthigt sey, unter gewissen Umständen zwei Punkten, zwei gleichen Linien, Flächen, oder Räumen, dennoch ein ungleiches Verhältnifs beizulegen, so würde man nicht berechtigt seyn, difs als einen Widerspruch anzusehen, sondern man könnte und müfste dieses Verhältnifs als ein intensives betrachten.

Darf man aber difs, so mufs man auch einräumen, dafs man jeden zwei Objecten, welche extensiv betrachtet gleich sind, im allgemeinen, jedes denkbare Verhältnifs intensiv beilegen könne, es sey rational oder irrational, beständig oder veränderlich. Denn eine zunehmende Intension wächst eben so stetig als eine zunehmende Extension. Und wo Stetigkeit in der Veränderung einer Gröfse ist, da finden alle erdenklichen Verhältnisse statt.

So lange man blofs mit beständigen Gröfsen, oder auch mit einer einzelnen veränderlichen Gröfse zu thun hat, kann, wie es mir scheint, die Nothwendigkeit intensive Verhältnisse zu setzen gar nicht eintreten. Betrachtet man hingegen einen Zusammenhang veränderlicher Gröfsen, so ist nichts gewöhnlicher, als daſs, z. B. zwei Linien zu gleicher Zeit verschwinden, also in Punkte übergehen. Diese Punkte, als solche betrachtet, sind unstreitig von einander in der Anschauung nicht verschieden; und wären sie durch das Verschwinden zweier gleichen Linien entstanden, so würde auch der Verstand keinen andern, als den örtlichen Unterschied zwischen ihnen finden können. Sind sie aber aus ungleichen Linien entstanden, so ist ihre Entstehungs-Art verschieden, und sie sind also in dieser Beziehung für den Verstand nicht mehr gleich. Findet nun z. B. bei zwei ungleichen Linien, die aber zu gleicher Zeit verschwinden, bei jeder Gröſse vor dem Verschwinden, und wenn sie nach dem Verschwinden in die entgegengesetzte Lage übergehen, auch bei jeder Gröſse nach dem Verschwinden ein unveränderliches Verhältniſs statt, so nöthigt der bloſse Begriff der Unveränderlichkeit, d. h. ein Grundgesetz des Denkens, nämlich das Gesetz der Stetigkeit, an dessen Richtigkeit wohl noch Niemand im Ernste gezweifelt hat *), beiden Linien selbst im Verschwinden, also als Punkten,

---

*) Ich kann mich nicht überreden, daſs Herrn Langsdorfs Zweifel gegen dieses Gesetz ernstlich gemeint sind. Einem so guten Kopfe hätte es nicht entgehen können, daſs er bei seiner Vorstellungsart, um ein Paar scheinbaren Widersprüchen zu entgehen, sich in eine Unendlichkeit wirklicher Widersprüche verwickle.

noch eben das Verhältnifs beizulegen, und dafs difs, vermöge des wohlverstandenen Begriffs von Intension ohne allen Widerspruch geschehen könne, ist, dünkt mich, nach dem vorhergehenden hinlänglich klar.

31. Die scharfe Begränzung eines reinen Verstandes-Begriffes, die vollständige Absonderung alles empirischen und fremdartigen, ist keine leichte Operation der Denkkraft. Sie macht selbst dem Geometer, der doch sonst an eine scharfe Begränzung seiner Begriffe gewöhnt ist, Schwierigkeit, sobald er gezwungen ist, in das Gebiet des Nichtanschaulichen, des blofs Denkbaren, überzugehen. Noch schwieriger ist sie für den, der sich ausschliefsend mit empirischen Gegenständen beschäftigt. Die scharfe Zergliederung des Innern unserer Vorstellungen erfodert angestrengte Aufmerksamkeit nach innen, und anhaltende Übung; so lange man diese nicht hat, und so lange ein Begriff nicht rein aufgefafst ist, sieht man Dunkelheiten und Schwierigkeiten, wo keine sind. Mag daher meine Ansicht noch so richtig und scharftreffend seyn, so erwarte ich dennoch, dafs sehr viele meiner Leser dieselbe nicht sogleich befriedigend finden werden. Ich halte es daher für nöthig mehrere bestimmte Beispiele zur Erläuterung hinzuzufügen, weil die wiederholte Anwendung eines noch nicht zur völligen Deutlichkeit gebrachten Begriffs das sicherste Hülfsmittel ist ihn aufzuklären.

32. Die Linien AB und AC Fig. 4. durch-

schneiden sich unter einem gegebenen Winkel CAB, den wir mit dem einzigen Buchstaben A bezeichnen wollen. In dem beliebigen Punkte B sey BC bis zum andern Schenkel senkrecht gestellt, so verhält sich AB:AC = 1 : Sec. A. Eine vierte bewegliche Linie bc rücke von A gegen BC parallel fort, so weiſs man aus der Elementar-Geometrie, daſs auch die Stücke bB und cC sich bei allen Lagen der Linie bc dennoch unveränderlich, wie AB : AC oder wie 1 : Sec. A verhalten. Diſs bleibt auch dann richtig, wenn die Linie bc über BC hinaus, z. B. in die Lage $\beta\gamma$ rückt. In dem Augenblick nun, wo die Linie BC von bc gedeckt wird, gehen die abgeschnittenen Stücke in die bloſsen Punkte B und C über, die, als bloſse Punkte oder extensiv betrachtet, einander gleich sind; aber sie sind durch das Verschwinden ungleicher Linien, von einem absolut beständigen Verhältniſs, entstanden. Diſs Verhältniſs kann in keinem Punkt des Fortrückens unterbrochen seyn, also auch dann nicht, wenn sich bc und BC decken. Es nöthigt uns also die Vorstellung von einem absolut beständigen Verhältniſs, nun den bloſsen Punkten B und C eben das Verhältniſs beizulegen, und man kann diſs ohne Widerspruch, wenn man sagt, das extensive Verhältniſs gehe bei dem Verschwinden der Extension in ein intensives über. Übrigens würde man eben das Verhältniſs den Punkten B und C überall beilegen müssen, die Linie BC sey aufgestellt wo sie wolle, selbst wenn sie in A stände, wo sogar B und C für die Anschauung in eins zusammenfallen, aber von dem Verstande doch noch immer als zwei Punkte betrachtet werden können. Ein sehr anschauliches, wenn gleich in gewisser Rücksicht beschränktes Bild, von der Entstehung dieses intensiven Verhältnisses läſst sich auf folgende Art geben. Man lege den Linien AB und AC ein rationales Verhältniſs bei, und denke sich auf beiden eine beliebige Menge von Punkten in gleicher Entfernung von einander gestellt, so daſs dadurch beide Linien in eine Anzahl unter sich gleicher Theile getheilt werden; so wird sich die Anzahl der Punkte auf AB zur Anzahl der Punkte auf AC, wie AB : AC, verhalten, wenn man auf jeder Linie den Anfangspunkt nicht mitzählt. Man nehme an, daſs durch das Fortrücken der beweglichen Linie von A aus gegen BC, alle diese Punkte mit fortgerückt, also näher an einandergedrängt würden, und zwar so, daſs sie sämmtlich immer zwischen bc und BC blieben, und gleiche Entfernung von einander behielten. Sobald nun BC von bc gedeckt wird, so liegen alle Punkte, die vorher auf den Linien bB, cC nebeneinander waren, jetzt ineinander, und man muſs also jetzt den bloſsen Punkten B und C eben das Verhältniſs intensiv beilegen, was vorher extensiv vorhanden war.

33. Verändert sich der Winkel A, so ver-

ändert sich seine Secante; folglich hängt das intensive Verhältniſs der Punkte B und C von der Gröſse dieses Winkels ab. Ist daher die Linie AC wie Fig. 5. krumm, so sieht man leicht, was es mit dem intensiven Verhältniſs der Punkte B und C für eine Bewandniſs habe. Wenn eine durch C gezogene Tangente mit AB den Winkel φ macht, so verhalten sich die Punkte B und C unter ähnlichen Voraussetzungen, als wir bei Fig. 4. machten, wie 1 : Sec. φ. Da aber der Winkel φ für jeden Punkt der Curve von anderer Gröſse ist, so ist das Verhältniſs von B und C veränderlich. Und da der Winkel φ als eine Function von AB, oder BC, oder von dem Bogen AC, oder auch von der Fläche ABC angesehen werden kann, so wird auch dieses Verhältniſs als eine solche Function vorgestellt werden können.

34. Man stelle sich die beiden Figuren 4 und 5 als zusammengehörig vor, indem man annimmt, daſs die beiden beweglichen Linien, welche mit bc bezeichnet sind, sich in beiden Figuren zu gleicher Zeit in A befinden, und von da gleichförmig gegen BC so fortrücken, daſs sie, in einem und demselben Augenblick, BC in beiden Figuren decken, so ist klar, daſs die beiden Flächenräume, welche in beiden Figuren zwischen bc und BC enthalten sind, in jedem Augenblick ein anderes Verhältniſs haben werden. Da aber die Veränderung dieses Verhältnisses vollkommen s t e t i g geschieht, so

wird es in dem Augenblick, wo sich bc und BC decken, von einer bestimmten Gröſse seyn. Eben dieses Verhältniſs wird man alsdann den beiden mit BC bezeichneten Linien beizulegen genöthigt seyn, wenn man das Gesetz der Stetigkeit nicht verletzen will. Sind nun diese beiden Linien einander extensiv gleich, so wird man ihnen jenes Verhältniſs, das ihnen vermöge des Grundsatzes der Stetigkeit zukommt, ganz als ein intensives beilegen müssen. Es ist aber auch der Fall möglich, daſs beide Linien schon extensiv das richtige Verhältniſs hätten, dann ist ihr extensives Verhältniſs das Verhältniſs der Gleichheit. Sind endlich beide Linien ungleich, aber in einem andern Verhältniſs, als im vorigen Fall, so muſs man ihnen ein intensives Verhältniſs von solcher Gröſse beilegen, daſs dieses, mit ihrem intensiven Verhältniſs zusammengesetzt, dasjenige Verhältniſs gebe, was den Linien, insofern sie als verschwundene Flächen betrachtet werden, zukommt. Käme z. B. den beiden Linien nach dem Gesetze der Stetigkeit das Verhältniſs 12 : 25 zu, und sie sind extensiv gleich, so ist ihr intensives Verhältniſs = 12 : 25; hätten sie aber schon an und für sich das extensive Verhältniſs 12 : 25, so wäre ihr intensives 1 : 1; wäre endlich ihr extensives Verhältniſs 3 : 5, so müſste man ihnen das intensive 4 : 5 beilegen, damit beide zusammengesetzt das Total-Verhältniſs 12 : 25 gäben. Es ist hieraus klar, daſs das intensive Verhältniſs zweier zugleich verschwindenden Gröſsen in keinem Fall willkührlich, sondern durch das Gesetz der Stetigkeit völlig bestimmt, und daher einer strengen mathematischen Theorie empfänglich ist.

35. Eben diese Begriffe lassen sich auch auf Flächen anwenden, insofern man sie als Stellvertreter verschwundener Körper betrachtet. Es seyen AE und FK, Fig. 6., zwei Parallelepipeda: ihre Grundflächen BC und GH seyn ungleich, aber von beständiger Gröſse; ihre Höhen AD und FI aber sollen sich umgekehrt wie die Grundflächen verhalten: so sind beide Körper einander gleich. Nun stelle man sich vor, daſs in beiden eine Ebene von der untern Grundfläche gegen die obere parallel fortrücke, und zwar so, daſs sich ihre Entfernung von der obern Grundfläche überall umgekehrt wie die Grundflächen verhalte, so bleiben stets die zwischen ihnen und den obern Grundflächen enthaltnen körperlichen Räume einander gleich. In dem Augenblick nun, wo die beweglichen Ebnen mit den obern Grundflächen zusammenfallen, werden diese die Stellvertreter der verschwundnen Räume, und man ist daher durch das Gesetz der Stetigkeit genöthigt, sie in dieser Beziehung als gleich anzusehen, ob sie gleich, vermöge der Voraussetung, extensiv ungleich sind. Man kann sie aber als gleich vorstellen, wenn man ihnen ein intensives Verhältniſs beilegt, was dem umgekehrten der Grundflächen gleich ist.

Man sieht leicht, daſs, wenn wir andere Körper als Parallelepipeda, oder für die Veränderung der Höhen ein anderes Gesetz angenommen hätten, die Verhältnisse anders ausgefallen wären. In allen Fällen aber würde die Endgränze, vermöge des Gesetzes der Stetigkeit, ein bestimmtes Verhältniſs A : B erhalten haben; als selbstständige extensive Gröſsen betrachtet würde ihnen ein anderes Verhältniſs a : b zugekommen seyn; aber das erste Verhältniſs A : B würde nur dadurch als wirklich vorhanden dargestellt werden können, daſs man es als zusammengesetzt ansähe, aus dem extensiven Verhältniſs a : b und einem intensiven $\alpha : \beta$ von einer solchen Gröſse, daſs $A : B = a\alpha : b\beta$ wäre: wodurch $\alpha : \beta$ in keinem Fall der Willkühr überlassen bleibt.

36. Diese Betrachtungen führen uns wieder auf den Begriff des **Differenzials** zurück, der erst durch sie Vollendung und innere Haltbarkeit erlangen kann. Wir wollen die Anwendung sogleich in einiger Allgemeinheit machen. Da keine Function einer veränderlichen Gröſse x erdenklich ist, die nicht durch eine krumme Linie geometrisch construirt werden könnte, so sey AC Fig. 11. irgend eine Curve; $AB = x$ eine Abscisse derselben; $BC = y$ die zugehörige Ordinate, und y irgend eine beliebige Function von x, die wir durch Fx vorstellen wollen: also die Gleichung der Curve $y = Fx$. Man schneide auf der Abscissenlinie, von B aus diesseits oder jenseits, ein Stück von beliebiger Gröſse $Bb = \Delta x$

ab, und errichte in b die Ordinate bc, und ziehe $C\gamma$ durch C parallel mit Bb; so ist $C\gamma = Bb = \Delta x$, und $c\gamma$ als die Zunahme der Ordinate ist $= \Delta y$. Eine Gleichung zwischen Δx und Δy erhält man, wenn man in der Gleichung der Curve $x + \Delta x$ statt x und $y + \Delta y$ statt y setzt; man erhält so $y + \Delta y = F\,(x + \Delta x)$ und zieht man hiervon $y = Fx$ ab, so bleibt übrig $\Delta y = F\,(x + \Delta x) - Fx$, welches die verlangte Gleichung zwischen Bb und $c\gamma$ ist. Stellt man sich nun vor, es bewege sich bc gegen BC, so verändert sich das Verhältnifs von Bb zu $c\gamma$ in jedem Augenblick, aber stetig und nach einem durch die obige Gleichung für Δy bestimmten Gesetz. In dem Augenblick, wo sich bc und BC decken, verwandelt sich Bb in den Punkt $B = \partial x$ und $c\gamma$ in den Punkt $C = \partial y$. Diese Punkte extensiv betrachtet sind gleich, aber intensiv mufs man ihnen nach allen bisherigen Betrachtungen das Verhältnifs beilegen, welches dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nach der obigen Gleichung für Δy zukommt, wenn man $\Delta x = \partial x = 0$, also auch $\Delta y = \partial y = 0$ setzt.

37. In eben der Figur nenne man den Bogen $AC = z$, so wird $Cc = \Delta z$, und wenn bc mit BC zusammenfällt, so wird derselbe Punkt C, der vorher das Differenzial der Ordinate war, nunmehr das Differenzial des Bogens $= \partial z$. Aber in dieser Beziehung wird man ihm gegen ∂x ein anderes intensives Verhältnifs bei-

legen müssen, weil er aus einer andern Gröſse und nach einem andern Gesetz entstanden ist. Diese intensive Gröſse kann man finden, wenn aus der Natur der Curve eine Gleichung zwischen dem Bogen und der Abscisse bekannt ist; und zwar auf die nämliche Art, wie das Verhältniſs $\frac{\partial y}{\partial x}$ gefunden wird.

38. Um wo möglich jeder Bedenklichkeit über unsere Theorie des Differenzials vorzubeugen, wollen wir die Sache noch einmal von einer ganz andern Seite ansehen, und zeigen, daſs sich die Nothwendigkeit, den Differenzialen eine intensive Gröſse beizulegen, noch aus einem ganz andern Grundsatz, als aus dem Grundsatz der Stetigkeit, ableiten lasse: aus dem Grundsatz nämlich, daſs gleiche veränderliche Gröſsen, wenn sie Functionen von einander sind, auch gleiche Differenziale haben müssen. Dieser Satz ist eigentlich nur ein Corollar eines andern ganz allgemeinen und unzweideutigen Grundsatzes, daſs gleiche Veränderungen, mit gleichen Gröſsen vorgenommen, auch gleiche Resultate geben müssen; und als solches hat der Satz hinlängliche Evidenz, selbst dann, wenn der Begriff des Differenzials nur klar, aber nicht deutlich aufgefaſst ist: denn wenn man sich nur die Differenzial-Operationen als Veränderungen vorstellt, die nach bestimmten und feststehenden Regeln mit Formeln vorgenommen wer-

den, ihr Sinn sey übrigens welcher er wolle, so folgt schon daraus, daſs sie gleiche Resultate geben müssen, wenn sie mit gleichen Gröſsen nach gleichen Regeln vorgenommen werden. Daher hat auch noch Niemand diesen Satz bezweifelt, und selbst Herr Langsdorf, der doch das Gesetz der Stetigkeit anzugreifen versucht, läſst meines Wissens diesen Satz unangetastet.

Wir wollen auch hier nach der oben §. 19. und 20. angegebenen Methode die Sache in einer ganz einfachen geometrischen Construction betrachten, und nur dabei, statt eines undeutlichen Begriffs vom Differenzial, den im vorhergehenden deutlich bestimmten Begriff einer Endgränze zum Grunde legen. Wir betrachten wieder die beiden Parallelepipeda AE und FK Fig. 6. Die Grundfläche BC des ersten sey $= 1$; seine Höhe AD sey veränderlich und $= y$; folglich sein räumlicher Inhalt $= 1 . y$ oder y. Die Grundfläche GH des zweiten sey von anderer Gröſse, als die Grundfläche des ersten, aber sie sey beständig, und $= b$; seine Höhe FC veränderlich, und $= x$; also sein räumlicher Inhalt $= bx$. Nun nehme man an, daſs y und x so wachsen, daſs sich in jedem Augenblick verhalte $b : 1 = y : x$, so wird durchgängig seyn

$$y = bx$$

in welcher Gleichung offenhar y, (oder $1 . y$) nicht die Höhe AD, sondern der ganze Raum AE ist.

Sollte man nun zuerst eine Gleichung finden zwischen zwei zusammengehörigen **Endtheilen**, so müſste man die Höhe x um den Endtheil Δx, und die y um den Endtheil Δy wachsen lassen, doch so, daſs noch immer sich verhielte

$$b : 1 = y + \Delta y : x + \Delta x$$

Auf diese Art hätte man also

$$y + \Delta y = b x + b \Delta x$$

und wenn man hiervon $y = bx$ abzieht

$$\Delta y = b \Delta x$$

Soll dieser strengrichtige Ausdruck der **Endtheile** verwandelt werden in einen eben so strengrichtigen Ausdruck für die Endgränzen, so müssen die Dimensionen Δx und Δy verschwinden, d. h. in ∂x und ∂y übergehen, und so erhält man den strengrichtigen Ausdruck

$$\partial y = b \partial x.$$

Nun lehrt aber der Anblick der Figur, daſs die Endgränze des ersten Parallelepipedi das Parallelogramm DE sey; also wäre $DE = \partial y$ oder $1 . \partial y$ die Endgränze des zweiten Parallelepipedi ist das Parallelogramm IK, folglich wäre $IK = b \partial x$. Und so erhalten wir durch lauter Schlüsse, deren strenge Richtigkeit wohl Niemand bezweifeln kann, die Folgerung, daſs DE = IK sey; welches aber der ausdrücklichen Voraussetzung, daſs BC und GH ungleich sind, widerspricht, wofern man DE und IK, (eben so wie BC und GH), bloſs für sich als selbstständige ausgedehnte Gröſsen betrachtet. Aber da dennoch in allen unsern Schlüssen durchaus kein Fehlschluſs nachgewiesen werden kann, so muſs es einen gewissen Sinn geben, in welchem man mit strenger Richtigkeit sagen kann, daſs wirklich $DE = IK$ sey, und dieser Sinn liegt in dem Begriff einer Endgränze. Denn als solche muſs DE nicht als eine Fläche, sondern als ein Parallelepipedum betrachtet werden, dessen Grundfläche DE, dessen Höhe aber verschwunden oder ∂y geworden ist. Als Endgränze betrachtet muſs ich also diese Fläche nicht bloſs durch DE, sondern durch $DE . dy$ und aus eben den Gründen die Endgränze des andern Körpers durch $IK . \partial x$ vorstellen. Ich hätte also oben nicht schreiben sollen $DE = \partial y$ sondern $DE . \partial y = 1 . \partial y$, und eben so nicht $IK = b\partial x$, sondern $IK . \partial x = b\partial x$, woraus ganz richtig folgt $DE = BC = 1$ und $IH = GK = b$. Da aber durch richtige Schlüsse gefolgert worden, daſs $1 . y = b . \partial x$ so folgt auch:

$$DE . \partial y = IK . \partial x;$$

ein Satz, der etwas ganz anderes sagt, als $DE = IK$, und der, ohne einen Widerspruch einzuschlieſsen, richtig ist, aber auch nur auf diese einzige Art als richtig dargestellt werden kann, wenn man den beiden Differenzialen ∂x und ∂y ein intensives Verhältniſs von solcher Gröſse beilegt, daſs

$$\partial x : \partial y = DE : IK.$$

So beschränkt der besondere Fall ist, an welchen wir diese Betrachtung angeknüpft haben, so ist es doch nicht schwer einzusehen, dafs sich ähnliche Betrachtungen bei jeder durch eine räumliche Construction vorgestellten Function würden anstellen lassen. Ich habe absichtlich eine solche Functional-Gleichung $y = bx$ gewählt, wo y und bx in der Construction als zwei verschiedene, und nur bei allen Veränderungen gleichbleibende Gröfsen erschienen. Hierdurch erhielt y gewissermafsen eine doppelte Bedeutung, indem es einmal den ganzen Körper AE, und dann auch eine mit x gleichartige Gröfse, nämlich die Höhe AD, anzuzeigen schien. Eigentlich ist nur das letzte die wahre Bedeutung von y, und in jedem Fall, wo man irgend eine beliebig zusammengesetzte Function Fx mit einem einzelnen Buchstaben y bezeichnet, findet etwas ähnliches statt. In jedem Fall, wo man $y = Fx$ setzt, mufs man sich den Factor 1 bei y ausgelassen denken, und dieses Product so bestimmen, dafs y eine mit x gleichartige Gröfse, und die beigefügte Einheit so beschaffen sey, dafs dadurch auch $1 . y$ und Fx gleichartige Gröfsen werden. Difs ist deswegen nöthig, weil offenbar alle Evidenz der höhern Analysis auf einer deutlichen Einsicht in das Wesen des Differenzial-Verhältnisses $\frac{\partial y}{\partial x}$ beruht. Ein jedes Verhältnifs setzt Gleichartigkeit seiner Glieder voraus. Sind aber y und x ungleichartige Gröfsen, so sey der Begriff

griff des Differenzials welcher er wolle, so können wohl ∂y und ∂x nicht gleichartig seyn. Man wird folglich bei jeder erdenkbaren Erklärungsart, in einer solchen identischen Gleichung $y = Fx$, den scharfen Begriff von y immer so bestimmen müssen, daſs y und x gleichartige Gröſsen werden. Noch anschaulicher wird die Sache, wenn man unsern bestimmten Begriff des Differenzials als Endgränze auf geometrische Constructionen anwendet: denn wäre y ein Körper und x eine Linie, so wäre ∂y eine Fläche und ∂x ein Punkt, zwischen welchen schlechterdings kein endliches Verhältniſs denkbar ist. Daſs es aber, wenigstens bei jeder geometrischen Construction, möglich sey, y nebst seinem Coefficienten 1 so zu bestimmen, daſs y mit x und $1 . y$ mit Fx gleichartig werde, ist leicht einzusehen. Denn wäre x sowohl als Fx eine Linie, so ist auch y eine Linie und mit x gleichartig, der Coefficient 1 aber ist dann die bloſse Zahl 1, ohne räumliche Dimension. Wäre x eine Linie und Fx eine Fläche, so müſste man y und 1 als Linien betrachten; dann ist y mit x gleichartig, und $1 . y$ eine Fläche, also mit Fx gleichartig. Wäre x eine Linie und Fx ein Körper, so müſste man y als Linie und 1 als Fläche denken, wodurch wieder die erfoderliche Gleichartigkeit entstehen würde. u. s. f. Doch läſst sich auch der Beweis gleich ganz allgemein führen. Denn man schreibe $1 . y = 1 . Fx$ und denke sich unter der Einheit bei y etwas mit Fx gleichartiges; so behält man die Freiheit, sich unter y und der bei Fx befindlichen Einheit jede Art von Gröſsen, welche man will, zu denken, wofern sie nur gleichartig sind. Man wird also auch berechtigt seyn, beide mit x als gleichartig zu denken.

Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen würde es möglich gewesen seyn, alles, was wir aus dem Grundsatz der Stetigkeit abgeleitet haben, auch aus dem Grundsatz von der Gleichheit der Differenziale gleicher Functionen abzuleiten; nur würde der Gang des Vortrags an Einfachheit verlohren haben, eben deswegen, weil wir mit den hier angestellten Betrachtungen hätten anfangen müssen. Übrigens hängen die gedachten beiden Grundsätze so unter einander zusammen, daſs sich einer aus dem andern ableiten läſst, so daſs, wer den einen bestreitet, auch den andern in Anspruch zu nehmen gezwungen ist.

39. Wir haben bisher unsern Brgriff des Differenzials als Endgränze bloſs auf räumliche Gröſsen angewendet, und im Grunde gezeigt, daſs dieser Begriff ohne Zweideutigkeit, und auf eine ganz strenge Art, auf dieselben Resultate führe, und auf keine andern führen könne, als auf eben die, welche der Leibnitzische Algorithmus *) der Differenzial-

*) Die Newtonische Darstellung dieses Algorithmus in der *Methodus fluxionum* ist in der That

Rechnung giebt. In der That ist auch zwischen der Leibnitzischen und der hier aufgestellten Ansicht gar kein anderer Unterschied, als der, dafs der Leibnitzische Begriff einer unendlichkleinen Veränderung ein undeutlicher, und daher schwankender Begriff, die Vorstellung einer Endgränze hingegen ein völlig bestimmter, und im Gebiete räumlicher Gröfsen, sogar anschaulicher Begriff ist, der, wie ich glaube gezeigt zu haben, in allen seinen Bestimmungen, deren die Differenzial-Rechnung bedarf, auf den ersten Grundgesetzen unseres Vorstellungsvermögens beruht.

Um daher die Differenzial-Rechnung oder vielmehr die ganze höhere Analysis aufs vollständigste zu rechtfertigen, scheint in der That nichts weiter nöthig zu seyn, als noch zu zeigen, dafs unser Begriff vom Differenzial, mit allen seinen Folgerungen, auf jede nur erdenkliche Art von Gröfsen anwendbar sey, und dafs wir den hier gewählten Gang, zuerst blofs von räumlichen Gröfsen zu reden, lediglich deswegen gewählt haben, weil auf diesem Wege allein die möglichste Anschaulichkeit zu erhalten war.

40. Es ist hier der Ort, nunmehr eine scharfbestimmte und schulgerechte Definition des Differenzials zu geben.

---

schon eine Künstelei, welche daher entsprang, dafs Newton dem zweideutigen Begriff des Unendlichkleinen ausweichen wollte.

Das Differenzial einer veränderlichen Gröſse, ist ihre Endgränze, symbolisch vorgestellt als ein verschwindender Endtheil.

In dieser Erklärung ist nichts, was bloſs auf räumliche Gröſsen beschränkt wäre. Denn daſs jede endliche Gröſse begränzt sey, liegt unmittelbar in der Vorstellung einer endlichen Gröſse. Bei jeder solchen Gröſse kann und muſs sich der Verstand einen Anfang und ein Ende denken, also wenigstens zwei Gränzen, von wo aus man die Gröſse auf doppelte Art entstehen lassen kann, entweder vom Anfang gegen das Ende vorwärtsschreitend, oder vom Ende gegen den Anfang zurückgehend *). Bei der Vorstellung einer veränderlichen Gröſse schreitet man allezeit von einem gewissen Anfangspunkte, welchen man willkührlich wählt, bis zu einem beliebigen Werth der Gröſse vorwärts. Die Endgränze, welche die Gröſse bei diesem Werthe hat, und ihr Zusammenhang mit der veränderlichen Gröſse ist der eigentliche Gegenstand, welchen die höhere Analysis betrachtet. Daſs dieser Begriff einer Endgränze, so allgemein betrachtet, nichts an-

*) Beiläufig bemerke ich, daſs hierauf die innere Möglichkeit des Positiven und Negativen, und die absolut uneingeschränkte Möglichkeit, diese Begriffe auf alle erdenkliche Arten von Gröſsen anzuwenden, beruhe.

schauliches sey, wird man hoffentlich nicht als Einwurf gegen seine Realität aufstellen: denn eben der Einwurf könnte nicht bloſs gegen den Begriff der Endgränze, sondern gegen den Begriff der Gröſse überhaupt gemacht werden. Bloſs die räumliche Gröſse ist unmittelbar anschaulich; die Gröſse allgemein genommen kann wohl gedacht, aber nur mittelbar in Symbolen angeschaut werden *). So wie also jede Gröſse überhaupt einer Darstellung durch Symbole empfänglich ist, eben so muſs dieses bei der Endgränze einer veränderlichen Gröſse möglich seyn.

Da aber etwas Begränztes und eine Gränze desselben, wenn man jedes für sich betrachtet, zwei ungleichartige Dinge sind, so ist ein Übergang von einem zu dem andern nur dadurch möglich, daſs man sie unter einem gemeinschaftlichen Begriff subsumirt, ver-

---

*) Wer hieran noch zweifeln könnte, den bitte ich zu überlegen, wie er wohl eine Zahl anders anschauen wollte, als in Symbolen; es seyn nun zählbare Dinge, also etwas ganz anderes, als die bloſse reine gedachte Zahl selbst, oder willkührliche Zeichen. Übrigens bedarf es wohl kaum einer Erinnerung, daſs das Wort Anschauen, hier, und wo es sonst in dieser Abhandlung gebraucht worden, nicht ein Ansehen mit dem Auge, sondern die Auffassung einer *unmittelbaren* Vorstellung des Dinges durch die *Einbildungskraft* bedeute.

möge dessen sie als gleichartig betrachtet werden können. Dieses geschieht dadurch, daſs man die *Endgränze* vorstellt, als einen verschwindenden *Endtheil*: denn eine Gröſse und ein Theil derselben sind gleichartige Gröſsen *).

Es ist also in unserer Definition nichts enthalten, was nicht auf alle erdenkliche Arten von Gröſsen anwendbar wäre; und wir wollen nunmehr zeigen, mit welcher Leichtigkeit sich alle Grundregeln der Differenzial-Rechnung aus diesem Begriff streng ableiten lassen.

41. Die erste Grundregel der Differenzial-Rechnung ist wohl, daſs jedes Differenzial im Verhältniſs zu seiner veränderlichen Gröſse im strengsten Sinn = o sey. Und diſs folgt unmittelbar aus dem Begriff sowohl einer Endgränze, als eines verschwindenden End-

*) Zwar ist die Vorstellung einer Endgränze als eines Endtheils nur idealisch; aber alles Idealische richtig gefaſst, und richtig verstanden, ist ein nothwendiges, und zum denken unentbehrliches Erzeugniſs unserer Vernunft. Daher trägt auch Niemand Bedenken zu sagen: wenn ich mich auf einer Linie AB dem Punkte B nähere, und ihn nun wirklich erreiche, so ist meine *Entfernung* von demselben = o geworden, als ob die Congruenz zweier Punkte noch immer eine wirkliche Entfernung wäre. Einige Bemerkungen über den Ursprung der Ideen findet man in der ersten Abhandlung.

theils. Der Ausdruck $x \pm \partial x$ sagt in der That nichts mehr als der Ausdruck x allein. In dem ersten Ausdruck ist bloſs die Endgränze ausdrücklich durch ein Symbol bezeichnet, die in dem andern Ausdruck stillschweigend und nicht abgesondert gedacht wird. Man kann also im strengsten Sinn sagen, daſs $x \pm \partial x = x$ sey. Sind aber v und w mit x gleichartige Gröſsen, so ist auch $v \pm \partial x = v$, und $v + w \partial x = v$. Denn was das erste betrifft, so ist eine Gränze Null nicht nur gegen das, was sie begränzt, sondern gegen alles, was zu dem Begränzten ein bestimmtes Verhältniſs hat. Ist aber dieses richtig, so muſs auch $v + w \partial x = v$ seyn: denn $v + w \partial x = w \left(\frac{v}{w} + \partial x\right)$; haben aber v und w gegen x ein bestimmtes Verhältniſs, so gilt diſs auch von dem Quotienten $\frac{v}{w}$; also ist $\frac{v}{w} + \partial x = \frac{v}{w}$ woraus der Satz $v + w \partial x = v$ streng folgt.

42. Ferner ergiebt sich unmittelbar aus unserm Begriff die allgemeine Methode, wie der symbolische Ausdruck für ein Differenzial zu suchen sey. Man sucht nämlich einen Ausdruck für einen beliebigen Endtheil der veränderlichen Gröſse, und substituirt alsdann für das Symbol des endlichen Endtheils das Symbol des verschwindenden, d. h. ein Differenzialzeichen. Wir wollen dieses Verfahren auf bestimmtere Fälle anwenden.

Es sey Fx irgend eine Function einer einzigen veränderlichen Gröſse x. Man setze $x+\Delta x$ statt x, und entwickle $F(x+\Delta x)$ in eine Reihe nach Potenzen von Δx, so ist bekannt, daſs man eine endliche oder unendliche Reihe von folgender Form erhält *):

$$F(x+\Delta x)=Fx+P\Delta x+Q\Delta x^2+R\Delta x^3+\text{etc.}$$

wo P, Q, R etc. Functionen von x allein sind, ohne Δx zu enthalten. Daſs das erste Glied Fx seyn müsse ist daraus klar, weil, wenn man $\Delta x=0$ setzt, die ganze Reihe in Fx übergehen muſs. Läſst man dieses erste Glied weg, so ist das Aggregat aller übrigen Glieder der vollständige Ausdruck für den positiven oder negativen Zusatz, den die Fx erhält, wenn x in $x+\Delta x$ übergeht; d. h.

$$P\Delta x+Q\Delta x^2+R\Delta x^3+\text{etc.}$$

ist der symbolische Ausdruck für einen **Endtheil** der Function, und Δx ist dasjenige Symbol, von welchem allein die Gröſse des Endtheils für jeden bestimmten Werth von x ab-

---

*) Bei einem synthetischen Vortrag ist es nicht nöthig, diesen Satz in seiner ganzen Allgemeinheit vorauszusetzen; sondern man entwickelt jede einzelne Fundamental-Formel nach den bekannten Regeln der gemeinen Analysis. Diſs hat bei algebraischen Functionen nicht die geringste Schwierigkeit; und für die transcendentischen giebt dann die Differenzial-Rechnung selbst mehr als ein Mittel an die Hand, sie in Reihen aufzulösen, und so die Allgemeinheit des obigen Satzes durch Induction darzuthun.

hängt. Vertauscht man dieses Symbol mit ∂x, so geht der Endtheil in die Endgränze über, und man erhält für dieselbe

$$P\partial x + Q\partial x^2 + R\partial x^3 + \text{etc.}$$

In dieser Reihe verschwindet aber gegen jedes Glied $M\partial x^m$ das nächstfolgende $N\partial x^{m+1}$. Denn

$$M\partial x^m + N\partial x^{m+1} = N\partial x^m \left(\frac{M}{N} + \partial x\right)$$

$$= N\partial x^m \left(\frac{M}{N}\right) = M\partial x^m; \; (41)$$

also verschwinden gegen das erste Glied $P\partial x$ alle folgende, und so behält man bloſs

$$\partial Fx = P\partial x.$$

Dieses Verfahren betrachte ich als die zweite Grundregel der Differenzial-Rechnung.

43. Es sey eine Function von x ein Aggregat mehrerer Stücke V, X, Z, so daſs

$$Fx = V + X + Z$$

wo V, X, Z jedes für sich eine Function von x ist, so ist unmittelbar klar, daſs für einen beliebigen Werth von x jede dieser Functionen ihre eigne Endgränze habe, die auf dieselbe Art, als im vorigen §. gezeigt worden, gefunden werden kann, und daſs das Aggregat dieser Endgränzen die totale Endgränze der Function Fx sey. Demnach ist

$$\partial Fx = \partial V + \partial X + \partial Z,$$

welches eine dritte Grundregel der Differenzial-Rechnung ist.

Wäre eins dieser Stücke, etwa V, eine beständige Gröſse, so fällt seine Endgränze ganz weg, weil die Differenzial-Rechnung blofs die Endgränzen des Veränderlichen betrachtet.

44. Wir haben oben (40) gesagt, jede Gröfse habe wenigstens zwei Gränzen. In der That kann sie deren mehrere haben. Denn wenn eine Gröfse in mehr als einer Art veränderlich ist, so gehört zu jeder einzelnen Art von Veränderlichkeit eine eigne Anfangs- und Endgränze. So hat ein Parallelepipedum, weil es in Länge, Breite und Höhe veränderlich vorgestellt werden kann, drei Anfangs- und drei Endgränzen. Aber difs ist so wenig eine Eigenthümlichkeit räumlicher Gröfsen, dafs sie diesen als solchen vielmehr nur in einem sehr beschränkten Grad zukommt; indem es uns, vermöge der Natur unsers Vorstellungsvermögens, unmöglich ist, uns etwas räumliches von mehr als drei Dimensionen vorzustellen. Dagegen kommt die Möglichkeit mehrerer Gränzen, der Gröfse allgemein genommen, ganz uneingeschränkt zu, und selbst jeder räumlichen Gröfse kommt sie uneingeschränkt zu, sobald man sie als Gröfse überhaupt in einer symbolischen Construction betrachtet. Denn betrachtet man eine Function von so vielen veränderlichen Gröfsen als man will, z. B. F (v. w. x. z), so kann man bei jedem beliebigen Werth der sämmtlichen veränderlichen Gröfsen fragen nach der Endgränze, welche sie in Ansehung einer einzelnen veränderlichen Gröfse, z. B. in Ansehung v hat.

Auch ist es klar, daſs man diese Endgränze finden werde, wenn man bloſs v um einen Endtheil Δv vermehrt, und dann nach der allgemeinen Grundregel (42) verfährt. Auch ist es unmittelbar klar, daſs die ganze Endgränze, welche die Function in Ansehung aller veränderlichen Gröſsen hat, nichts anders seyn könne, als das Aggregat aller einzelnen Endgränzen, welche der Function in Ansehung jeder einzelnen veränderlichen Gröſse zukommen. Und so ergiebt sich nach der hier aufgestellten Ansicht ganz unmittelbar aus dem Begriff des Differenzials *eine vierte Grundregel* der Differenzial - Rechnung, deren Beweis sonst einige Weitläuftigkeit macht.

Eben diese Schlüsse lassen sich insonderheit unmittelbar auf Produkte und Quotienten veränderlicher Gröſse anwenden, wodurch die Auffindung der Fundamental - Formeln für diese Fälle sehr einfach wird.

45. Wir haben bisher gesehen, daſs, und in welchem genau bestimmten Sinn, ein jedes Differenzial $= 0$ sey, und was aus diesem Begriffe folge. Jetzt müssen wir zeigen, daſs, und in welchem bestimmten Sinn, jedes einzelne Differenzial dennoch als eine wirkliche Gröſse angesehen werden könne und müsse, und was aus dieser Ansicht folge.

Wir betrachten zu dem Ende wieder Fx als eine Function einer einzigen veränderlichen Gröſse, und bezeichnen ihren Totalwerth, in dem oben §. 38. genauer bestimmten Sinn, durch y, so dafs $y = Fx$. Nach §. 42. ist

$$x + \Delta y = Fx + P\Delta x + Q\Delta x^2 + R\Delta x^3 + \text{etc.}$$

woraus folgt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + Q\Delta x + R\Delta x^2 + \text{etc.}$$

Läfst man nun in Gedanken Δx bis zum Verschwinden stetig abnehmen, so verändert sich auch das Verhältnifs $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ stetig, und sobald Δx verschwindend in ∂x übergeht, so geht auch Δy in ∂y über, und man behält blofs

$$\frac{\partial y}{\partial x} = P.$$

Difs ist also ein bestimmtes Verhältnifs, welches den Endgränzen ∂y und ∂x, vermöge des Gesetzes der Stetigkeit, zukommt. Nun sind diese Endgränzen zwar im strengsten Sinn $= 0$, aber doch nur relativ gegen y und x, und alles, was mit diesen gleichartig ist. An sich betrachtet aber können sie gar wohl selbstständige Gröfsen seyn, und daher wirklich ein bestimmtes Verhältnifs gegen einander haben, wie difs das Beispiel von Flächen als Gränzen eines Körpers, oder von Linien als Gränzen einer Fläche, anschaulich macht. Wir haben indessen in mehrern Fällen (besonders §. 38.) gesehen, dafs dieses äufsere Verhältnifs zweier Endgränzen von demjenigen verschieden sey, welches ihnen als verschwindenden Endtheilen, vermöge des Gesetzes der

Stetigkeit, zukommt. Dieses letzte Verhältnifs mufsten wir, selbst bei extensiven Gröfsen, als ein intensives betrachten; und dafs man es eben so betrachten müsse, wenn nicht bestimmt von räumlichen Gröfsen, sondern von Gröfsen überhaupt die Rede ist, kann, dünkt mich, noch weniger Bedenken haben. Denn wenn x und y nicht räumliche Gröfsen seyn sollen, so müssen sie selbst schon als intensive Gröfsen gedacht werden; daher kann man auch wohl bei ihren Endgränzen an kein extensives Verhältnifs denken; und gebietet uns ein unstreitiger Grundsatz, ihnen ein gewisses völlig bestimmtes Verhältnifs beizulegen, so kann difs kein anderes, als ein inneres oder intensives seyn. In der That sind hier alle Bedingungen zur Entstehung eines intensiven Verhältnisses vorhanden. Diese Bedingungen waren, dafs zwei zugleich verschwindende Gröfsen aus Gröfsen entstanden seyn mufsten, die vor dem Verschwinden entweder ein ganz unveränderliches Verhältnifs hatten, oder ihr Verhältnifs, wenn es veränderlich war, doch stetig änderten, so dafs im Augenblick des Verschwindens ein bestimmtes Verhältnifs gegeben war; und man sieht leicht, dafs in jedem Fall Δy und Δx dergleichen Gröfsen sind. Die innere Möglichkeit aber, zwei verschwindenden Gröfsen ein intensives Verhältnifs beizulegen, beruhte im Grunde darauf, dafs eine Gröfse, die in einer gewissen Beziehung Nichts ist, auch bei jeder beliebigen Vervielfältigung, in eben dieser Beziehung Nichts bleibt, daſs aber dennoch jede Vervielfältigung an sich eine wirkliche Vermehrung in der Vorstellung, d. h. eine wirkliche Vorstellung von einer intensiven Gröſse ist. Schreibt mir daher das Gesetz der Stetigkeit vor, dem Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, z. B. den Werth $\frac{3}{2}$ zu geben, so mögen immer ∂y und ∂x, mit y und x verglichen, jedes $= 0$, und insofern einander gleich seyn, so kann mir nicht verwehrt seyn zu sagen: als gleich und relativ $= 0$ betrachtet, will ich beide α nennen, aber nun $\partial y = 3\alpha$ und $\partial x = 2\alpha$ setzen, wodurch allerdings $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{3}{2}$ wird. Sofern aber $\alpha = 0$ ist, können die Zeichen 3α und 2α nichts, als Symbole einer Intension seyn.

Ich zweifle nicht, daſs mehreren meiner Leser auch hier das Intensive einigen Anstoſs machen wird. Aber ich bitte sie, zu bedenken, daſs nun einmal dem Intensiven alle äuſsere Anschaulichkeit abgeht; daſs wir aber uns deswegen doch der intensiven Gröſse nicht entschlagen können: denn wir treffen sie unausweichlich in der Wirklichkeit und in unserm eigenen Vorstellungsvermögen an, und wir müſsten die ganze allgemeine Mathematik ausstreichen und uns bloſs auf Geometrie einschränken, oder wenigstens die Buchstaben in unsern Formeln nichts als räumliche Gröſsen bedeuten lassen, wenn wir uns der intensiven Gröſsen entledigen wollten. Können wir diſs aber nicht, so bleibt doch, dünkt mich, kein anderer Rath übrig, als das Wesen der Intension und die Grundform desselben in unserm Vorstellungsvermögen recht sorgfältig zu studiren, und einem ungewohnten, aber doch sonst genau bestimmten Begriff, das Widerspänstige zu benehmen, das er auf den ersten Blick zu haben scheint.

Das Resultat unserer obigen Betrachtungen wäre also: daſs ∂y und ∂x zwar relativ gegen y und x im strengsten Sinn $= 0$ sind, daſs man aber dennoch beiden eine innere Gröſse ohne Widerspruch beilegen könne, und vermöge des Gesetzes der Stetigkeit, beilegen müsse. Diſs wäre die fünfte Grundregel der Differenzial - Rechnung.

46. Vermöge des Gesetzes der Stetigkeit ist bloſs das Verhältniſs $\frac{\partial y}{\partial x}$, nicht aber die absolute Gröſse jedes einzelnen Differenzials bestimmt. Hieraus folgt, daſs man jederzeit berechtigt sey, eines der beiden Differenziale, welches man will, als eine beständige Gröſse, und nur das andere als veränderlich anzusehen. Da ferner ein Verhältniſs nicht geändert wird, wenn man beide Glieder mit einer und derselben Gröſse multiplicirt, so wird man jederzeit die Freiheit haben, beide Differenziale mit einer und derselben Gröſse, z. B. mit y oder x, oder mit

mit $\sqrt{\left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}$, oder womit man sonst will, zu multipliciren, also

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{x\partial y}{x\partial x};\text{ oder}=\frac{y\partial y}{y\partial x};\text{ oder}=\frac{\partial y\sqrt{\left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)}}{\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}}$$

zu setzen, und dann in irgend einem dieser Brüche beliebig den Zähler oder Nenner als eine beständige Gröſse, und nur das zugehörige andere Glied als veränderlich zu betrachten. Diſs ist eine sechste Grundregel der Differenzial-Rechnung.

47. Da man bei jeder veränderlichen Gröſse, sie sey extensiv oder intensiv, nach einer Endgränze fragen kann, so ist klar, daſs man auch nach der Endgränze eines Differenzials fragen könne, sobald man es als eine veränderliche Gröſse betrachtet, d. h. daſs man von einem Differenzial ein zweites Differenzial nehmen könne. Auch ist klar, daſs dieses zweite Differenzial völlig nach denselben Grundregeln, als das erste, gesucht werden müsse, weil ein Differenzial, als veränderliche Gröſse betrachtet, von andern veränderlichen Gröſsen in nichts, als in der symbolischen Bezeichnung verschieden ist. Es ist ferner klar, daſs alles, was bisher vom ersten Differenzial gezeigt worden, auch auf das zweite anwendbar sey, und daſs man daher ferner ein drittes, viertes, fünftes Differenzial, und so fort, ohne Ende suchen dürfe.

dürfe. Diese unbegränzte Möglichkeit höherer Differenziale findet sogar bei räumlichen Gröſsen statt, da man selbst den Punkt als eine veränderliche intensive Gröſse betrachten darf. Sie ist also auf keine besondere Art von Gröſsen beschränkt, sondern findet nur dann Gränzen, wenn ein niedrigeres oder höheres Differenzial-Verhältniſs nach dem Gesetz der Stetigkeit beständig wird. Setze ich dann das eine Differenzial beständig, so bin ich gezwungen auch das andere als beständig zu setzen, und dann fallen alle höhere Differenziale weg, weil die höhere Analysis bloſs die Endgränzen des Veränderlichen betrachtet. Und so rechtfertigt sich die siebente Grundregel der Differenzial-Rechnung, und zwar gerade die, welche gewöhnlich am meisten Anstoſs macht; nämlich die Entstehung der höhern Differenziale.

48. Es sey y eine Function mehrerer veränderlichen Gröſsen, als $y = F\,(v.\ w.\ x.\ z.)$ Ferner seyn ∂y^{I}, ∂y^{II}, ∂y^{III}, ∂y^{IV} die partialen Differenziale, welche sich nach der Reihe auf die veränderlichen Gröſsen v, w, x, z beziehen (44), so hat man

$$\begin{aligned}\partial y^{I} &= P\,\partial v\\ \partial y^{II} &= Q\,\partial w\\ \partial y^{III} &= R\,\partial x\\ \partial y^{IV} &= S\,\partial z\end{aligned}$$

und $\partial y = \partial y^{I} + \partial y^{II} + \partial y^{III} + \partial y^{IV}.$

$$= P\partial v + Q\partial w + R\partial x + S\partial z$$

Nun ergiebt sich aus den partialen Differenzial-

Gleichungen, daſs die Verhältnisse $\frac{\partial y^{I}}{\partial v}$, $\frac{\partial y^{II}}{\partial w}$, $\frac{\partial y^{III}}{\partial x}$, $\frac{\partial y^{IV}}{\partial z}$, sämmtlich durch das Gesetz der Stetigkeit bestimmt sind. Folglich ist man berechtigt, jedes der Differenzial-Zeichen ∂v, ∂w, ∂x, ∂z, desgleichen ∂y^{I}, ∂y^{II}, ∂y^{III}, ∂y^{IV}, folglich auch ∂y selbst, als veränderliche Gröſsen anzusehen und als solche zu behandeln. Da aber auch hier das absolute Maſs völlig unbestimmt ist, so wird man auch hier irgend eines der Differenzial-Zeichen als eine beständige Gröſse betrachten dürfen, welches wir als eine achte Grundregel der Differenzial-Rechnung ansehen können.

49. Ich glaube, daſs durch alles bisherige, alle Fundamental-Operationen der Differenzial-Rechnung, aus welchen sich alle übrigen verwickeltern ohne Schwierigkeit ableiten lassen, eben so streng gerechtfertigt sind, als es bei irgend einer andern Art von mathematischen Operationen möglich ist. Auch ergiebt sich daraus ein ganz bestimmter Begriff der Differenzial-Rechnung, der durchaus nichts zweideutiges oder problematisches in sich schlieſst. Sie ist die Methode aus dem symbolischen Ausdruck einer veränderlichen Gröſse, einen symbolischen Ausdruck für die Endgränze zu finden, welche sie bei jedem beliebigen Werth hat.

Durch eine Rechtfertigung der Differenzial-Rechnung ist aber auch zugleich die ganze Integral-Rechnung gerechtfertigt, und ihr Begriff völlig bestimmt.

Man stelle sich zwei Functionen von x vor, Fx und φx, welche blofs um eine beständige Gröfse C verschieden sind, so dafs $Fx = \varphi x + C$, so ist klar, dafs ihre Differenziale ∂Fx und $\partial \varphi x$ gleich sind, weil die Differenzial-Rechnung die Endgränzen beständiger Gröfsen nicht beachtet. Sind hingegen Fx und φx wesentlich verschieden, nämlich in der Art ihrer Zusammensetzung, d. h. ihrer Entstehung aus x, so ist klar, dafs sie wohl zufällig für gewisse Werthe, aber unmöglich für alle erdenkliche Werthe von x gleiche Endgränzen haben können. Denn es ist unmittelbar deutlich, dafs zwei veränderliche Gröfsen, die schlechterdings für alle Werthe von x völlig gleiche Endgränzen hätten, höchstens nur um einen beständigen Anfangstheil verschieden seyn könnten. Hieraus folgt aber, dafs zu jeder Function nur ein Differenzial, und umgekehrt, zu jedem Differenzial nur eine Function, doch im letzten Fall mit Hinzufügung einer unbestimmten beständigen Gröfse, gehöre. Es ist folglich durch die Function das Differenzial, und umgekehrt, durch das Differenzial die Function völlig bestimmt, und es mufs daher ein Übergang von dem einen zum andern durch analytische Operationen jederzeit möglich seyn. Da aber der Übergang vom Differenzial zur Function nichts anders seyn kann, als der umgekehrte Weg, auf dem die Differenzial-Rechnung von der Function zum Differenzial gelangt, so sieht man leicht ein, dafs wenn dieser letzte Weg fest und bestimmt ist, der umgekehrte eben so bestimmt und fest seyn werde.

Offenbar lassen sich eben diese Schlüsse auch auf Functionen mehrerer veränderlichen Gröſsen, desgleichen auf die Integration höherer Differenziale, anwenden. Denn jedes höhere Differenzial steht gegen das nächst niedrige vollkommen in demselben Verhältniſs, als ein erstes Differenzial gegen die zugehörige endliche Function.

Was den Begriff der Integral-Rechnung betrifft, so ist sie die Methode aus dem symbolischen Ausdruck einer Endgränze, den symbolischen Ausdruck des Begränzten, wozu sie gehört, zu finden.

50. Es ist noch übrig von der geometrischen Construction der Differenziale zu reden. Aus dem, was schon oben (15) über diese Operation gesagt worden, ist klar, daſs sie einer der wichtigsten Gegenstände der höhern Analysis sey, und daſs in ihr eine unerschöpfliche Fundgrube neuer Entdeckungen vermittelst der Integral-Rechnung liege. Ich halte es daher für zweckmäſsig, ihr einen eigenen Abschnitt zu widmen.

IV.

Über die geometrische Construction der Differenziale.

51. Veränderliche Gröfsen construirt man, im allgemeinen, geometrisch auf folgende Art.

Man stellt sich vor, dafs in einer Fläche gewisse gerade oder krumme Linien, oder in einem Raume von drei Dimensionen gewisse zusammenhängende Linien und Flächen der Lage nach gegeben und unbewegt seyn. In einem solchen Zusammenhang von Linien und Flächen läfst man dann einen Punkt, eine Linie eine Fläche von einer gewissen Anfangsgränze an fortrücken. Hierdurch werden von den unbewegten Theilen Stücke von veränderlicher Gröfse abgeschnitten, deren gegenseitiger Zusammenhang und Verhältnifs den eigentlichen Gegenstand der Betrachtung ausmachen, indem man Gesetze aufsucht, nach welchen für jede beliebige Lage des bewegten Theils alles übrige veränderliche in der Construction bestimmt werden könne. So construirt man z. B. eine Parabel in einer Ebene, zieht eine beliebige Abscissenlinie, läſst auf dieser eine andere unbegränzte Linie unter einem beständigen Winkel fortrücken und sucht das Gesetz, nach welchem sich hierbei die Ordinate oder die parabolischen Bögen und Flächen verändern.

Oder man kehrt auch die Frage um. Statt daſs man vorher ein Gesetz suchte, nach welchem sich gewisse Gröſsen verändern, nimmt man ein Gesetz, nach welchem sich irgend eine veränderliche Gröſse verändern soll, als gegeben an, und sucht nun eine geometrische Construction ausfindig zu machen, in welcher sich gewisse Gröſsen diesem Gesetze gemäſs verändern; d. h. es ist in einer symbolischen Construction, (in einer Formel), y gegeben, als eine Function von einer oder mehreren veränderlichen Gröſsen, also $y = F (v. x. z)$, und man sucht eine räumliche Construction ausfindig zu machen, in welcher sich eine veränderliche Linie, Fläche oder Raum, die man y nennt, diesem Gesetze gemäſs verändern, wenn gewisse andere Linien, Flächen, Räume, die man v, x, z nennt, sich dem Gesetze gemäſs verändern, welches die Function ausdrückt. Bei dieser Arbeit öffnet sich ein unbegränzter Spielraum für den mathematischen Scharfsinn und Erfindungsgeist, indem in der That jede Function nicht nur auf eine, sondern auf unendlich mannigfaltige Arten construirt werden kann. Der einfachste Fall ist der, wo y gegeben wird durch irgend eine beliebige Function einer einzigen veränderlichen Gröſse x, also $y = Fx$. Für diesen Fall hat man sich schon längst einer eben so einfachen als sinnreichen Construction durch krumme Linien bedient, deren innere Möglichkeit und uneingeschränkte Anwendbarkeit sich leicht einsehen läſst. Denn da zu jedem bestimmten Werthe von x, die Function sey beschaffen wie sie wolle, jederzeit ein oder mehrere bestimmte Werthe von y gehören, so ist klar, daſs man jederzeit y als Ordinate einer krummen Linie, und x als Abscisse derselben betrachten, und zu jedem beliebigen x die Endpunkte der Ordinate, d. h. die zugehörigen Punkte der Curve, finden, und so die Curve selbst construiren könne. Aber man sieht auch leicht ein, daſs eben der Zweck auf mehr als einen andern Weg erreicht werden könne. Man nimmt z. B. einen festen Punkt an, und zieht durch diesen eine unbewegliche Linie; dann legt man durch eben den Punkt eine bewegliche Linie, und nimmt an, sie drehe sich um denselben; man betrachtet nun x als den veränderlichen Winkel, den beide Linien einschlieſsen, und y als die Länge der beweglichen Linie von dem angenommenen festen Punkt an, so wird durch die Endpunkte dieser Vectoren eine Curve bestimmt seyn; und man sieht leicht ein, daſs man für eine und dieselbe Function nach diesen beiden Methoden zwei ganz verschiedene Curven erhalten werde. Auch ist es eben nicht schwer einzusehn, dafs man die nämliche Function $y = Fx$ noch auf mancherlei andere Arten construiren könne, indem man die Freiheit hat, nach Belieben x und y, durch gerade oder krumme Linien, durch Winkel, durch Flächen, durch Räume vorzustellen, und die Bedingungen der erforderlichen Bewegungen auf unendlich mannigfaltige Art abzuändern. Mehr Schwierigkeit macht es, wenn man Functionen von mehreren veränderlichen Gröfsen durch eine geometrische Construction anschaulich machen will, und mir ist nicht bekannt, dafs irgend ein Analyst hierüber schon allgemeine Regeln gegeben hätte; doch begreift man wenigstens leicht, die allgemeine Möglichkeit, Functionen von zwei und drei veränderlichen Gröfsen in einem Raum von drei Dimensionen zu construiren. Mehrere Bemerkungen hierüber liegen aber von meinem gegenwärtigen Zweck entfernt.

52. Die beiden im vorigen §. bemerklich gemachten Methoden gehören in zwei verschiedene Theile der Mathematik.

Die erste, wo die veränderlichen Gröfsen gegeben sind, und das Gesetz ihrer Veränderung gesucht wird, gehört, sobald dabei Curven vorkommen, ohne Zweideutigkeit in die höhere Geometrie: denn sie ist eine eigene Methode, die Eigenschaften der Curven zu untersuchen. Aber sie setzt Analysis voraus, weil sie eigentlich für das Gesetz der Veränderungen einen symbolischen Ausdruck, d. h. eine Function sucht.

Die zweite, wo das Gesetz durch eine Function gegeben ist, und dazu räumliche Grösen gesucht werden, welche diesem Gesetze gemäſs sich verändern, gehört eben so unzweideutig in die Analysis: denn sie ist eine eigene Methode, die Eigenschaften einer Function zu untersuchen. Aber sie setzt offenbar höhere Geometrie voraus, weil die geometrische Construction der Functionen fast in jedem Fall nicht ohne Curven auszuführen ist.

Sind diese Bemerkungen gegründet, so folgt daraus, daſs Analysis und höhere Geometrie einander wechselseitig voraussetzen, folglich nicht gänzlich isolirt vorgetragen werden können und dürfen. Es scheint mir daher in der That, ich kann es nicht leugnen, als wenn unsere trefflichsten Mathematiker in dem Vortrag dieser beiden Theile nicht den richtigsten Weg einschlügen. In der höheren Geometrie hat man den Weg der Alten gänzlich verlassen, und verbindet sie vom ersten Anfang an mit der Analysis, wodurch die reine geometrische Ansicht gänzlich verlohren geht. In der Analysis hingegen scheint man gerade auf der entgegengesetzten Seite zu weit zu gehen. Man legt es recht geflissentlich darauf an, die Analysis ganz rein vorzutragen, und sie durchaus von aller

Geometrie zu entkleiden; hierdurch verliert man aber nicht nur für das Ganze den höchst wichtigen Vortheil der unmittelbaren Anschaulichkeit, welchen die Geometrie allein gewähren kann; sondern man schneidet eine ganze höchst fruchtbare und scharfsinnige Methode ab, die Functionen zu behandeln. Nach meinem Bedünken sollte man in beiden Wissenschaften erst einen beträchtlichen Theil ganz rein vortragen, um den Geist derselben sichtbar zu machen und ihn zu fixiren: aber von einem gewissen Punkte an sollte man beide Methoden verbinden. Aber auch bei dieser Verbindung könnte und müſste man doch die Gränzen beider Wissenschaften nicht aus dem Auge verlieren. In der höheren Geometrie ist immer die Untersuchung der Curven der Zweck, und der Gebrauch der Functionen nur Mittel. In der Analysis ist es umgekehrt. Sollte ich ein Werk über die höhere Mathematik ausarbeiten, so würde ich zuerst die Lehre von den Kegelschnitten ganz rein nach der Methode der Alten vortragen, und dann die Theorie der algebraischen Functionen ganz rein analytisch folgen lassen. Von da an würde ich Geometrie und Analysis verbinden, doch so, daſs ich in den einzelnen Abschnitten bestimmt bemerkte, ob sie zur höheren Geometrie oder zur Analysis gehörten.

53. Wir müssen noch eine andere Bemerkung, aus den oben (51) angestellten Betrachtungen ableiten. Wenn irgend eine Function

vor mir liegt, so ist es immer entweder eine Frage aus der Physik, oder aus andern Theilen der angewandten Mathematik, oder auch eine Speculation aus der reinen Mathematik, wodurch mir diese Function gegeben wird. Die veränderlichen Gröſsen v, x, y, z können in dergleichen Fragen, Gröſsen von jeder erdenklichen Art, sie können räumliche Gröſsen, aber sie können auch Zeiten, Geschwindigkeiten, Kräfte, Massen, Capitalien, Zinsen etc. seyn, kurz, was man nur will. Aber es ist klar, daſs, wenn ich die Function geometrisch construiren will, ich gar nicht nöthig habe, daran zu denken, oder auch nur es zu wissen, was die Symbole v, x, y, z ursprünglich bedeuten. Ist nur die Form der Function völlig bestimmt, so darf ich mir unter diesen Symbolen völlig nach Belieben Linien, Winkel, Flächen, kurz jede Art räumlicher Gröſsen vorstellen. Zeigen nun aber jene Symbole ursprünglich andere als räumliche Gröſsen an, so ist klar, daſs die ganze geometrische Construction der Function im Grunde selbst nur *eine symbolische Construction* ist: denn da jedes beliebige Zeichen ein Symbol seyn kann, so kann auch jede räumliche Gröſse zu einem Symbol dienen; und diese Art von Symbolen hat vor den Buchstaben den wesentlichen Vorzug, daſs sie die Verhältnisse der betrachteten Gröſsen *anschaulich* darstellen. Es kann aber auch *der* Fall eintreten, daſs eine solche Construction *nur zum Theil* symbolisch ist. Von dieser Art sind fast alle geometrische Constructionen in der höheren Mechanik, wo gewisse Linien die wirklichen Wege bewegter Punkte, also räumliche Gröſsen, andere hingegen Zeiten oder Kräfte oder Geschwindigkeiten, also intensive Gröſsen vorstellen. Ich bitte den Leser diese Ansicht bestimmt und deutlich aufzufassen: denn wir werden sehen, daſs die geometrische Construction der Differenziale in jedem Fall symbolisch sey, und daſs es nur darauf ankomme, den Sinn dieser Construction sich bestimmt und deutlich zu denken, um einzusehen, daſs die Schlüsse, die man aus ihnen ableitet, bei Anwendung der nöthigen Aufmerksamkeit, eben so zuverlässig und streng sind, als es irgend eine Art von mathematischen Schlüssen seyn kann.

Daſs aber die geometrische Construction der Differenziale keinen andern, als einen symbolischen Sinn haben könne, läſst sich schon aus unserm Begriff vom Differenzial allgemein und durch einen einzigen Schluſs ableiten. Denn wir haben gesehen, daſs das eigenthümliche Verhältniſs der Differenziale, nämlich dasjenige, welches durch das Gesetz der Stetigkeit bestimmt ist, jederzeit ein intensives Verhältniſs sey; und es ist unmittelbar einleuchtend, daſs intensive Verhältnisse im Raume nicht anders, als symbolisch dargestellt werden können. Wir werden sehen, daſs diese Darstellung nicht nur anschaulicher, sondern in mehrerem Betracht expressiver sey, als die Darstellung durch Buchstaben; und ob sie gleich in gewissen Fällen die Unbequemlichkeit hat, dafs sie die darzustellenden Verhältnisse nicht genau, sondern nur annähernd sichtbar macht, so kennt man doch in jedem Fall die wahren Verhältnisse und die Bedingungen der Annäherung genau, und kann sich daher jederzeit gegen Trugschlüsse sichern. Eine ins einzelne gehende Entwickelung dieser Methode wird dieses alles anschaulicher machen.

Von dem Differenzial einer geraden Linie.

54. Die Gröfse der Linie AB Fig. 7. sey veränderlich, ihr unveränderlicher Anfangspunkt sey A, und AB eine beliebige Gröfse derselben. Ein Punkt C rücke von A gegen B; je näher dieser Punkt an B kommt, desto kleiner wird der Endtheil BC, den er abschneidet. Ist der Punkt C in B selbst angelangt, so fällt er mit B zusammen und bildet die Endgränze von AB; in dieser Lage sind die beiden congruirenden Punkte, als eine Linie von der Länge Null vorgestellt, das wahre Differenzial von AB. Es ist nöthig, diese Vorstellung noch genauer zu analysiren.

55. Obgleich bei einem für sich allein betrachteten Punkte gar nicht die Rede seyn kann von einer Richtung, so verhält es sich doch anders, wenn ein stetig bewegter Punkt einen unbewegten deckt, und nun diese beiden congruirenden Punkte als eine verschwindende

Linie vorgestellt werden. Wo sich auch der Punkt C auf der Linie AB befinden mag, so hat der Endtheil CB unverändert immer dieselbe Richtung, und eben diese Richtung muſs man daher, vermöge des Gesetzes der Stetigkeit, auch selbst noch in dem Augenblick des Verschwindens, der Linie CB beilegen *).

56. Wir haben ferner im vorigen Abschnitt gezeigt, daſs man jedem Differenzial, selbst dann wenn es ein bloſser Punkt ist, eine intensive Gröſse beilegen müsse, die zwar im allgemeinen ganz unbestimmt, aber in einem Zusammenhang mehrerer Differenziale dem Verhältnisse nach völlig bestimmt ist. Diese innere Gröſse eines Differenzials ist, wie jede Gröſse überhaupt, symbolisch darstellbar, unter dem

---

*) Einem Punkt eine Richtung beizulegen ist nichts weniger als ein bloſser Einfall, am allerwenigsten ein neuer Einfall. Man hat es gethan, so lange Geometrie existirt, aber vielleicht ohne sich dessen bestimmt und deutlich bewuſst zu seyn. Eben der Leser, der etwa hierbei Anstoſs finden möchte, hat gewiſs sehr oft gesagt, und wird noch ferner sehr oft sagen: eine krumme Linie habe in jedem Punkt eine andere Richtung. Man vergleiche hiermit den Begriff einer krummen Linie, als einer solchen, in welcher kein Theil, der sich angeben läſst, gerade ist; so sieht man leicht, daſs man in der That in solchen Ausdrücken jedem Punkt einer krummen Linie eine Richtung beilegt, nämlich die Richtung der Tangente.

Bilde einer Linie; und es fragt sich nun, wie diese Darstellung auf das zweckmäſsigste zu machen sey. Es kann offenbar keine expressivere Darstellung geben, als wenn man einen Theil der Linie AB selbst, und zwar einen an B disseits oder jenseits anliegenden Theil Bb oder Bβ zum Symbol wählt. Denn einmal stellt ein solcher Theil unmittelbar die Richtung dar, die man nach dem vorigen §. dem Differenzial beilegen muſs; und dann stellt er, weil er an B anliegt einen Endtheil der veränderlichen Gröſse vor, den man nur in Gedanken darf in Null übergehen lassen, um den scharfen Begriff der Endgränze oder des Differenzials zu haben. Auf ähnliche Art könnte man bei der analytischen Entwickelung einer Differenzial - Formel (42), ohne Nachtheil der strengen Richtigkeit aller Schlüsse, das Zeichen Δx beibehalten, ohne es mit ∂x zu vertauschen, wenn man nur bestimmt merkte, daſs es jederzeit als verschwindend gedacht werden müſste, so oft es das wirkliche Differenzial oder die wahre Endgränze von x vorstellen sollte. Ferner wird sich bei der weitern Entwickelung zeigen, daſs dergleichen Endtheile wie Bb oder Bβ, wenn mehrere Differenziale unter einander in Zusammenhang stehen, vorzüglich geeignet sind, das wahre Verhältniſs, welches ihnen nach dem Gesetz der Stetigkeit zukommt, anschaulich darzustellen. Endlich liegt selbst darin Ausdruck, ob man das Symbol des Differenzials disseits oder jenseits B abschneidet, indem dadurch angedeutet werden kann, ob es als positiv oder negativ anzusehen sey. Denn wenn zwei Endgränzen durch entgegengesetzte Bewegungen entstehen, so müssen sie, in Beziehung auf diese ihre Entstehungsart, selbst als entgegengesetzte Gröſsen angesehen werden.

Von dem Differenzial der Winkel- und Kreisbögen.

57. Wenn Fig. 10. der Schenkel AC des Winkels ACB als unbeweglich, der Schenkel BC aber als beweglich gedacht wird, so ist AC die Anfangsgränze des veränderlichen Winkels; die Linie BC aber ist die Endgränze, also das Differenzial desselben. Da aber das Differenzial jederzeit als ein verschwindender Endtheil, also als gleichartig mit seiner veränderlichen Gröſse gedacht werden muſs (40), so muſs die Linie BC vorgestellt werden als ein Winkel, dessen Schenkel zusammenfallen. Soll nun die innere Gröſse dieses Differenzials symbolisch construirt werden, so muſs über oder unter BC ein neuer Schenkel bC gezogen werden, der mit BC einen beliebigen kleinen Winkel macht, also einen Endtheil des Winkels BAC vorstellt. Die Gröſse dieses Winkels ist im wahren Differenzial = 0, aber die anschauliche Gröſse, die man ihm giebt, ist ein Symbol der intensiven Gröſse, welche man in einem gege-

gegebenen Zusammenhang veränderlicher Gröſsen, diesem Differenzial beilegen muſs.

58. Da aber die Winkel stets nur in Beziehung auf Linien betrachtet, und ihre Gröſse aus Linien - Verhältnissen abgeleitet wird, so muſs nothwendig die Gröſse, sowohl endlicher Winkel als ihrer Differenziale, auf irgend eine Art durch Linien dargestellt werden. Diſs geschieht schon in der Elementar-Geometrie durch Kreisbögen, die man zwischen den Schenkeln aus der Spitze der Winkel beschreibt. Um aber ein einziges allgemeines Maſs für alle Winkel zu haben, muſs man den Bogen jederzeit mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben annehmen. Nun sey $CD = 1$, so ist DE das Maſs des Winkels ACB, und eben so ist Ee das symbolische Maſs des Differenzials. Man kann daher, wie gewöhnlich, den Winkel und sein Maſs mit einerlei Buchstaben bezeichnen, und z. B. sowohl ACB als $DE = \varphi$ setzen; und eben so, wenn man BCb als die symbolische Construction der innern Gröſse des Differenzials betrachtet, so ist es nun einerlei, ob man sagt, es sey $DCb = \partial\varphi$, oder es sey $Ee = \partial\varphi$.

59. Hieraus ergiebt sich ferner die Art, wie überhaupt das Differenzial eines Kreisbogens zu construiren sey. Es sey mit einem beliebigen Halbmesser $CF = r$ der Bogen FGg beschrieben, und, wie vorher, sey $CD = 1$; ACB oder $DE = \varphi$, so ist aus bekannten Gründen der

Bogen FG $= r\varphi$. Das wahre Differenzial dieses Bogens ist der Punkt G; die innere Gröſse dieses Differenzials aber kann durch den Bogen Gg vorgestellt, und in Buchstaben durch $r\partial\varphi$ ausgedrückt werden. Denn denkt man sich BC in seiner beliebig angenommenen Lage unbewegt, und führt die bewegliche Linie bC an BC heran, so verhält sich ununterbrochen DC : FC = Ee : Gg, d. i. $1 : r = \partial\varphi : r\partial\varphi$. Man muſs also den bloſsen Punkten E und G, sobald man sie als Differenziale von DE und FG betrachtet, noch immer das Verhältniſs Ee : Gg oder $1 : r$ beilegen.

60. Wenn sich ein Winkel verändert, dadurch, daſs sich einer seiner Schenkel nicht um den Scheitelpunkt des Winkels, sondern um einen beliebigen, in dem Schenkel selbst irgendwo angenommenen Punkt dreht, so ändert diſs die geometrische Construction seines Differenzials.

Man denke sich Fig. 4. die Linie BC um den Punkt B beweglich, so ist, wenn die Linie DA eine beständige Lage hat, der Winkel BCA veränderlich. Es fragt sich, wie sein Differenzial vorzustellen sey. Man nehme die anfängliche Lage der beweglichen Linie beliebig an: sie sey z. B. anfänglich in der senkrechten Lage BE gewesen, und habe sich nun bis in die Lage BC gedreht, so ist auch hier BC die Endgränze, also das wahre Differenzial des Winkels BCA. Soll aber die innere Gröſse dieses Differenzials geometrisch construirt werden, so mufs man die Linie noch etwas weiter, etwa bis in die Lage BD, fortrücken lassen, so zeigt der Winkel DBC die Gröfse an, um welche der Winkel BCA durch die fortgesetzte Bewegung der Linie abgenommen hat, weil $BCA - BDA = DBC$. Dieser Winkel DBC stellt also einen Endtheil unsers veränderlichen Winkels vor, und als verschwindend gedacht ist er dessen Differenzial. Hätte man nun $BCE = \varphi$ gesetzt, so würde man die innere durch DBC äufserlich vorgestellte Gröfse seines Differenzials durch $-\partial\varphi$ bezeichnen müssen.

Von dem Differenzial krummer Linien überhaupt.

61. Es sey AB Fig. 8. irgend eine krumme Linie, A der Anfangspunkt, von wo aus ein beweglicher Punkt gegen den beliebig angenommenen Punkt B auf der Curve fortrückt. Hat der bewegte Punkt B erreicht, so ist B die Endgränze oder das wahre Differenzial des veränderlichen Bogens AB. Da aber in dem Begriff des Differenzials die Vorstellung liegt, dafs es eine Linie sey von der Länge Null, so kann und mufs man zunächst nach einer Richtung dieses Differenzials fragen. Diese kann keine andere seyn, als diejenige, welche die Curve selbst bei ihrer Endgränze hat, also die Richtung der Tangente BC. Da aber die Tangente und die Curve den Punkt B auf völlig gleiche

Art gemein haben, so daſs man B mit eben dem Recht für Gränzpunkt der Tangente als der Curve nehmen kann, so ist klar, daſs in dem Differenzial aller Unterschied zwischen gerade und krumm gänzlich aufhöre, und daſs man daher berechtigt sey, das Differenzial einer Curve nach Belieben, entweder als eine gerade oder auch als eine krumme Linie von beliebiger Art, nur von der Länge Null zu betrachten. Aber dieser Umstand macht einen Unterschied in der symbolisch - geometrischen Construction des Differenzials.

62. Um nämlich die innere Gröſse eines solchen Differenzials unter einem anschaulichen Bild darzustellen, muſs man, wie bei der geraden Linie, diesseits oder jenseits B einen beliebigen kleinen Theil der Curve, Bb oder Bβ, abschneiden. Soll nun das Differenzial als gerade vorgestellt werden, so gehört zu den beiden Endpunkten desselben eine und dieselbe Tangente CD; man muſs folglich in der Zeichnung Bβ als die Verlängerung von CB, oder Bb als die Verlängerung von DB ansehen. Betrachtet man hingegen das Differenzial als krumm, so darf in der symbolischen Construction Bβ Fig. 9. nicht als Verlängerung der Tangente CB betrachtet werden, weil Bβ, insofern es als krumm vorgestellt wird, in jedem Endpunkt eine andere Tangente hat. Denn obgleich auch jetzt, in dem wahren Differenzial durch B, als Punkt, nur eine einzige Tangente

gelegt werden kann, so geschieht es doch in den beiden Fällen, wo man das Differenzial als gerade oder als krumm betrachtet, in einem verschiedenen Sinn. Im ersten Fall dürfen die Tangenten durch B und β auch nicht einmal als verschieden gedacht werden, weil durch zwei Punkte nur eine einzige gerade Linie gezogen werden kann. Im zweiten Fall hingegen muſs die durch B gezogene Tangente im wahren Differenzial betrachtet werden, als zwei Tangenten, die einander decken, d. h. die einen unendlichkleinen Winkel oder einen Winkel = o einschlieſsen. Dieser Begriff kann symbolisch nicht anders anschaulich gemacht werden, als dadurch, daſs man nicht nur durch B die Tangente BC, sondern auch durch β die Tangente βD zieht. Da im wahren Differenzial β den Punkt B, und βD die Linie BC deckt, so ist der Winkel, den die durch B und β gezogenen Tangenten einschlieſsen, auch hier im strengsten Sinn = o, aber diſs in einem andern Sinn, als im ersten Fall. Dort war er absolut Null, d. h. es existirt kein Winkel, auch nicht einmal in der Vorstellung. Hier ist er nur relativ Null, als Winkel zweier congruirenden Linien, kurz als ein Differenzial, dem eine innere Gröſse zukommt, welche durch ein äuſseres Symbol, also durch einen wirklichen Winkel, dargestellt werden kann und muſs. Ist nämlich B ein beliebiger angenommener Punkt der Curve, und β irgend ein anderer als beweglich gedachter Punkt, so gehört zu β, bei jeder endlichen Entfernung von B, eine eigene Tangente βD, welche gehörig verlängert mit BC einen Winkel von bestimmter und von der Natur der Curve abhängigen Gröſse macht. Aber dieser Winkel ist, sobald man β beweglich setzt, selbst eine veränderliche Gröſse, welche abnimmt, je näher β an B rückt, und welche verschwindet, wenn β den Punkt B erreicht. Es ist also BC die Endgränze oder das Differenzial dieses Winkels, und der Winkel, den BC und βD einschlieſsen, die symbolische Construction der intensiven Gröſse, die man diesem Differenzial wird beilegen müssen, in Verhältniſs gegen andere Winkel-Differenziale, die etwa bei Betrachtung einer solchen Figur vorkommen. So könnte man z. B. von B sowohl als von β nach irgend einem unbeweglichen Punkt E zwei Linien ziehen: dann hat der Winkel BEβ auch bei jeder endlichen Gröſse von Bβ seine bestimmte Gröſse, und verschwindet, wenn β mit B zusammenfällt. Das Verhältniſs aber, welches der Winkel der beiden Tangenten zu dem Winkel der beiden Vectoren EB und Eβ hat, ändert sich stetig, und wird in dem Augenblick, wo beide Winkel verschwinden, noch eine bestimmte Gröſse haben, welches nur dadurch anschaulich gemacht werden kann, daſs man durch B und β zwei Tangenten, so wie zwei Vectoren zieht. Zwar können die beiden in der Figur auf diese Art anschaulich werdenden Winkel nicht das wahre Verhältnifs der Differenziale darstellen, aber sie stellen es doch desto genauer dar, je kleiner man sie nimmt, und es ist kein Irrthum möglich, sobald man diese beiden Winkel für nichts nimmt, als was sie sind, für mangelhafte Repräsentanten zweier intensiven Gröfsen, deren wahres Verhältnifs man aber anderweitig, vermöge des Gesetzes der Stetigkeit, kennt.

Vom Differenzial einer Fläche.

63. Wenn sich eine gerade Linie in einer Ebene in irgend einer andern Richtung als ihrer eigenen fortbewegt, so beschreibt sie allezeit eine Fläche, deren Anfangsgränze die Linie selbst, in ihrer ursprünglichen Lage, deren Endgränze eben diese Linie in irgend einer andern beliebigen Lage, ist. Unter den unendlich mannigfaltigen Abänderungen, mit denen man sich die Bewegung einer Linie denken kann, sind es nur die beiden einfachsten Arten, fast ausschliefsend, welche die Aufmerksamkeit der Analysten beschäftigen: nämlich das parallele Fortrücken, und das Drehen um einen Punkt.

64. Es sey AC Fig. 11. irgend eine Curve, AB die Abscissenlinie, und zu dem Punkte C gehöre die Abscisse $AB = x$, und die rechtwinkliche Ordinate $BC = y$. Da y und x veränderliche Gröfsen sind, so liegt darin stillschweigend die Vorstellung: die Ordinate habe sich von dem Punkte A an, oder aus der Lage AD, oder auch von irgend einer andern belie-

bigen Anfangsgränze, parallel fortbewegt; während dieser Bewegung aber sey auf derselben ein beweglicher Punkt fortgerückt, und habe die krumme Linie AC beschrieben, dem Gesetze gemäſs, daſs die Gleichung zwischen x und y ausdrückt. Derjenige Theil dieser beweglichen Linie, der zwischen der Abscissenlinie, und dem beweglichen Punkt enthalten ist, beschreibt bei dieser Bewegung die krummlinige Fläche ACB, und wenn man diese Fläche in einer beliebigen Lage der Linie BC betrachtet, so ist BC die Endgränze dieser Fläche, folglich, als ein verschwindender Endtheil vorgestellt, das wahre Differenzial der Fläche ABC. Will man die intensive Gröſse dieses Differenzials geometrisch construiren, so muſs man rechts oder links von BC eine neue Ordinate bc, und durch C eine Parallele $C\gamma$ mit Bb ziehen, so ist das kleine Rechteck $BC\gamma b$ die geometrisch - symbolische Construction des Flächen - Differenzials; und da $CB = y$, und Bb die symbolische Construction des Differenzials von x, also in diesem Sinn, $Bb = \partial x$ ist, so ist das Flächen - Differenzial $= y\partial x$.

Erwägt man aber, daſs bc und BC im wahren Differenzial einander decken, also einander gleich sind, so ist klar, daſs man auch den Raum BCcb als das Differenzial der Fläche betrachten dürfe. Diſs stimmt auch mit dem analytischen Ausdruck dieses Differenzials völlig überein. Denn da

$$BCcb = BC\gamma b + C\gamma c = y\partial x + \tfrac{1}{2}\partial x \,.\, \partial y;$$

so verschwindet $\frac{1}{2}\,\partial x \,.\, \partial y$ als ein Differenzial der zweiten Ordnung, gegen $y\partial x$. In der That ist auch $C\gamma c$ in dem wahren Differenzial ein bloſser Punkt, also gegen BC nichts; und nur in der symbolischen Construction, welche die inneren Verhältnisse der Differenziale darstellt, erscheint es als Dreieck.

65. Das eben betrachtete Dreieck $Cc\gamma$ ist besonders geeignet, das Wesen dieser symbolisch-geometrischen Constructionsart aufzuklären. Der Punkt C kann eigentlich in dreifacher Rücksicht als ein Differenzial betrachtet werden. Er ist erstlich das Differenzial des Bogens AC; zweitens das Differenzial der Ordinate BC; drittens, so wie man in der symbolischen Construction Bb oder $C\gamma$ für das Differenzial der Abscisse AB nehmen kann, eben so ist es im wahren Differenzial einerlei, ob man den Punkt B oder C dafür nimmt. Aber es kommen diesem Punkte C, in jeder dieser drei Rücksichten andere äuſsere Bestimmungen, und innere Verhältnisse zu. Als Differenzial des Bogens muſs man ihm diejenige Richtung beilegen, welche eine Tangente der Curve in dem Punkte C hat; als Differenzial der Abscisse, hat er die Richtung $C\gamma$; als Differenzial der Ordinate, die Richtung BC oder $c\gamma$. Denkt man sich also in dem Dreieck $Cc\gamma$, die Linie Cc als gerade, und in der Richtung der Tangente CE, so stellen die drei Seiten des Dreiecks

$Cc\gamma$, die **Richtungen** dieser drei Differenziale anschaulich, und in strenger Richtigkeit dar. Aber eben diese drei Seiten versinnlichen auch die innern Verhältnisse dieser drei Differenziale. Denn setzt man $c\gamma = \Delta y$, $C\gamma = \Delta x$, $Cc = \Delta z$, und betrachtet sie als endliche Endtheile, so werden sich aus der Gleichung der Curve genaue Ausdrücke für die Verhältnisse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta z}$, finden lassen. Läſst man einen dieser Endtheile stetig abnehmen, so nehmen auch die beiden andern stetig ab; folglich verändern sich auch die beiden gedachten Verhältnisse stetig. Aber die für sie gefundene Ausdrücke bleiben streng richtig, wie klein man auch die Endtheile nehmen mag. Je kleiner sie aber sind, desto mehr nähern sie sich den Verhältnissen der Seiten eines rechtwinklichen Dreiecks von den oben gedachten drei Richtungen, und es ist klar, daſs sie in dem Augenblick wo die Endtheile in Differenziale übergehen, dieses Verhältniſs streng erreichen. Daſs also in der symbolischen Construction Cc keine gerade Linie ist, aber doch als eine solche betrachtet wird, kann keinen Irrthum erzeugen, weil im wahren Differenzial alle Verhältnisse wirklich so sind, wie man sie in der symbolischen Construction annimmt. Es ist daher z. B. keine Annäherung, sondern ein strengrichtiger Satz, wenn man sagt, es sey das Differenzial des Bogens, oder $\partial z = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, u. s. f.

66. Es ist ferner klar, daſs ein Dreieck, dessen Seiten die gedachten drei Richtungen haben, im strengsten Sinne ähnlich sey dem Dreiecke CBE, daſs also auch dieses Dreieck die inneren Verhältnisse unserer drei Differenziale anschaulich darstelle. Da aber schon durch zwei Seiten eines rechtwinklichen Dreiecks alle übrigen Stücke desselben bestimmt sind, so ist klar, daſs der Winkel CEB und ECB mit den Differenzialen in einer ganz bestimmten Verbindung stehe, so daſs diese Winkel gegeben sind, wenn eines der Verhältnisse $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder $\frac{\partial y}{\partial z}$ gegeben ist, und umgekehrt. Hierauf beruht bekanntlich die gerade und umgekehrte Methode der Tangente, die Lehre vom Gröſsten und Kleinsten, die Beurtheilung der Wendungspunkte, der Spitzen, und der ganzen Gestalt einer Curve, kurz ein sehr groſser und wichtiger Theil der höheren Theorie der krummen Linien.

67. Es sey AB Fig. 12. wieder eine beliebige Curve; AC eine unbewegliche Anfangsgränze, und BC eine um den Punkt C bewegliche Linie. Während sie sich dreht, rücke ein Punkt auf derselben fort, und beschreibe nach einem Gesetz, das durch eine Gleichung zwischen $BC = x$, und dem Winkel $BCA = \varphi$ gegeben ist, die Curve AB. Die Fläche ACB wird also durch die Bewegung der Linie CB beschrieben, und ihre Endgränze ist in jedem Fall die Linie CB. Soll diese Linie das wahre

Differenzial der Fläche seyn, so mufs sie vorgestellt werden, als eine mit ACB gleichartige Fläche, deren Dimension aber in der Richtung der Bewegung $= 0$ ist: d. h. sie mufs vorgestellt werden, als eingeschlossen von zwei aus C laufenden Linien, und einem Bogen der Curve. Ist also Bb eine symbolische Construction von dem Differenzial des Bogens, so ist der Sector CBb die symbolische Construction von dem Differenzial der Fläche.

Um dieses Differenzial durch eine Formel aus x und φ auszudrücken, beschreibe man aus C den Kreisbogen $B\beta$. Dieser Bogen steht senkrecht auf bC, und darf, da β und B im wahren Differenzial zusammenfallen, als gerade angesehn werden. Da ferner im wahren Differenzial auch b und B congruiren, so darf aus eben dem Grunde auch Bb als gerade betrachtet werden. Daher kann man das Flächen-Differenzial CBb betrachten, als ein geradliniges Dreieck, dessen Grundlinie Cb, und dessen Höhe $B\beta$ ist. Wir haben also

$$CBb = \tfrac{1}{2}\, Cb \,.\, B\beta;$$

es ist aber $B\beta = x\partial\varphi$ (59), und $BC = \beta C = x$, also $\beta b = \partial x$, und $Cb = x + \partial x$; folglich

$$CBb = \tfrac{1}{2}(x + \partial x)\, x\partial\varphi.$$

Da aber $x + \partial x = x$ (41), so ist

$$CBb = \tfrac{1}{2}\, x^2 \partial\varphi.$$

68. Wir haben oben (40) erwähnt, dafs man sich die Erzeugung veränderlicher Gröfsen nicht blofs durch parallele und drehende Bewe-

gung, sondern noch auf unendlich viele andere Arten im Raume anschaulich machen könne. Wir wollen noch ein einziges leichtes Beispiel einer anderen Art von Flächenerzeugung hinzufügen. Man stelle sich einen Kreis von unbeweglichem Mittelpunkt, aber veränderlichem Durchmesser vor; so liegt darin die Vorstellung, dafs er so entstehe und wachse, wie etwa auf ruhigem Wasser Kreise durch einen hineingeworfenen Stein entstehen. Der Halbmesser dieses Kreises habe eine beliebige Gröfse x erhalten, so ist seine Peripherie, als eine Fläche ohne Breite betrachtet, seine Endgränze, oder sein wahres Differenzial. Will man dieses Differenzial symbolisch construiren, so mufs man innerhalb oder aufserhalb der Peripherie in einer beliebigen kleinen Entfernung eine neue concentrische Peripherie beschreiben. Der Ring zwischen beiden Peripherien ist die verlangte Construction, aus welcher sich leicht eine genaue Formel für das Differenzial ableiten läfst. Gesetzt man hätte die zweite Peripherie aufser der ersten beschrieben, so ist der Halbmeser des äufsern Kreises $= x + \partial x$, und der Halbmesser des innern Kreises $= x$. Die Fläche des äufsern Kreises ist also $= (x + \partial x)^2 \pi = \pi x^2 + 2\pi x \partial x + \pi \partial x^2$ $= \pi x^2 + 2\pi x \partial x$ (41); die Fläche des innern Kreises ist $= \pi x^2$; folglich der Ring zwischen beiden Peripherien, oder das gesuchte Differenzial $= 2\pi x \partial x$.

Von dem Differenzial eines körperlichen Raums.

69. Wenn sich eine bewegte Ebene in einer ihrer eigenen Dimensionen, (also bloſs nach Länge oder Breite), fortbewegt, so durchläuft sie nichts, als einen Flächenraum. Bewegt sie sich aber in einer Richtung, welche mit ihr einen Winkel macht, so beschreibt sie einen körperlichen Raum. Auch hier sind unter den unendlich mannigfaltigen Bewegungen, die man einer Fläche beilegen kann, das parallele Fortrücken einer Ebene, und die Umdrehung um eine feste Achse, die einfachsten, und fruchtbarsten. Es wird aber hier hinreichend seyn, nur die erste in Betrachtung zu ziehen, da es der Zweck dieser Abhandlung nicht seyn soll, eine Anleitung zu der Differenzial-Rechnung zu geben, sondern nur dem aufgestellten Begriff eines Differenzials, durch Anwendung auf die wichtigsten Fälle die möglichste Anschaulichkeit zu verschaffen.

70. Es sey also ABC Fig. 13. eine bewegliche Ebene von beliebiger Gestalt und Gröſse. Sie rücke fort, parallel mit sich selbst, in der Richtung AD, die auf der Ebene ABC senkrecht ist. Die Fläche selbst verändere im Fortrücken ihre Gröſse nach einem gegebenen Gesetz, und sie sey EFG, wenn sie in den Punkt E anlangt. Man sieht leicht, daſs ihre Gröſse irgend eine Function von $AE = x$ seyn werde, die wir durch Fx oder y bezeichnen wollen.

Ist die Fläche in E angelangt, so ist EFG die Endgränze des zwischen ABC und EFG durchlaufenen Raumes; und diese Endgränze, vorgestellt als ein mit ABCEFG gleichartiger Raum, ist das wahre Differenzial dieses Raumes. Um die innern Verhältnisse dieses Differenzials sichtbar zu machen, lege man über oder unter E noch eine dritte parallele Fläche efg mit der Voraussetzug, sie sey nach demselben Gesetz als EFG entstanden; so kann der Raum zwischen EFG und efg als die symbolische Construction des Differenzials angesehen werden; nur muſs man diesen Raum als einen prismatischen betrachten: denn da EFG und efg im wahren Differenzial zusammenfallen, so müssen sie auch in der symbolischen Construction als völlig gleiche Flächen betrachtet werden. Das Differenzial des Körpers ABCEFG ist also ein prismatischer Raum, dessen Grundfläche $EFG = y$, oder $= Fx$, und dessen Höhe $Ee = \partial x = o$ ist; es wird also gleich seyn $y \partial x$, oder $\partial x\, Fx$.

Allgemeine Bemerkungen.

71. Es würde unnöthig seyn, die Beispiele mehr zu häufen. Aus allen geht eine und dieselbe Regel für die symbolisch-geometrische Construction der Differenziale hervor, welche von der Regel der analytischen Construction nicht wesentlich verschieden ist.

Nachdem man mit sich selbst einig geworden, welche Theile einer Figur und in welcher Art sie veränderlich seyn sollen, so nimmt man diesen Voraussetzungen gemäſs eine beliebige Endgränze an. Diese Endgränze ist das wahre Differenzial, insofern dasselbe unmittelbar anschaulich ist. Um aber die innern, an sich nicht anschaulichen Verhältnisse der Differenzialgröſsen wenigstens symbolisch anschaulich zu machen, schneidet man disseits oder jenseits der Endgränze einen beliebigen Endtheil des Veränderlichen, den angenommenen Gesetzen der Veränderlichkeit gemäſs, ab. In dergleichen Endtheilen sind alle innern Verhältnisse der Differenzialgröſsen versinnlicht, zwar gewöhnlich nur annäherungsweise, aber man ist auſser aller Gefahr eines Irrthums, wenn man nur statt der Verhältnisse, welche in der Figur vor Augen liegen, diejenigen setzt, welche in dem Augenblick, wo ein Endtheil in eine Endgränze übergeht, nach dem Gesetz der Stetigkeit eintreten. In Ansehung dieser findet aber nie eine Zweideutigkeit statt, weil die Richtungen, die man den Differenzialen in dem Augenblick des Verschwindens beilegen muſs, in jedem Fall völlig bestimmt sind.

72. Wir haben oben, (besonders §. 15.), einer eigenen Methode, Differenzialausdrücke unmittelbar zu finden, erwähnt, als einer der wichtigsten Operationen der höhern Analysis, indem durch sie eigentlich die Integral-Rechnung

neuen

neuen und unerschöpflichen Stoff zu Erfindungen gewinnt. Man kann auf keinem andern Wege leichter zu deutlichen Begriffen über die Beschaffenheit und die innere Möglichkeit dieser Methode gelangen, als durch Betrachtung der geometrischen Construction. In den meisten Beispielen, von denen wir in diesem Abschnitt Gebrauch gemacht haben, legten wir keine bestimmte Function zum Grunde; sondern wir nahmen, (z. B. §. 63 — 66.), bloſs an, daſs sich eine Ordinate rechtwinklich auf einer Abscissenlinie fortbewege, und bei dem Fortrücken sich nach einem gewissen Gesetz verändere. Wir hatten aber nicht nöthig, dieses Gesetz zu bestimmen, sondern es war hinreichend einzusehen, daſs auf diese Art irgend eine Curve beschrieben werden müsse. Dieser bloſse allgemeine Begriff einer Curve führt auf die bestimmten Begriffe von Tangenten, Subtangenten, Normalen, Subnormalen, von Winkeln, welche diese Linien bilden, von Flächen, welche sie unter sich und mit der Curve einschlieſsen, von Körpern, welche entstehen, wenn man der Figur irgend eine Bewegung in einer dritten Dimension beilegt, u. s. w. Da nun die Richtung einer Curve in jedem Punkt durch ihre Tangente völlig bestimmt ist, so sind überhaupt alle Richtungen, welche man den Differenzialen beilegen muſs, vermittelst jener Begriffe völlig bestimmt: woraus folgt, daſs man die innern Verhältnisse der Differenzialgröſsen in jedem Fall, in strenger Richtigkeit anschaulich machen könne, selbst dann, wenn ihre unmittelbare Construction nur annähernd ist. So stellt z. B. das kleine Differenzial-Dreieck $Cc\gamma$ Fig. 11. die innern Verhältnisse der Differenziale nicht genau dar, weil Cc nicht gerade ist; aber das Dreieck EBC stellt dieselben in vollkommner geometrischer Strenge dar. Hieraus wird begreiflich, wie es möglich sey, ganz allgemeine Differenzial-Ausdrücke für Tangenten, Subtangenten, Normalen, Subnormalen, für Winkel der Curve mit einer solchen Linie, für Flächen der Curve u. s. f. zu finden, ohne dafs man nöthig hat, an eine bestimmte Gleichung der Curve zu denken. In solche allgemeine Differenzial - Ausdrücke, kann man ferner bestimmte Bedingungen hineintragen; man kann z. B. nach einer Curve fragen, deren Tangenten, Subtangenten, Bögen, Flächen etc., sich nach einem ganz bestimmten Gesetz ändern, das entweder durch blofse Speculation, oder durch physische Aufgaben veranlafst seyn kann, und so erhält man ganz bestimmte Differenzial-Ausdrücke, ohne noch die Function (d. i. die Gleichung der Curve) zu kennen, der sie zugehören. Auf diesem Wege kann also die Integral-Rechnung Stoff erhalten, den sie nicht aus der eigentlichen Differenzial-Rechnung, sondern aus der unmittelbaren Betrachtung der Endgränzen und ihrer innern Verhältnisse schöpft; und hierdurch allein erhält sie den Charakter einer ganz bestimmten, eigenthümlichen, und unentbehrlichen Wissenschaft. Indessen ist die hier erwähnte Methode nicht ausschliefsend der geometrischen Construction eigen. Auch bei der mittelbaren Construction durch blofse algebraishe Symbole ist sie anwendbar. Statt zu sagen, man wolle diese oder jene ganz bestimmte Function von x mit dem Buchstaben y bezeichnen, kann man sagen: y solle irgend eine Function von x seyn, die man mit einem solchen unbestimmten Zeichen wie Fx oder φx andeutet. Man kann dann ganz allgemeine Regeln entwickeln, wie man, unabhängig von der besondern Beschaffenheit der Function von x, die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, oder von $y \partial x$, oder von $\sqrt{(\partial y^2 + \partial x^2)}$, oder von irgend einer andern beliebigen Function dieser Differenziale finden könne. Man kann alsdann bestimmte Bedingungen in diese Formeln hineintragen, und nun fragen, welche Function von x die veränderliche Gröfse y seyn müsse, um jener Bedingung Genüge zu thun. Es ist auch leicht einzusehen, dafs diese blofs analytische Methode noch von allgemeinerer Anwendbarkeit sey, als die geometrische, die bei Functionen mehrerer veränderlichen Gröfsen, und bei Differenzial-Gleichungen oft ziemlich verwickelt werden dürfte; und man darf nur einen Blick werfen, auf die unschätzbaren Bereicherungen, welche die höhere Analysis dem Tiefsinn eines Lagrange verdankt, um sich von der unendlichen Fruchtbarkeit dieser Methode einen richtigen Begriff zu machen. Aber man wird auch leicht zugeben, dafs diese Methode sehr abstract sey, und dafs es nicht wenig Übung im abstracten Denken erfodere, sich von dem Sinn, der auf diesem Wege gefundenen Sätze und Formeln, recht bestimmte, deutliche, und festgefafste Begriffe zu machen. Denn da sie ganz im Allgemeinen bleibt, so arbeitet sie auf einem Gebiete, wo nichts unmittelbar anschaulich ist. Es ist aber sichtbar, dafs es unendlich leichter sey, durch unmittelbare Anschauungen als durch mittelbare in blofs willkührlichen Symbolen, zu bestimmten und deutlichen Begriffen zu gelangen. Die geometrische Methode behält daher immer einen unschätzbaren Werth; von ihr mufs der Vortrag ausgehen, und wo sich abstracte Untersuchungen auf sie zurückführen lassen, gewinnt gewifs der Lernende sehr viel.

73. Ich hoffe, der Leser werde sich nach aufmerksamer Durchlesung dieser Abhandlung mit völliger Befriedigung überzeugt fühlen, dafs die einfachen Regeln der Differenzial- und Integral-Rechnung, die man ursprünglich aus dem paradoxen Begriff des Unendlichkleinen abgeleitet hat, einer strengen Rechtfertigung und aller der Evidenz empfänglich sind, an welche man sonst in der Mathematik gewöhnt ist. Es ist eine auffallende, obgleich eben nicht seltene Erscheinung in der intellectuellen Welt, dafs

der menschliche Geist, wenn er nur von reiner, heiliger Wahrheitsliebe beseelt ist, aus dunkeln und miſsverstandenen Begriffen, dennoch oft die richtigsten Resultate zieht. Die höhere Analysis beweiset, daſs dieses sogar in dem Gebiete der Mathematik möglich sey: häufiger dürfte sich indessen der Fall auf dem Felde der Philosophie ereignen. So wie aber auf dem ersten Gebiete, durch völlige Aufklärung der Grundbegriffe, gerade die kunstloseste von allen Vorstellungsarten völlig gerechtfertigt wird, eben so dürfte, wenn es einst noch dem menschlichen Geiste gelingen sollte, diejenige Wissenschaft zur Wirklichkeit zu bringen, welche er seit zweitausend Jahren unter dem Namen der speculativen Philosophie vergebens sucht, ihr höchster Triumph nur darin bestehen, daſs sie alle die allgemeinen Aussprüche, welche der unverkünstelte gemeine Menschenverstand über die äuſsere und innere Welt fället, vollkommen rechtfertigen würde.

der menschliche Geist, wenn er gar von reiner [illegible] Wahrscheinlichkeit beraubt ist, [illegible] durch [illegible] mit [illegible] widersprechenden Begriffen, dennoch [illegible] die richtigsten Resultate sieht. Die höhere [illegible] hat bewiesen, daß dieses sogar [illegible] der Mathematik möglich sey. [illegible] dürfte sich indessen der [illegible] auf dem Felde der Philosophie ereignen. So wie aber auf dem andern Gebiete, durch völlige Aufklärung der Grundbegriffe gerade die Erscheinungen von allen Vorstellungsarten völlig leer [illegible] wird, eben so dürfte, wenn es einst noch dem menschlichen Geiste gelingen sollte, diejenige Wissenschaft zur Wirklichkeit zu bringen, welche [illegible] zweitausend Jahren unter dem Namen der allgemeinen Philosophie vergebens sucht, ein ähnlicher [illegible] mit diesem [illegible], daß sie alle die [illegible] Ansprüche, welche der unverständige gemeine Menschenverstand über die [illegible] und unsere Welt hätte, vollkommen rechtfertigen würde.

Druckfehler.

Seite	9	Zeile	7 v. u.	statt Verstande lies Verstand
—	23	—	13 v. o.	st. können l. könne
—	ib.	—	5 v. u.	st. Maafsstab l. Mafsstab
—	27	—	3 v. o.	st. jenen l. jener
—	41	—	13 v. u.	st. Bestimmun gihrer l. Bestimmung ihrer
—	48	—	7 v. o.	st. : die l. . Die
—	52	—	11 v. u.	st. Lionees l. Lyonet's
—	59	—	14 v. u.	st. des Tags l. der Tage
—	100	—	14 v. o.	st. berechtigt ist l. sondern berechtigt ist
—	130	—	11 v. o.	st. allerersts l. allererste
—	ib.	—	7 8. v. u.	st. proportionalis l. proportionales
—	135	—	2 v. u.	st. der strengste l. im strengsten
—	138	—	3 v. o.	st. gegeben l. gegebene
—	142	—	8 v. u.	st. unserer Vorstellung l. unseres Vorstellungsvermögens
—	153	—	1 v. o.	st. $z\partial x$ lies $z\partial x$ ausdrücken
—	168	—	13 v. o.	st. extensives l. intensives
—	ib.	—	18 v. o.	st. intensive l. extensive
—	175	—	12 v. u.	st. $1.y$ lies $1.\partial y$

Um mehrerer Deutlichkeit willen ersuche ich den Leser noch folgende kleine Abanderungen zu machen:

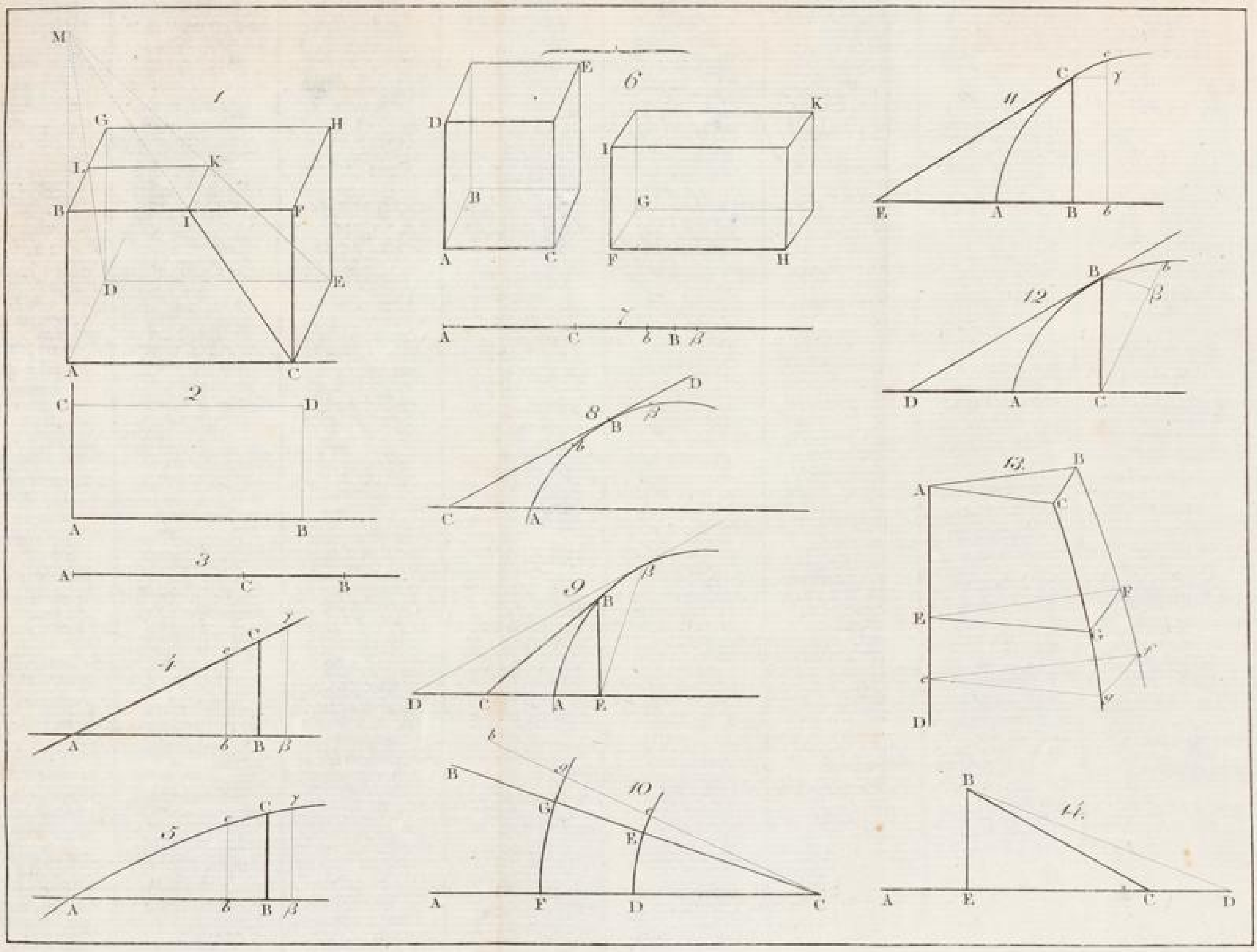
S. 85. Z. 13 und 14 v. u. statt: aber daſs sie nicht zur Analysis gehören: lese man: daſs aber dennoch Analysis etwas ganz anderes sey, als Algebra.

S. 101. Z. 10 v. o. setze man hinzu: Eben so braucht man bisweilen in der Algebra den Begriff einer Veränderung als Mittel, nicht als Zweck; in der Analysis hingegen ist dieser Begriff immer Zweck, nicht Mittel.

S. 198. Z. 4 und 5 v. u. statt: sich dem Gesetze gemäſs verändern, welches die Function ausdrückt. lese man: sich auf beliebige Art verändern.

S. 210. Z. 11 v. u. statt Fig. 4. lies Fig. 14.

S. 224. Z. 14 v. o. statt in lies im.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14