Thaer
494

C. Halbe

E. 11.

Aufgaben,

größtentheils

aus der angewandten Mathematik

zur

Uebung der Analysis.

Für angehende

Feldmesser, Ingenieurs und Baumeister.

Entworfen

von

J. A. Eytelwein,

Königlich-Preußischen Deichinspektor des Ober-Oderbruchs und der Königlichen Sozietät der Wissenschaften zu Frankfurth an der Oder Mitglied.

Böil.

Berlin,
bei Friedrich Maurer, 1793.

Vorrede.

Der Zweck meiner Bemühung bey Aufsetzung des gegenwärtigen Werks ist, dem Anfänger die Anwendung seiner erlernten Analysis zu erleichtern, indem ich solche auf die Entwickelung solcher Fragen, welche in der Ausübung vorkommen, angewandt habe. Das herrschende Vorurtheil, daß man sich in den meisten Fällen mit einigen Erfahrungssätzen, ohne Hülfe der Algebra, sehr gut behelfen könne, ist noch immer so allgemein, und die Liebe zur Bequemlichkeit findet so viel Gefälliges bei diesem falschen Grundsatz, daß selbst die überzeugendsten Einwendungen dagegen noch nicht diejenigen Würkungen hervor bringen konnten, welche sich davon erwarten ließen. Auch scheint die Einwendung derjenigen, welche behaupten, daß sie bei ihrer vielfältigen Praxis nie Gelegenheit fanden, sich der Algebra zu bedienen, noch immer einiges Gewicht zu haben; indessen, wenn man bedenkt: daß es sehr schwer ist, von einer Wissenschaft Anwendungen zu machen, welche man höchstens dem Namen nach kennt, so wird diese Einwendung von selbsten weg fallen. — Sollte ich so glücklich seyn, dem angehenden Baumeister nur einen deutlichen Wink zu geben, daß ihm zur richtigen Ausübung seiner Wissenschaft etwas mehr nöthig ist, als ein Paar geometrische Lehrsätze, die man auswendig gelernt hat, so würde ich meine geringe Arbeit für hinlänglich entschädiget ansehen.

Um nicht bereits gesagte Dinge noch einmal zu wiederholen, so sind besonders die An=

fangsgründe der mathematischen Wissenschaften (1780) und die mathematische Analysis (1786) von Hrn. **Karsten** zum Grunde gelegt worden, und ich bin bemüht gewesen, nur solche Aufgaben zu wählen, von welchen mir noch nicht bekannt war, daß sie bereits auf diese Art aufgelöst sind; einige wenige ausgenommen, welche mir hierher zu gehören schienen. Allein eine kleine Vergleichung wird es, wie ich mir schmeichle, zeigen, daß solche nicht mit Unrecht hier aufgenommen sind.

Es ist möglich, daß, vielleicht durch eine andere Einkleidung, sich verschiedene der hier vorgelegten Aufgaben noch kürzer auflösen lassen; F daher wird mir überhaupt jede Bemerkung darüber desto angenehmer seyn, weil mir in vielen Fällen kein Vorgänger bekannt war, und ich, von allen öffentlichen Bibliotheken abgeschnitten, mich keiner als meiner Handbibliothek bedienen konnte.

F wohl nicht man sehe pg 71 § 45.

Die Aufgaben selbst sind dergestalt geordnet, daß man von den leichteren nach und nach zu den schwerern übergehet, ohne daß hierbei auf die verschiedenen Wissenschaften, worunter sie gehören, Rücksicht genommen ist. Auch sind, zur Abkürzung vieler Rechnungen, am Ende des Buchs, noch verschiedene nützliche Tafeln beigefügt worden.

Wenn durch dieses Werk einiger Nutzen gestiftet wird, so würde vielleicht eine Fortsetzung desselben vorzüglich hydraulische Aufgaben enthalten, welche dem praktischen Hydrotechniker unentbehrlich sind.

Küstrin im Monat Januar 1793.

E.

Innhalt.

Aus der gegebenen Menge Faschinen, die Dauer der Arbeit zu finden. . . . . §. 1.

Die Kronenbreite eines Deichs, aus der Länge, Höhe und den Kosten desselben zu finden. . . . . §. 2.

Eine Figur in eine ähnliche größere zu verwandeln. §. 3.

Aus den gegebenen Dimensionen eines Brunnen und dem Gelde, welches auf jede Tiefe zugelegt werden muß, die sämmtlichen Arbeitskosten zu bestimmen. §. 4.

Die Anzahl der Arbeiter bei einem Baue zu finden. §. 5.

Verschiedene Preise der Faschinen aus bekannten Summen zu bestimmen. . . . . §. 6.

Die Höhe und Entfernung eines Orts, zu dessen Fuß man nicht kommen kann, durch den Schatten zu messen. . . . . §. 7. 8.

Die Menge der auf verschiedenen Baustellen abgeladenen Mauersteine zu finden, wenn gewisse Verhältnisse bekannt sind. . . . . §. 9.

Ein Trapez in mehrere gleiche und parallele Theile zu theilen. . . . . §. 10.

Jedes andere Viereck. . . . . . . §. 11.

Verschiedene schon bekannte Arten dieser Theilung. . . . . §. 11. Anmerk.

Aus der Breite und Höhe eines Walmdachs, die Größe der Sparren und Eckſparren zu finden. . . §. 12.

Anwendung auf besondere Fälle. . . . . §. 13.

Aus der Weite und Höhe, einen gedruckten Bogen mit dem Zirkel zu beschreiben. . . . . §. 14.

Diesen Bogen mehr hohl oder flach zu zeichnen. . §. 15.

Wie Neuß einen solchen Bogen zeichnen lehrt. Untersuchung über die Richtigkeit dieser Auflösung. . §. 16.

Den Innhalt einer Zone, in welcher sich der Mittelpunkt der Kugel nicht befindet, aus der Höhe und den Durchmessern der obern und untern Kreisflächen zu finden Mit Beispiel. . . . §. 17.

Wenn der Mittelpunkt in der Grundfläche liegt, und nur die Höhe und der Durchmesser der Grundfläche bekannt ist. Mit Beispiel. . . . . . §. 18.

Unter gleichen Bedingungen den Innhalt eines Kugelabschnitts zu finden. Mit Beispiel. . . §. 19.

Aus der Krone, Grundlinie und den beiden Dossirungen eines Deichs, den Flächeninnhalt seines Profils zu finden. Mit Beispiel. . . . . . §. 20.

Aus diesen Stücken das Profil zu zeichnen. . . §. 21.

Die Breite der Krone eines Deichs zu bestimmen, damit derselbe dem Druck des davorstehenden Wassers hinlänglich widerstehe. . . . . . §. 22.

Anwendung auf Flußdeiche. . . . . . . §. 23.

Für eine gegebene Last die nöthige Stärke einer Kette zu bestimmen. M. Beisp. . . . . . §. 24.

Aus dem Innhalt und Umfange eines Rechtecks, seine Grundlinie und Höhe zu finden. M. Beisp. . §. 25.

Aus der bekannten Zeit, in welcher mehrere Quellen einen Behälter füllen, diese Zeit für jede Quelle besonders zu finden. . . . . . §. 26.

Eine Siehl- oder Schleusenthüre so aufzuhängen, daß sich dieselbe, wenn kein Druck von innen vorhanden ist, von selbsten verschließt. . . . §. 27.

Fortgesetzte Untersuchung. . . . . . . §. 28.

Fehlerhafte Bestimmung der Hrn. Silberschlag und Brahms. . . . . . §. 28. Anmerk.

Bei einer einfachen Schleuse, die Höhe des Wassers so zu bestimmen, damit die Thüren gleichen Druck leiden. M. Beisp. . . . . . §. 29. 30.

Bei doppelten Schleusenkammern. M. Beisp. . §. 31.

Die Kraft zu finden, welche erfordert wird, um eine Last über eine Rolle zu ziehen, wenn auf Frikzion und Steifigkeit des Seils Rücksicht genommen wird; nebst den neusten hierher gehörigen Bemühungen. M. B. . . . . §. 32.

Diese Kraft zu finden, wenn die Rolle mit in die Höhe gezogen wird. M. B. . . . . . §. 33.

Bei einem Flaschenzuge von jeder Anzahl gleicher Rollen diese Kraft zu finden. M. B. . . . . §. 34.

Aus der Kraft und Last, die nöthige Anzahl der Rollen zu finden. M. B. . . . . . . §. 35.

Wenn der Flaschenzug aus zweierlei Rollen bestehet. M. B. . . . . §. 36.

Die Frikzion zwischen den Kettenschaken zu finden. §. 37.

Weitere Ausführung. . . . . §. 38.

Untersuchung über das Maximum. . . . . §. 39.

Die Kraft zu finden, welche erfordert wird, ein Schutzbrett aufzuziehen. M. B. . . . . . §. 40.

Wenn solches vermittelt einer um einer Welle befindlichen Kette geschehen soll. M. B. . . . § 41.

Vergleichung zwischen der Festigkeit einer Welle und eines Balkens. . . . . §. 42.

Die Stärke einer eichenen Welle zu finden. . . §. 43.

Aus der an einer Welle befindlichen Last und ihrer Länge, den nöthigen Durchmesser derselben zu finden. . §. 44.

Den körperlichen Innhalt eines kreisförmigen Ringes zu finden. M. B. . . . . . . §. 45.

Den Inhalt und das Gewicht einer Kette zu finden. M. B. . . . . §. 46.

Eine Deichecke so abzuschneiden, daß der Werth des Landes nicht von den Deichkosten übertroffen wird. §. 47.

Weitere Auseinandersetzung. . . . . . . §. 48.

Allgemeinere Ausführung. M B. . . . . §. 49.

Durch einen gegebenen Punkt eine Deichlinie zu ziehen, welche das meiste Land einschließt. M. B. . . §. 50.

Mit einerlei Deichskosten mehr Land einzuschließen. . §. 51.

Fortsetzung. . . . . §. 52.

Eine Höhe vermittelst des Barometers zu messen. . §. 53.

Den Innhalt eines Kreuzgewölbes zu finden. . . §. 54

Wenn sich die Gänge rechtwinklicht schneiden. . . §. 55.

Erklärung
der
vorkommenden Abkürzungen.

(R.) heißt Rechenkunst.
(G.) = Geometrie.
(St.) = Statik.
(Hst.) = Hydrostatik.
(M.L.) = Maschinenlehre.

Diese Abkürzungen beziehen sich auf Karstens Anfangsgründe der mathematischen Wissenschaften; 1. — 2. Band (1780).

(M. A.) = Mathematische Analysis, von demselben Verfasser.

π. Zeigt die Zahl 3,14159 . . . oder die Peripherie für den Durchmesser 1 an.

γ. Das Gewicht eines Rheinländ. Kubicfußes Regenwasser = 65,3064 Berlinischen Pfunden.

§. 1.

× **Aufgabe.** In einem gemeinschaftlichen Depot befinden sich 1800 Schock Faschinen für 3 Baue. Bei dem ersten Bau sollen täglich 34 Schock, bei dem zweiten täglich 46 Schock, und bei dem dritten soll überhaupt $\frac{1}{4}$ aller Faschinen verarbeitet werden. Wie lange wird die Arbeit dauern, und wie viel Faschinen müssen zu jedem Baue genommen werden, damit alle Arbeiten zugleich fertig sind und auf der ersten Baustelle noch 50 Schock Faschinen übrig bleiben?

Auflösung. Wenn X die Zeit bezeichnet welche zur Beendigung der Arbeit erforderlich ist, so kommen:

34 X + 50 Schock zu dem ersten Baue,

46 X. „ zu dem zweiten,

450 „ zu dem dritten; es ist daher

$$80\,X + 500 = 1800 \text{ also}$$

$$X = \frac{1300}{80} = 16\tfrac{1}{4} \text{ Tage.}$$

Folglich werden erfordert:

zum ersten Baue		$602\frac{1}{2}$
zum zweiten	„	$747\frac{1}{2}$
zum dritten	„	450

also überhaupt 1800 Schock Faschinen.

§. 2.

Aufgabe. Ein 200 Ruthen langer Deich von 12 Fuß Höhe und einer 2 und 3 füßigen Dossirung *) hat 3000 Rthlr. gekostet; wie breit war seine Krone, wenn man weiß, daß jede Schachtruthe mit 8 Groschen bezahlt worden ist?

Auflösung. Man setze die Krone des Deichs $= X$, so erfordert die 2 füßige Dossirung auf 12 Fuß Höhe, eine Grundlinie von 24 Fuß, und die 3 füßige 36 Fuß. Da nun des trapezförmigen Profils obere Breite $= X$ und die Grundlinie $= 24 + 36 + X = 60 + X$ ist, so findet man seinen Inhalt (G. §. 223.) $=$

$$\tfrac{1}{2}(60 + X + X) . 12 = (X + 30)\ 12;$$

also der Inhalt des ganzen Deichs

$$= (X + 30) . 12 . 200 . 12 . \text{ Kubikfuße.}$$

Aber 8 Gr. $= \frac{1}{3}$ Rthlr., daher ist die Anzahl der Schachtruthen des Deichs $= \frac{3000}{\frac{1}{3}}$ oder $= \frac{3000}{\frac{1}{3}} . 144$ Kubikfuß; man erhält also:

$$(X + 30) . 12 . 200 . 12 = 9000 . 144. \text{ oder}$$
$$X + 30 = \tfrac{90}{2} \text{ folglich}$$
$$X = 15 \text{ Fuß.}$$

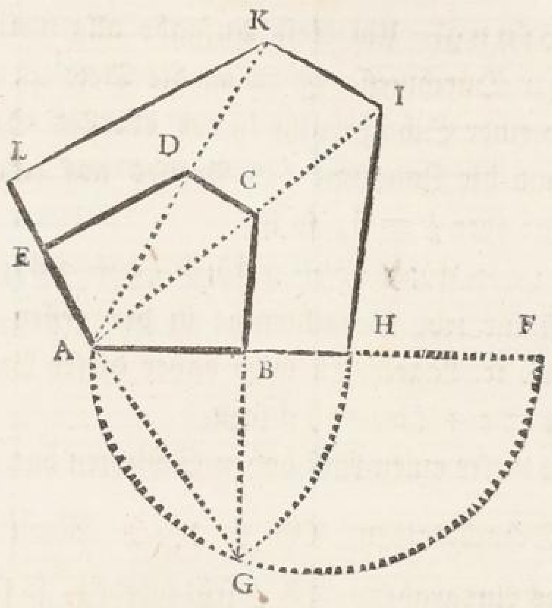
Dieses giebt den Inhalt des ganzen Deichs in Schachtruthen $= \frac{\frac{1}{2}(15 + 75) . 12 . 200 . 12}{144} = 9000.$

Rechnet man nun jede Schachtruthe zu 8 Groschen, so kommen 3000 Rthlr., wie erfordert wird.

*) Unter einer 3 füßigen Dossirung versteht man, daß auf jeden Fuß Höhe, 3 Fuß für die Grundlinie kommen.

§. 3.

Aufgabe. Eine gegebene Figur ABCDE in eine andere ähnliche zu verwandeln, welche dem Inhalte nach dreimal größer ist.



Auflösung. Man nehme AF = 3 . AB und beschreibe über AF einen halben Kreis. In B errichte man auf AB die senkrechte Linie BG und nehme AH = AG, so ist AH die Seite der gesuchten Figur AHIKL.

Denn es ist . AF . AB = AG^2. (G. §. 186.) oder
3 . AB . AB = AH^2, daher weil
$AB^2 = \frac{1}{3} AH^2$, so ist die Fläche
ABCDE = $\frac{1}{3}$ AHIKL. (G. §. 204.)

§. 4.

Aufgabe. Ein Brunnen soll 5 Fuß im Durchmesser weit, auf eine Tiefe von 48 Fuß ausgegraben werden; wie viel wird man für das Ausgraben bezahlen müssen, wenn bei der

obersten 1 Fuß hohen Lage die Schachtruthe 6 Groschen kostet, auf jeden Fuß tiefer aber noch 2 Pfennige zu dem Preise der vorhergehenden Schachtruthe zugelegt werden muß.

Auflösung. Um diese Aufgabe allgemein aufzulösen, sei der Durchmesser 5 = a; die Tiefe 48 = b; der Preiß von einer Schachtruthe in der obersten Schicht oder 6 = c, und die Zunahme des Preises auf jede folgende tiefere Lage oder $\frac{1}{6}$ = d, so ist

$$c; (c + d); (c + 2d); (c + 3d); \ldots.$$

der Preiß für jede Schachtruthe in der ersten, zweiten, dritten, 2c. 2c. Lage. Es wird daher dieser Preiß in der bten Lage = $c + (b - 1) d$ seyn.

Jede dieser einen Fuß hohen Schichten hat an Inhalt $\frac{\frac{1}{4}\pi a^2}{144}$ Schachtruthen. (G. §. 346.) Wenn daher die Kosten des Ausgrabens = X gesetzt werden, so findet man:

$$X = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2}{144}\left[c + (c + d) + (c + 2d) + \ldots . c + (b - 1) d.\right]$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\pi a^2}{144}\left[b c + d + 2d + 3d + \ldots . + (b - 1) d.\right];$$

oder wenn man die Glieder der arithmetischen Progression summirt. (R. §. 152.)

$$X = \cancel{\frac{\frac{1}{4}\pi a^2 bc}{144} \cdot \frac{bd(b-1)}{2}} \text{ oder } \frac{\frac{1}{4}\pi a^2}{144}\left[bc + \frac{bd(b-1)}{2}\right]$$

$$X = \cancel{\frac{\frac{1}{4}\pi a^2 b^2 c d (b + 1)}{288}} = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2 b}{288}\left[2c + d(b-1)\right]$$

Für den gegebenen Fall erhält man:

$$X = \frac{0,785 \cdot 25 \cdot 48 \cdot \cancel{48 \cdot 47}\ 119}{6 \cdot 288} = \cancel{7379}\ 64,8 \text{ Gr.}$$

Daher betragen die Kosten für das Ausgraben ~~307 Rthlr. 11 Gr.~~ 2 r 16 gr

§. 5.

§. 5.

Aufgabe. Ein Baumeister wurde um die Zahl seiner Leute gefragt und antwortete: Die Hälfte sind Maurer, $\frac{1}{6}$ Zimmerleute und $\frac{1}{7}$ Steinmetzen. Drei Handlanger laden Steine ab, 5 fahren Schutt und $\frac{3}{4}$ aller Handlanger tragen Mörtel und Steine zu. Wie viel sind Arbeitsleute gewesen?

Auflösung. Wenn X die Anzahl sämmtlicher Arbeitsleute und y die Anzahl der Handlanger bezeichnet, so hat man:

$3 + 5 + \frac{3}{4} y = y$ oder

$y = 32$ für die Anzahl der Handlanger.

Nun ist ferner

$\frac{1}{2} X + \frac{1}{6} X + \frac{1}{7} X + 32 = X$ oder

$\frac{34}{42} X + 32 = X$ daher

$X = \frac{32 \cdot 42}{8} = 168.$

Es sind also bei diesem Baue gewesen:

84 Maurer,
28 Zimmerleute,
24 Steinmetzen,
32 Handlanger.

168 Arbeitsleute.

§. 6.

Aufgabe. Bei einem Baue sind zweierlei Faschinen verarbeitet worden. Man weiß, daß 20 Schock von der ersten und 8 Schock von der zweiten Sorte 20 Rthlr. 8 Gr., und daß 5 Schock von der ersten und 26 Schock von der zweiten

Sorte 26 Rthlr. 2 Gr. gekostet haben. Wie groß war der Preis von jeder Sorte?

Auflösung. Wenn jedes Schock von der ersten Sorte X Rthlr. und von der zweiten y Rthlr. kostete, so hat man:

$$20X + 8y = 20\tfrac{1}{3} = \frac{61}{3} \text{ und}$$

$$5X + 26y = 26\tfrac{1}{12} = \frac{313}{12}.$$ Diese Gleichung mit 4 multiplizirt, giebt:

$$20X + 104y = \frac{313}{3},$$ und davon die erste abgezogen, so wird:

$$96y = \frac{252}{3} \text{ oder}$$

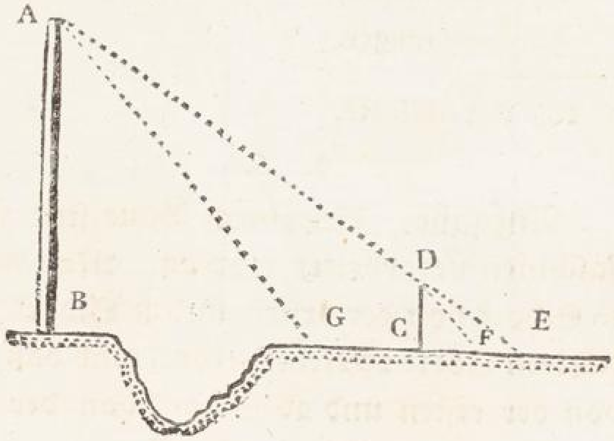
$$y = \frac{252}{3 \cdot 96} = \frac{21}{24}.$$ Es ist aber:

$$X = \frac{20\frac{1}{3} - 8y}{20} = \frac{\frac{61}{3} - \frac{21}{3}}{20} = \frac{2}{3}.$$

Daher hat das Schock Faschinen von der ersten Sorte 16 Gr. und von der zweiten 21 Gr. gekostet.

§. 7.

Aufgabe. **Eine Höhe A B, zu deren Fuß man nicht kommen kann, ohne Instrument vermittelst des Schattens zu messen.**



Auflösung. Man setze mit B auf gleichem Horizonte in C den Stab C D lothrecht, und bemerke die Verlängerung von A D in E, den Schatten des Stabs in F, und der Höhe A B in G. Hat man alsdenn gefunden: $DC = a$; $EF = b$; $EG = c$; und man setzt $AB = x$, so ist, weil D F mit A G parallel läuft: (G. §. 174.)

$$EF : EG = DF : AG, \text{ und}$$
$$DC : AB = DF : AG, \text{ daher}$$
$$EF : EG = DC : AB, \text{ oder}$$
$$b : c = a : x \quad \text{folglich}$$
$$x = \frac{a \cdot c}{b}.$$

Für $a = 5$, $b = 3$ und $c = 18$ Fuß ist $x = AB = 30$ Fuß.

§. 8.

Zusatz. Die Entfernung $BC = y$ kann leicht aus der Weite $EC = d$ gefunden werden. Denn es ist:

$$EF : EC = EG : EB \text{ oder}$$
$$b : d = c : c + y, \text{ daher (R. §. 176.)}$$
$$bc + by = cd \quad \text{folglich}$$
$$y = \frac{c(d - b)}{b}.$$

Wenn $b = 3$, $c = 28$ und $d = 13$ Fuß ist, so findet man $y = BC = \frac{28 \cdot 10}{3} = 93\frac{1}{3}$ Fuß.

§. 9.

Aufgabe. Bei drei verschiedenen Baustellen sind Mauersteine abgeladen worden: an der ersten und zweiten 7000, an der zweiten und dritten 5000 Stück, und man weiß, daß auf der dritten sich halb so viel als auf der ersten und noch

960 Stück mehr befinden. Wie viel Steine sind auf jeder Baustelle ausgeladen worden?

Auflösung. Die Anzahl der Steine auf der ersten Baustelle sey x, auf der zweiten y, und auf der dritten z, so ist nach den Bedingungen der Aufgabe:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + y = 7000, \\ \text{II.} & y + z = 5000, \\ \text{III.} & z = \tfrac{1}{2} x + 960. \end{array}$$

Man ziehe II. von I. ab, so wird

$$x - z = 2000$$

und wenn man hierzu III. addirt:

$$x = \tfrac{1}{2} x + 2960 \text{ oder}$$

$$\tfrac{1}{2} x = 2960 \text{ folglich}$$

$x = 5920.$ Anzahl der Steine auf der ersten Baustelle.
$y = 1080.$ " " " " zweiten "
$z = 3920.$ " " " " dritten "

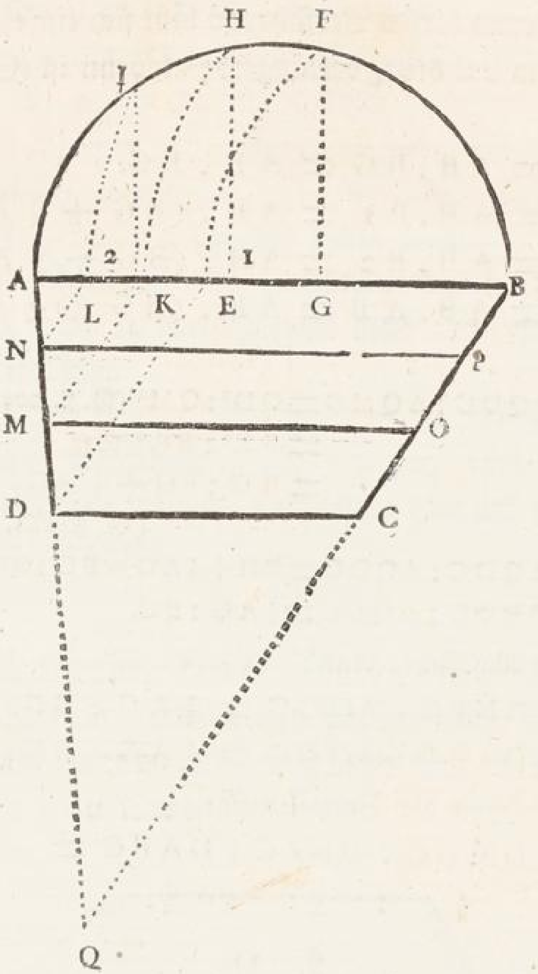
Dieses giebt:

$$\begin{aligned} x + y &= 5920 + 1080 = 7000 \\ y + z &= 1080 + 3920 = 5000 \\ z &= \tfrac{1}{2} \cdot 5920 + 960 = 3920 \end{aligned}$$

wie erfordert wird.

§. 10.

Aufgabe. Ein gegebenes Trapez A B C D in mehrere gleiche Theile, z. B. in 3, so zu theilen, daß die Theilungslinien mit der Seite A B parallel laufen.



Auflösung. Man ziehe DE mit BC parallel, beschreibe über AB einen halben Kreis, trage BE aus B in F und lasse auf AB die senkrechte Linie FG fallen. Ferner theile man GA in drei gleich große Theile G. 1, 1. 2, 2. A; errichte auf AB die senkrechte Linien 1. H, 2. I, und nehme BK, BL = BH, BI. Wird nun KM, LN mit ED parallel gezogen, so bestimmen sich dadurch die Punkte M, N, durch welche die mit AB parallele Theilungslinien gehen.

Der Grund dieses Verfahrens läßt sich einsehen, wenn man AD und BC bis Q verlängert; alsdenn ist (G. §. 186.) BF^2 oder

$$BE^2 = AB \,.\, BG = AB \,.\, BG.$$
$$BK^2 = AB \,.\, B1 = AB \,.\, (BG + \tfrac{1}{3} AG).$$
$$BL^2 = AB \,.\, B2 = AB \,.\, (BG + \tfrac{2}{3} AG).$$
$$BA^2 = AB \,.\, AB = AB \,.\, (BG + \tfrac{3}{3} AG).$$

Ferner:

$$\triangle QDC : \triangle QMO = QD^2 : QM^2$$ (G. §. 204.) oder
$$= BE^2 : BK^2$$ oder
$$= BG : BG + \tfrac{1}{3} AG,$$ folglich (G. §. 164.)

$$\triangle QMO - \triangle QDC : \triangle QDC = BG + \tfrac{1}{3} AG - BG : BG$$ oder
$$\text{Trap. } DMOC : \triangle QDC = \tfrac{1}{3} AG : BG.$$

Auf gleiche Art findet man:

$$\text{Trap. } DNPC : \triangle QDC = \tfrac{2}{3} AG : BG.$$
$$\text{Trap. } DABC : \triangle QDC = \tfrac{3}{3} AG : BG,$$ folglich

wegen Gleichheit der Verhältnisse:

$$\text{Trap. } DMOC : DNPC : DABC =$$
$$\tfrac{1}{3} : \tfrac{2}{3} : \tfrac{3}{3}.$$

§. 11.

Zusatz. Sollte das Trapez ABCD nach einem andern Verhältnisse eingetheilt werden, so läßt sich leicht einsehen, daß man nur nöthig hat die Linie GA nach diesem Verhältniß zu theilen, und übrigens auf eine ähnliche Art wie vorhin zu verfahren.

Sollte von dem gegebenen Viereck keine Seite mit der andern parallel seyn, so läßt sich durch eine sehr einfache Operation dem Viereck die erforderliche Gestalt geben.

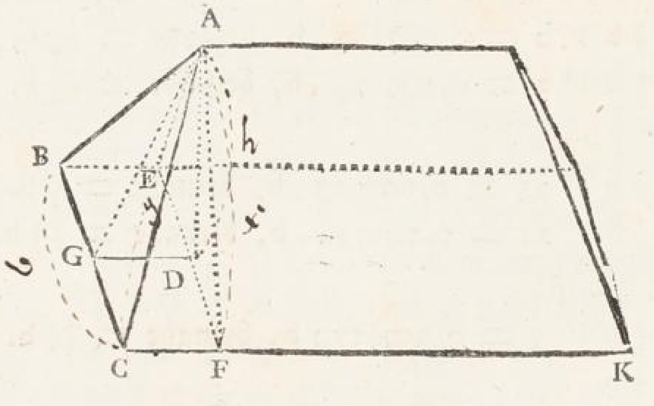
Anmerkung. Die Auflösung vorstehender Aufgabe hat schon Hr. G. R. Böhm in der Meßkunst auf dem

Felde (1759.) §. 105. abgehandelt, allein in den Zusätzen welche der zweiten Auflage (1779.) angehängt sind, ersucht derselbe (Seite 11.) diese Auflösung §. 105. weg zu streichen, und giebt daselbst eine nicht minder weitläufige. Da nun Hr. G. O. B. R. Schulze im ersten Heft seines Taschenbuchs (1782.) gleichfalls eine sehr verwickelte Auflösung mittheilt, so wird die hier gegebene nicht ohne einigen Vortheil seyn.

Im dritten Theil des Hrn. P. Mayers praktischen Geometrie (1783.) §. 309. isten Zus. findet man diese Aufgabe gleichfalls, aber auf eine andere Art aufgelößt.

§. 12.

Aufgabe. **Aus der gegebenen Breite** BC = b **und Höhe** AD = h **eines Walmdachs, die Länge des Sparrens** A F = x **und des Eckſparrens** A C = y **zu finden.**



Auflösung. Es ist $AF^2 = AD^2 + DF^2$. (G. §. 108.)

oder $x^2 = h^2 + \frac{1}{4} b^2$ folglich

$x = \sqrt{(h^2 + \frac{1}{4} b^2)}$.

Damit nun die Neigung der Fläche A B C gegen den Ho=

rizont, der Neigung des Dachs ACK gleich ist, so wird erfordert daß $DG = DF$ also $AG = AF$ sey. Man hat daher $AG = x$ und

$$AC^2 = AG^2 + GC^2$$ oder

$$y^2 = x^2 + \tfrac{1}{4} b^2 = h^2 + \tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{4} b^2$$ folglich

$$y = \sqrt{(h^2 + \tfrac{1}{2} b^2)},$$

§. 13.

Zusatz. Für $h = nb$ ist

$$x = \tfrac{1}{2} b \sqrt{(4n^2 + 1)}$$ und

$$y = \tfrac{1}{2} b \sqrt{(4n^2 + 2)}.$$

Man erhält daher bei altdeutschen Dächern wo $h = b$ ist:

$x = \tfrac{1}{2} b \sqrt{5} = 1{,}118034 . b$, beinahe $= \tfrac{19}{17}$ b.

$y = \tfrac{1}{2} b \sqrt{6} = 1{,}224745 . b$, beinahe $= \tfrac{27}{22}$ b.

Bei Kirchdächern wo $h = 2b$ ist, hat man:

$x = \tfrac{1}{2} b \sqrt{17} = 2{,}061553 . b$, beinahe $= \tfrac{33}{16}$ b.

$y = \tfrac{1}{2} b \sqrt{18} = 2{,}121320 . b$, beinahe $= \tfrac{53}{25}$ b.

Wenn $h = \tfrac{1}{2} b$ ist, so erhält man für neudeutsche Dächer

$x = \tfrac{1}{2} b \sqrt{2} = 0{,}707107 . b$, beinahe $= \tfrac{17}{24}$ b.

$y = \tfrac{1}{2} b \sqrt{3} = 0{,}866025 . b$, beinahe $= \tfrac{13}{15}$ b.

Für $h = \tfrac{1}{3} b$ ist:

$x = \tfrac{1}{6} b \sqrt{13} = 0{,}600925 . b$, beinahe $= \tfrac{3}{5}$ b.

$y = \tfrac{1}{6} b \sqrt{22} = 0{,}781736 . b$, beinahe $= \tfrac{18}{23}$ b.

Für $h = \tfrac{1}{4} b$ ist:

$x = \tfrac{1}{4} b \sqrt{5} = 0{,}559017 . b$, beinahe $= \tfrac{14}{25}$ b.

$y = \tfrac{3}{4}$ b.

In dem Falle daß $b = x$ wird, erhält man

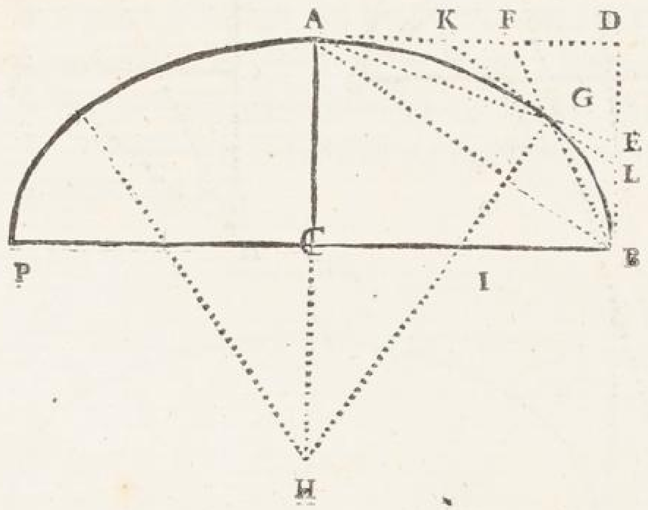
$$AC^2 = AG^2 + GC^2$$ oder

$$y^2 = b^2 + \tfrac{1}{4} b^2$$ folglich

$$y = \tfrac{1}{2} b \sqrt{5} = 1{,}118034 . b,$$ beinahe $= \tfrac{19}{17}$ b.

§. 14.

Aufgabe. Einen gedruckten Bogen B G A mit dem Zirkel zu beschreiben, wenn die halbe Weite B C und die Höhe A C gegeben ist.



Auflösung. Man theile die Winkel B A D, A B D in zwei gleiche Theile durch A E, B F; so ist, wenn G H auf A B senkrecht stehet, G H = A H der Halbmesser des Bogens A G, und G I = I B der Halbmesser des Bogens G B.

Dieses läßt sich leicht einsehen wenn man K L durch G auf G H senkrecht zieht. Alsdenn ist der Winkel

B A G = G A D, vermöge der Zeichnung, und
B A G = A G K, (G. §. 82.) daher
G A D = A G K. Aber
H A D = H G K, v. d. Z. also
H A D − G A D = H G K − A G K oder
H A G = H G A, folglich (G. §. 63.)
H A = H G.

Auf gleiche Art findet sich: I G = I B.

§. 15.

Fig. 1.

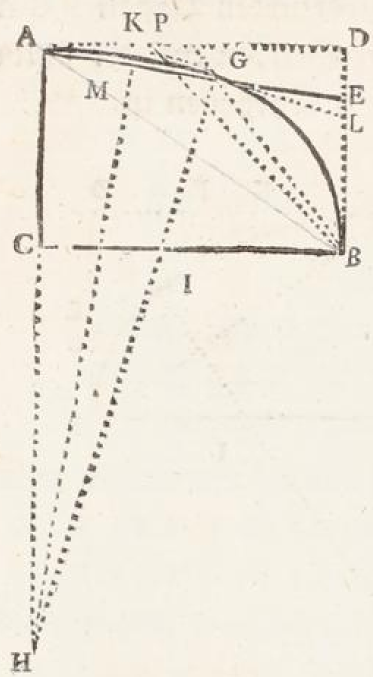
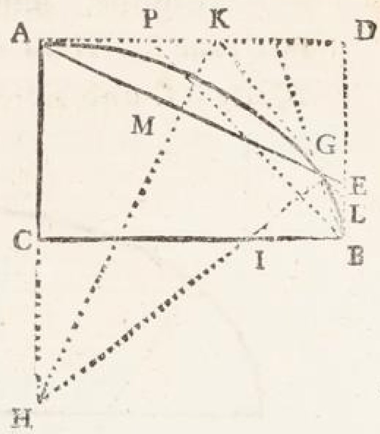


Fig. 2.



Zusatz. Soll der Bogen AGB mehr oder weniger gegen D gekrümmt seyn, so nehme man BE willkürlich größer (Fig. 1.) oder kleiner (Fig. 2.) an. Wird nun DP = DB und der Winkel PBG = DAE genommen, so wird die auf der Mitte von A G errichtete senkrechte Linie M H den Mittelpunkt H für den Bogen AG, und die Linie GH den Mittelpunkt I für den Bogen GB bestimmen.

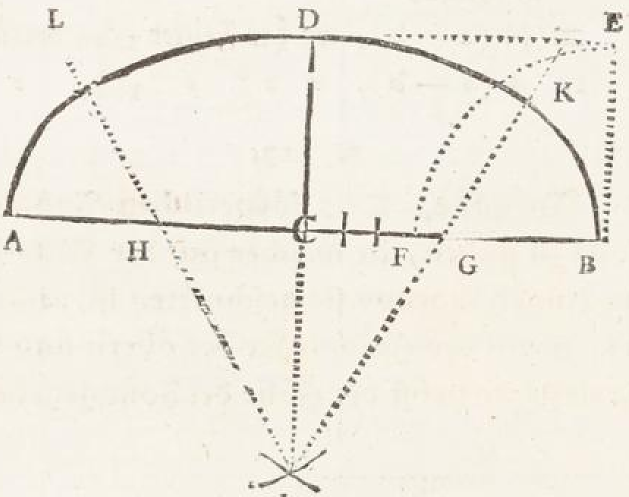
Um den Grund hiervon einzusehen, verlängere man H M bis K und ziehe die Linie K G L, so ist der Winkel

GAH = AGH, weil Δ AHM = GHM, und
GAD = AGK, weil Δ AKM = GKM, folglich
GAH + GAD = AGH + AGK. Aber
GAH + GAD = 90° daher
AGH + AGK = 90°.

Folglich ist KL eine gemeinschaftliche Tangente des Bogens AG und GB. (G. §. 140.)

Anmerkung. Herr C. Woltmann im 2ten Theil seiner schätzbaren Beiträge zur hydraulischen Architektur (1792.) §. 17. hat diese Art, Bogen nach dem §. 14. zu zeichnen sehr schön auf die Abründung der vorstehenden Ecken bei Deichen angewandt. Ganz allgemeine Untersuchungen hierüber findet man in Hrn. H. R Kästners geometrischen Abhandlungen (1790.) 1. Theil. 44. Abh.

§. 16.



In der Anweisung zur Zimmermannskunst von C. G. Reuß (1789.) §. 167. befindet sich noch eine andere Art einen gedruckten Bogen zu beschreiben. Es sey AB die Weite des Bogens und CD die Höhe desselben. Man nehme BF = BE; theile CF in drei gleiche Theile, und mache FG = $\frac{1}{3}$ CF und CH = CG. Wird alsdenn GI = HI = GH genommen, so sind G und H die Mittelpunkte der Bogen BK und AL, und I der Mittelpunkt des Bogens KDL. Weil aber diese Regel ohne allen Beweiß vorgetragen ist, so kann auf folgende Art die Zuverlässigkeit derselben untersucht werden.

Man nenne $BC = a$, $CD = b$, $CG = x$, so ist

$GI = 2x$ und $BG = GK = a - x$.

Aber $CI = \sqrt{(GI^2 - CG^2)}$ oder

$CI = \sqrt{(4x^2 - x^2)} = x\sqrt{3}$, und weil

$CI + CD = GI + GK$ sein muß, oder

$x\sqrt{3} + b = 2x + a - x$ oder

$x\sqrt{3} - x = a - b$, so findet man

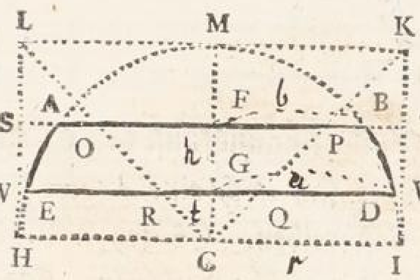
$CG = x = \frac{a-b}{0,7320508}$, oder beinahe

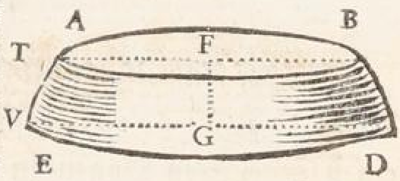
$= \frac{15}{11}(a-b)$, wo der Fehler $\frac{1}{1000}$ beträgt,

$= \frac{4}{3}(a-b)$, " " " $\frac{18}{1000}$ "

§. 17.

Aufgabe. **Den körperlichen Inhalt einer Zone zu finden, in welcher sich der Mittelpunkt der Kugel, woraus sie geschnitten ist, nicht befindet, wenn der Halbmesser der obern und untern Kreisfläche nebst der Höhe der Zone gegeben sind.**





Auflösung. Wenn HI der Durchmesser der Kugel ist, woraus die Zone ABDE geschnitten worden, so sey CIKM ein Quadrat, in welchem die Diagonal CK gezogen ist. Alsdann kann man sich vorstellen, daß durch die

also der körperliche Inhalt des Kegels ORC $= \frac{1}{3}\pi(t^2+2th+h^2)(t+h) = \frac{1}{3}\pi(t^3+3t^2h+3th^2+h^3)$. der körperliche Inhalt des kleinen Kegels QRC $= \pi t^2 \times \frac{t}{3} = \frac{1}{3}\pi t^3$. d. folglich der abgekürzte Kegel O Fläche $= \frac{1}{3}\pi(t^3+3t^2h+3th^2+h^3) - \frac{1}{3}\pi t^3 = \frac{1}{3}\pi(t^3+3t^2h+3th^2+h^3 - t^3 \ldots) = \frac{1}{3}\pi h(3t^2+3th+h^2)$ oder auch R

$z\ OPQR = \frac{1}{3}\pi h(t^2+t^2+t^2+2th+th+h^2)$ oder auch
$\frac{1}{3}\pi h(t^2+2th+h^2+t^2+ht+t^2 = \frac{1}{3}\pi h((t+h)^2+(t+h)t+t^2)$

Umdrehung um F G, die Fläche F G D B eine Zone, die Fläche F G Q P einen abgekürzten Kegel, und die Fläche F G V T einen Cylinder erzeuge. In der Geometrie wird aber bewiesen daß die Zone A B D E und der abgekürzte Kegel O P Q R dem Cylinder S T V W gleich sind. ABDE + OPQR = STVW

Man setze die gegebenen Größen $GD = a$, $FB = b$, $FG = h$; die unbekannten $CI = r$, $CG = t$ und den Inhalt der Zone $ABDE = z$, so ist

$FP = FC = t + h$; $GQ = GC = t$, also der Inhalt des Cylinders $STVW = \pi r^2 h$.

abgek. Keg. $OPQR = \frac{1}{3}\pi h\,[(t+h)^2 + (t+h)\,t + t^2]$,

(Kästn. Geomet. (1786) S. 394.) F

$= \pi h\,[t^2 + h\,t + \frac{1}{3}h^2]$, folglich

$$z = \pi h\,(r^2 - t^2 - h\,t - \tfrac{1}{3}h^2).$$

Es ist aber $CI^2 = CG^2 + GD^2 = CF^2 + FB^2$ oder

$r^2 = t^2 + a^2 = (t+h)^2 + b^2$ daher

$$t = \frac{a^2 - b^2 - h^2}{2\,h}.$$

Setzt man nun in die für z gefundene Gleichung $r^2 = t^2 + a^2$, so erhält man

$z = \pi h\,(t^2 + a^2 - t^2 - h\,t - \frac{1}{3}h^2) = \pi h\,(a^2 - h\,t - \frac{1}{3}h^2)$

und wenn man ferner den für t gefundenen Werth hinein setzt, so ist

$$z = \pi h\,(a^2 - h\,.\,\frac{a^2 - b^2 - h^2}{2\,h} - \tfrac{1}{3}h^2)$$

$$= \pi h\,(a^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 + \tfrac{1}{2}h^2 - \tfrac{1}{3}h^2) \text{ folglich}$$

$$z = \tfrac{1}{6}\pi h\,(3\,a^2 + 3\,b^2 + h^2).$$

Beispiel. Bei einer Zone sei der Halbmesser der untern Kreisfläche $a = 7$ Fuß, der obern $b = 5$ Fuß und die Höhe der Zone $h = 3$ Fuß, so ist der Inhalt

$z = \frac{1}{6}\,.\,3{,}1416\,.\,3\,(3\,.\,49 + 3\,.\,25 + 9) = 362{,}85$ K. Fuße.

~~FC = t+h folglich auch $b^2 = (t+h)^2$~~ Der Kegel OPQR =
OPC − QRC; die Grundfläche des Kegels hat den Halbmesser FP.
FP = t+h also auch $FP^2 = (t+h)^2$ also die Grundfläche $\pi(t+h)^2$
die Endfläche hat den Radius GQ = t folglich die Endfläche ~~$\pi(t^2)$~~ πt^2
die Grundfläche also $= \pi(t^2+2th+h^2)$. Die Höhe des Kegels ist t+h
$\frac{t+h}{b}$

§. 18.

Erster Zusatz. Liegt der **Mittelpunkt der Kugel** in der Grundfläche der Zone, so wird $a = r$ also $b^2 = r^2 - h^2$; setzt man diesen Ausdruck in die gefundene allgemeine Formel, so findet man den Inhalt einer Zone in deren Grundfläche der Mittelpunkt der Kugel liegt.

$$= \tfrac{1}{6} \pi h (3 r^2 + 3 (r^2 - h^2) + h^2) \text{ oder}$$
$$= \tfrac{1}{3} \pi h (3 r^2 - h^2).$$

Beispiel. Wenn der Halbmesser der untern Kreisfläche, welcher zugleich Halbmesser der ganzen Kugel ist, $r = 6$ Fuße und die Höhe der Zone $h = 2$ Fuße gegeben sind, so findet man den körperlichen Inhalt:

$$= \tfrac{1}{3} \cdot 3,1416 \cdot 2 (3 \cdot 36 - 4) = 217,81. \text{ K. Fuße.}$$

§. 19.

Zweiter Zusatz. Für $b = 0$ erhält man aus dem §. 17. den Inhalt eines **Kugelabschnitts**

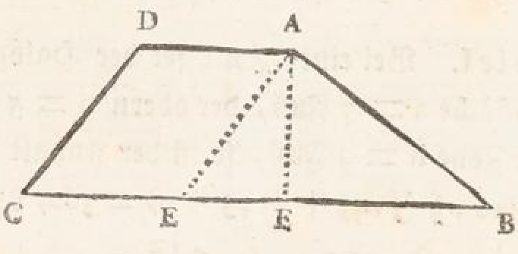
$$= \tfrac{1}{6} \pi h (3 a^2 + h^2).$$

Beispiel. Wenn der Halbmesser von der Grundfläche des Abschnitts $a = 5$ Fuße und die Höhe $h = 3$ Fuße ist, so findet man den Inhalt des Kugelabschnitts

$= \tfrac{1}{6} \cdot 3,1416 \cdot 3 (3 \cdot 25 + 9) =$ ~~1060, 29. K.~~ Fuße.
132,

§. 20.

Aufgabe. Aus den beiden Dossirungen AB, DC und der obern und untern Breite AD, BC eines Deichs, den Flächeninhalt seines Profils zu finden.



Auflösung. Es sei $BC = a$, $AB = b$, $AD = c$, $DC = d$. $AF = x$, Winkel $ABC = \varphi$.

Man setze $BE = a - c = f$ und den □ Inhalt von dem Trapez $ABCD = Q$, so ist
$x = b \sin. \varphi$, (G. §. 259.) und

$$\mathrm{Cos.}\,\varphi = \frac{f^2 + b^2 - d^2}{2fb}.$$ (G. §. 262.) Aber

$$\mathrm{Sin.}\,\varphi = \sqrt{(1 - \cos.\varphi^2)} = \sqrt{\left(\frac{4f^2b^2 - (f^2 + b^2 - d^2)^2}{4f^2b^2}\right)}$$

folglich (G. §. 223.)

$$Q = \tfrac{1}{2}(a+c)\,x = \tfrac{1}{2}(a+c)\,b \sin.\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2}(a+c)\,b\sqrt{\left(\frac{4f^2b^2 - (f^2 + b^2 - d^2)^2}{4f^2b^2}\right)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\frac{a+c}{f}\sqrt{\left[(2fb + f^2 + b^2 - d^2)\,.\,(2fb - f^2 - b^2 + d^2)\right]}$$

$$= \tfrac{1}{4}\frac{a+c}{a-c}\sqrt{\left[((f+b)^2 - d^2)\,.\,(d^2 - (f-b)^2)\right]}$$

$$= \tfrac{1}{4}\frac{a+c}{a-c}\sqrt{\left[(f+b+d)\,.\,(f+b-d)\,.\,(f+d-b)\,.\,(b+d-f)\right]}.$$

Beispiel. Wenn in einem besondern Falle $a = 60$, $b = 22$, $c = 18$, $d = 32$ Fuß ist, so wird $f = 42$, daher
$Q = \frac{78}{4.42}\sqrt{(96.32.52.12)} = 642,8$ □ Fuße.

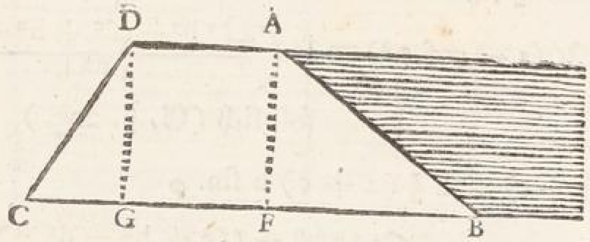
§. 21.

Zusatz. Diese Auflösung kann allgemein angewandt werden, wenn aus den 4 Seiten eines Trapez der Flächeninhalt gefunden werden soll.

Auch läßt sich aus den 4 gegebenen Seiten das Trapez leicht verzeichnen, weil man nur $BE = a - c$, $AB = a$ und $AE = d$ nehmen darf, so ist der Winkel φ bestimmt.

§. 22.

Aufgabe. Aus der gegebenen Wasserhöhe vor einem Deiche, nebst der innern und äußern Dossirung desselben, die Breite der Krone zu bestimmen, damit derselbe dem hydrostatischen Drucke des Wassers hinlänglich widerstehe.



Auflösung. Man setze die gegebene lothrechte Höhe A F $=$ a und das Verhältniß der Grundlinie zur Höhe bei der äußern Dossirung $= m : 1$, bei der innern $= n : 1$. Das spezifische Gewicht des Wassers sey $= \gamma$, der Deicherde $=$ e, und die Frikzion welche entstehet wenn man die Deichmasse A B C D längst der Linie B C horizontal wegschiebt, verhalte sich zum Druck $= \mu : 1$. Nimmt man nun zu mehrerer Sicherheit an, daß der Deich von dem davor stehenden Wasser durchdrungen werde und setzt die Breite der Krone A D $=$ x, so verhält sich

$1 : m = AF : FB$ also

$FB = m\,a$, und eben so $CG = n\,a$, daher ist der Flächeninhalt

des Profils $ABCD = x\,a + \frac{1}{2} m\,a^2 + \frac{1}{2} n\,a^2$ und

das Gew. v. $ABCD = (e - \gamma) . (x + \frac{1}{2} m\,a + \frac{1}{2} n\,a)\,a.$

(Hst. §. 26.)

Das Wasser welches vor dem Deiche steht, verursacht einen vertikalen Druck auf die äußere Dossirung

AB

$AB = \frac{1}{2} a . BF . \gamma = \frac{1}{2} m a^2 \gamma$, (Hst. §. 19.) also ist der gesammte Druck auf die Fläche

$BC = (e - \gamma)(x + \frac{1}{2} m a + \frac{1}{2} n a) a + \frac{1}{2} m a^2 \gamma$.

Die Frikzion welche von diesem Druck herrührt, muß mit dem horizontalen Druck des Wassers im Gleichgewicht seyn. Es ist aber dieser Druck $= \frac{1}{2} a^2 \gamma$. Soll nun der Deich dieser Pressung nicht nur das Gleichgewicht halten, sondern auch mit einem hinlänglichen Ueberschuß widerstehen, so wird für die Ausübung, wo die Erde nicht immer von einerlei Güte ist, und wo durch eine einzige schwache Stelle die größten Unglücksfälle zu besorgen sind, der Widerstand des Deichs wenigstens dreimal so groß angenommen werden müssen als das Gleichgewicht erfordert. Man erhält daher:

$\mu [(e - \gamma)(x + \frac{1}{2}(m + n) a) a + \frac{1}{2} m a^2 \gamma] = \frac{3}{2} a^2 \gamma$, oder

$\mu (e - \gamma) x a = \frac{3}{2} a^2 \gamma - \frac{1}{2} \mu m a^2 \gamma - \frac{1}{2} \mu (e - \gamma)(m + n) a^2$

folglich:

$$x = \frac{\gamma (3 - \mu m) a - \mu (e - \gamma)(m + n) a}{2 \mu (e - \gamma)}$$

§. 23.

Zusatz. Gewöhnlich wird bei **Flußdeichen** die äußere Dossirung 3füßig und die innere 2füßig angenommen; es ist daher $m = 3$, $n = 2$, und weil es nicht erlaubt ist auf lauter gute Erde zu rechnen, so kann man $\mu = \frac{1}{2}$ setzen. Der Kubikfuß Deicherde wiegt im Durchschnitt 100 Berliner Pfunde, daher ist $e - \gamma = 100 - 65,3 = 34,7$, folglich

$$x = \frac{[65,3 \cdot (3 - \frac{3}{2}) - \frac{1}{2} \cdot 34,7 \cdot 5] \cdot a}{34,7} = 0,322 . a$$

oder beinahe:

$x = \frac{1}{3} a$, für die Breite der Krone.

§. 24.

Aufgabe. Wie stark müssen die Schaken einer Kette seyn, damit solche ohne Gefahr zu zerreissen, ein Gewicht von Q ℔ tragen kann?

Auflösung. Die gesuchte Dicke der Kette sey x. Zerreißt nun dieselbe, so muß sich eine Schake entweder an zwei verschiedenen Stellen oder nur an einer trennen. Man setze die absolute Festigkeit eines Cylinders von der Dicke $x = f$, so wird im ersten Falle für das Zerreissen die absolute Festigkeit $= 2f$ zu überwältigen seyn. Im zweiten Falle ist zwar nur die absolute Festigkeit f zu überwältigen; allein die untere Schake, welche die obere zerreißt, würkt in der Mitte eines Hebelarms, also kann man sich auch hier vorstellen, daß die absolute Festigkeit $2f$ zu überwältigen ist. Damit aber die Kette für allem Zerreissen sicher sey, so wird man die absolute Festigkeit derselben nur halb so groß in Rechnung bringen können, daher ist

$$Q = f.$$

Für eine besondere Materie sey m die absolute Festigkeit von einem □ Zolle derselben, so erhält man:

$$Q = \frac{1}{4}\pi x^2 m \text{ folglich}$$

$$x = \sqrt{\frac{Q}{\frac{1}{4}\pi m}} = 1,128379 \sqrt{\frac{Q}{m}}.$$

wo Q, m in Pfunde und x in Zolle ausgedrückt ist.

Beispiel. Es wird die Dicke einer geschmiedeten eisernen Kette verlangt, welche mit Sicherheit eine Last von 6000 Pfund tragen kann.

In des Hrn. D. Achard Experimentalphysik (1791) 1. Th. S. 37. findet man für diesen Fall m zwischen 70000 und 80000 Pfund. Nimmt mann zur Sicherheit $m = 70000$, so ist

$$x = 1,128 \sqrt{\frac{6000}{70000}} = 0,33 \text{ Zolle oder } 3,96 \text{ Linien.}$$

§. 25.

Aufgabe. Aus dem gegebenen Inhalt Q und dem Umfange a eines Rechtecks seine Grundlinie und Höhe zu finden.

Auflösung. Man setze die Grundlinie $= x$, die Höhe $= y$, so ist:

$$Q = xy, \text{ und}$$
$$\tfrac{1}{2}a = x + y, \text{ daher}$$
$$y = \frac{Q}{x} = \tfrac{1}{2}a - x, \text{ also}$$
$$x^2 - \tfrac{1}{2}ax + Q = 0, \text{ folglich}$$
$$x = \tfrac{1}{4}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{16}a^2 - Q)} \text{ und}$$
$$y = \tfrac{1}{4}a \mp \sqrt{(\tfrac{1}{16}a^2 - Q)}.$$

Diese Ausdrücke geben doppelte Werthe, weil man die Höhe auch als Grundlinie oder umgekehrt ansehen kann.

Beispiel. Mit einem 80 Ruthen langen Zaune ist ein Morgen Land zu 180 □ Ruthen gerechnet, rechtwinklicht eingeschlossen, wie lang und breit ist dieser Zaun gewesen?

Es ist also hier die Länge oder

$$x = 20 + \sqrt{220} = 20 + 14,832 = 34,832 \text{ Ruthen,}$$

und die Breite oder

$$y = 20 - \sqrt{220} = 20 - 14,832 = 5,168 \text{ Ruthen.}$$

Anmerkung. Weder in den Karstenschen Anfangsgründen, noch in der mathematischen Analysis befindet sich die Auflösung der vollständigen quadratischen Gleichungen; weshalb hierbei entweder der Auszug aus den Anfangsgründen oder jede andere Anleitung zur Algebra benützt werden kann.

§. 26.

Aufgabe. Ein Wasserbehälter hat von drei Quellen Zufluß. Die zweite Quelle füllt den Behälter in $\frac{2}{3}$ der Zeit an, darin solcher von der ersten gefüllt wird; und wenn die dritte Quelle noch 6 Stunden länger als die erste läuft, so wird der Behälter gleichfalls angefüllt.

Man fragt in wie viel Zeit jede Quelle den Behälter für sich füllen würde, wenn bekannt ist, daß alle drei Quellen dieses in 9 Stunden leisten können?

Auflösung. Setzt man die Zeit in welcher die erste Quelle den Behälter füllt $= x$;
so ist diese Zeit für die zweite Quelle $= \frac{2}{3} x$;
und für die dritte Quelle $= x + 6$.

Wird nun die ganze Wassermenge in dem vollen Behälter $= 1$ gesetzt, so verhält sich

$x : 9 = 1 : \frac{9}{x}$; also ist $\frac{9}{x}$ die Wassermenge welche die erste Quelle in 9 Stunden giebt.

$\frac{2}{3} x : 9 = 1 : \frac{27}{2x}$; Wassermenge der zweiten Quelle.

$x + 6 : 9 = 1 : \frac{9}{x+6}$; Wassermenge der dritten Quelle.

Diese zusammengenommen müssen der Wassermenge im ganzen Behälter gleich seyn, also

$\frac{9}{x} + \frac{27}{2x} + \frac{9}{x+6} = 1$, oder mit $2x(x+6)$ multiplizirt

$18(x+6) + 27(x+6) + 18x = 2x(x+6)$.

Alles aufgelöst und die Gleichung geordnet, giebt

$2x^2 - 51x - 270 = 0$; mit 2 ~~multiplizirt~~: dividirt

$x^2 - \frac{51}{2} x - 135 = 0$.

Hieraus erhält man:

$$x = \frac{51}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{2601}{16} + 135\right)} = \frac{51}{4} \pm \frac{69}{4} \text{ oder}$$

$x = 30.$

Folglich wird die erste Quelle den Behälter in 30 Stunden anfüllen.

Für die zweite Quelle ist die erforderliche Zeit

$$\tfrac{2}{3}\,x = \tfrac{2}{3} \cdot 30 = 20 \text{ Stunden;}$$

und für die dritte:

$$x + 6 = 30 + 6 = 36 \text{ Stunden.}$$

Diese Aufgabe wird für jeden andern Fall oder allgemein aufgelößt, wenn man

$\frac{2}{3} = a$, $6 = b$ und $9 = c$ setzt, alsdann ist wie vorhin

$$x : c = 1 : \frac{c}{x},$$

$$ax : c = 1 : \frac{c}{ax},$$

$$x + b : c = 1 : \frac{c}{x+b}; \text{ daher}$$

$\frac{c}{x} + \frac{c}{ax} + \frac{c}{x+b} = 1.$ Dieses mit $ax(x+b)$ multiplizirt

$ac(x+b) + c(x+b) + acx = ax(x+b)$; aufgelößt und geordnet:

$ax^2 + (ab - 2ac - c)\,x - (abc + bc) = 0$, oder

$$x^2 + \frac{ab - 2ac - c}{a}\,x - \frac{abc + bc}{a} = 0; \text{ daher}$$

$$x = \frac{2ac + c - ab}{2a} \pm \sqrt{\left[\frac{(2ac + c - ab)^2}{4a^2} + \frac{abc + bc}{a}\right]}.$$

Wenn man den Ausdruck unter den Wurzelzeichen auflöst und abkürzt, so erhält man:

$$x = \frac{2ac + c - ab \pm \sqrt{[c^2(2a+1)^2 + ab(ab + 2c)]}}{2a}$$

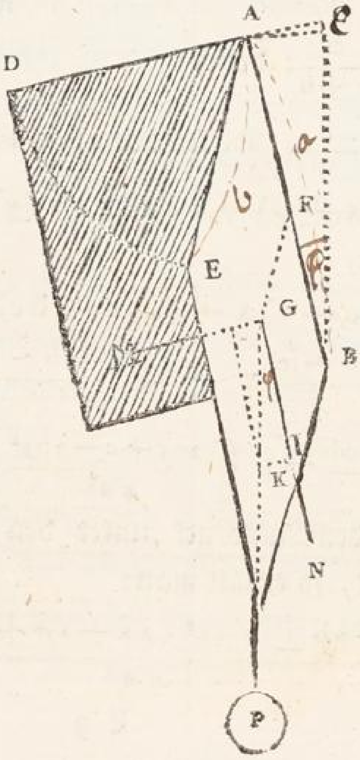
Aus diesem allgemeinen Ausdruck läßt sich für jeden gegebenen Fall x geradezu bestimmen; also für das vorige Beispiel

$$x = \frac{2.\frac{2}{3}.9 + 9 - \frac{2}{3}.6 \pm \sqrt{[9^2(2.\frac{2}{3}+1)^2 + \frac{2}{3}.6(\frac{2}{3}.6+2.9)]}}{2.\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{17 \pm 23}{2.\frac{2}{3}} = 30.$$

§. 27.

Aufgabe. Eine Schleusenthüre A D unter einem Winkel A B C = φ, so gegen die Vertikallinie C B zu neigen, daß solche, wenn sie um den rechten Winkel D A E bis E geöfnet wird, vermöge ihres Gewichts hinreichend ist, die Reibung an den Zapfen zu überwältigen, und sich daher, wenn kein Druck von innen vorhanden ist, von selbsten verschließen muß.



Auflösung. Wenn die Länge der Thüre $AB = a$, die Breite $AE = b$, das Gewicht derselben $= P$, und der Schwerpunkt der Thüre in G liegt, so wird seine senkrechte Entfernung von $AB = FG = \frac{1}{2} b$ seyn. Durch G ziehe man die vertikale Linie GK, und GI in der Ebene BE mit AB parallel, so ist der Winkel $KGI = ABC = \varphi$. (G. §. 282.) Ferner sey GM auf der Ebene BE senkrecht, so zerlegt sich die Kraft P in zwei andere Kräfte M und N nach GM und GN, und es verhält sich:

$$P : M : N = GK : KI : GI. \quad \text{(St. §. 96.)}$$

Aber $KGI = \varphi$, daher

$$M = P \sin. \varphi; \; N = P \cos. \varphi.$$

Man setze die Halbmesser der Zapfen bei A, $B = r, \varrho$, und das Verhältniß der Frikzion zum Druck bei A, $B = m, n$; so ist der von M herrührende Druck auf jeden dieser Zapfen $= \frac{1}{2} M$, (St. §. 101.) und das davon herrührende Moment der Frikzion

$$\text{bei } A = \tfrac{1}{2} m r P \sin. \varphi \text{ und}$$
$$\text{bei } B = \tfrac{1}{2} n \varrho P \sin. \varphi.$$

Ferner verursacht die Kraft N auf den Zapfen bei B einen Druck nach der Richtung $AB = N = P \cos \varphi$, und es ist das davon herrührende Moment der Frikzion $=$

$$\tfrac{2}{3} n \varrho P \cos. \varphi. \quad \text{(M. L. §. 148.)}$$

† Nach den Bedingungen der Aufgabe sollen nun diese 5 ~~drei~~ Momente mit dem Momente FG . M im Gleichgewicht seyn, es ist daher $\left(+\frac{mrb}{2a} P\cos\varphi + \frac{n\varrho b}{2a} P\cos\varphi\right.$

$$\tfrac{1}{2} b P \sin. \varphi = \tfrac{1}{2} m r P \sin. \varphi + \tfrac{1}{2} n \varrho P \sin. \varphi + \tfrac{2}{3} n \varrho P \cos. \varphi$$

$\frac{+6a}{P}$ Oder alles mit ~~2~~ multiplizirt und ~~durch P dividirt~~ geordnet

X ~~$(3b - 3mr - 3n\varrho) \sin. \varphi = 4 n \varrho \cos. \varphi.$~~

folglich (G. §. 232.)

ϕ ~~$\text{Tgt. } \varphi = \frac{4 n \varrho}{3(b - mr - n\varrho)}$~~

C 4

† Diese Kraft N zerlegt sich in den Zapfen bey A nach der Richtung AE, mit einer Kraft $\frac{\frac{1}{2}b}{a} N$, u. den Zapfen bey B nach entgegengesetzter Richtung mit einer Kraft $\frac{\frac{1}{2}b}{a} N$; (St. §133) u. man erhält das Moment der Reibungen bey $A = \frac{bmr}{2a} P.\cos\varphi$, u. bey $B = \frac{n\varrho b}{2a} P\cos\varphi$

X $(3ab - 3amr - 3an\varrho)\sin\varphi = (4an\varrho + 3bmr + 3bn\varrho)\cos\varphi$

ϕ $\quad tg\,\varphi = \frac{n\varrho(4a+3b) + 3bmr}{3a(b - mr - n\varrho)}$

§. 28.

Zusatz. Soll die Weite $AC = x$ gefunden werden, so ist (G. §. 257.) $\text{Tgt.}\,\varphi = \frac{AC}{BC}$ oder weil AC gegen BC nur sehr klein ist:

$$\text{Tgt.}\,\varphi = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{a}, \text{ daher}$$

$$\cancel{x = \frac{4n\varrho a}{3(b - mr - n\varrho)}},\ x = \frac{ng(4a+3b)+3bmr}{3(b-mr-ng)}$$

und wenn man $m = n = \frac{1}{3}$ setzt

$$x = \frac{4\varrho a}{3(3b - r - \varrho)}.$$

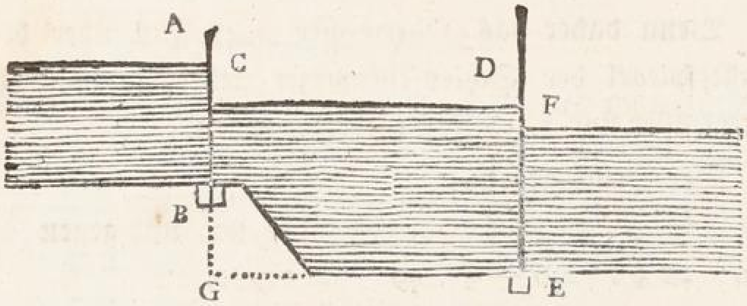
Beispiel. Wenn die Länge der Thür $a = 16$ Fuß, die Breite $b = 9$ Fuß, der Halbmesser $r = 4\frac{1}{2}$ Zoll, und $\varrho = 1$ Zoll, so ist:

$$x = \frac{4 \cdot 1 \cdot 16 \cdot 12}{3(3 \cdot 9 \cdot 12 - 4\frac{1}{2} - 1)} = \frac{4}{5} \text{ Zoll.}$$

Anmerkung. Diese Aufgabe hat zuerst Hr. Brahm in dem ersten Theil der Anfangsgründe der Deich- und Wasserbaukunst (1767.) §. 131. aufgelöst, und Hr. O. C. R. Silberschlag hat dieselbe mit ihren Fehlern in den 2ten Theil seiner Hydrotechnik (1773.) §. 489. aufgenommen. Dergleichen Fehler findet man in diesem Werke mehrere; und es ist überhaupt bei dem Gebrauche desselben dem angehenden Wasserbaumeister die größte Behutsamkeit zu empfehlen, weil die theoretischen Sätze darin meistentheils schwankend und fehlerhaft sind. Die praktischen Lehren dieses Werks bleiben freilich immer noch so Etwas, das demjenigen gefallen muß, welcher noch keine Erfahrungen angestellt hat; allein wer Gelegenheit findet, selbst Beobachtungen anzustellen, dem wird es nicht fehlen, ein gleiches Urtheil hierüber richtig zu finden.

§. 29.

Aufgabe. Wie hoch muß das Wasser in der Kammer BCDE einer Schleuse stehen, damit beide Schleusenthüren AB, DE gleich stark gedrückt werden?



Auflösung. Die Höhe AB des Oberwassers über dem Fachbaum sey a; des Unterwassers EF = b; und das Gefälle von B bis E oder BG = c. Ferner die gesuchte Wasserhöhe DE in der Schleusenkammer = x, so ist, wenn man die Breite der Schleusenthüren sowohl als $\gamma = 1$ setzt, der

Druck gegen AB $= \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2}(x-c)^2$, (Hst. §. 19.) und
Druck gegen DE $= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} b^2$.

Weil nun beide Pressungen einander gleich seyn sollen, so erhält man:

$$\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2}(x-c)^2 = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} b^2, \text{ oder}$$
$$\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} x^2 + cx - \frac{1}{2} c^2 = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} b^2, \text{ oder}$$
$$x^2 - cx - \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = 0, \text{ folglich}$$
$$x = \frac{1}{2} c \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)\right]} \text{ oder}$$
$$x = \frac{c \pm \sqrt{[2(a^2 + b^2) - c^2]}}{2}.$$

Beispiel. Wenn die Höhe des Oberwassers AB = 6 Fuß, des Unterwassers FE = 7 Fuß und das Gefälle

BG = 5 Fuß ist, so wird a = 6, b = 7 und c = 5, also

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{[2(36+49) - 25]}}{2} = 8{,}5205 \text{ Fuß.}$$

$BC = 8{,}5205 - 5 = 3{,}5205.$

$AC = 11 - 8{,}5205 = 2{,}4795.$

$DF = 8{,}5205 - 7 = 1{,}5205.$

Wenn daher das Oberwasser 2,48 Fuß über dem Wasserspiegel der Schleusenkammer stehet, so muß das Unterwasser nur 1, 52 Fuß niedriger stehen.

Der Druck gegen

AB ist $= \frac{1}{2} \cdot 36 - \frac{1}{2} \cdot 12{,}394 = 11{,}80$, und gegen

DE $= \frac{1}{2} \cdot 72{,}6 - \frac{1}{2} \cdot 49 = 11{,}80$.

§. 30.

Zusatz. In dem Falle daß a = b ist, erhält man

$$x = \frac{c \pm \sqrt{(4a^2 - c^2)}}{2}$$

Beispiel. Es sey a = 5, c = 6, so ist

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{(4 \cdot 25 - 36)}}{2} = 7 \text{ Fuß.}$$

$BC = 7 - 6 = 1.$

$AC = 11 - 7 = 4.$

$DF = 7 - 5 = 2.$

Druck gegen AB $= \frac{1}{2} \cdot 25 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 12.$

" " DE $= \frac{1}{2} \cdot 49 - \frac{1}{2} \cdot 25 = 12.$

Anmerkung. Man sieht hieraus, daß es sehr fehlerhaft seyn würde, wenn man die Wasserhöhe AC = DF nehmen wollte, weil in diesem Falle die Thüren bei DE einen weit größern Druck als bei AB leiden würden.

§. 31.

Aufgabe. Wenn eine Schleuse aus zwei Kammern bestehet, also in AB, DE, GH Thüren hat; man soll die Wasserhöhen in beiden Schleusenkammern so bestimmen, daß alle Thüren einen gleich starken Druck leiden.

(Siehe Kupfertafel, *Fig. I*)

Auflösung. Man setze die Höhe des Oberwassers $AB = a$, des Unterwassers $IH = b$; das Gefälle von B bis E Γ $= c$, das Gefälle von E bis H oder $LK = d$; Γ oder BL

$x = DE$, die Wasserhöhe in der ersten Kammer,

$y = GH$, diese Höhe in der zweiten Kammer.

Alsdenn ist der Ueberschuß des Drucks

gegen $AB = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(x - c)^2$,

gegen $DE = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(y - d)^2$,

gegen $GH = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}b^2$; (Hst. §. 19.) folglich

$\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}(x - c)^2 = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}b^2$;

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(y - d)^2 = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}b^2$.

Beide Gleichungen aufgelöst, nach y geordnet und die erste mit 2 multiplizirt, giebt:

I. $y^2 + x^2 - 2cx - a^2 - b^2 + c^2 = 0$.

II. $y^2 - dy - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}d^2 = 0$.

Die Gleichung II. von I. subtrahirt, so wird

$\frac{3}{2}x^2 - 2cx + dy - a^2 - \frac{1}{2}b^2 + c^2 - \frac{1}{2}d^2 = 0$, also

$$y = \frac{4cx - 3x^2 + 2a^2 + b^2 - 2c^2 + d^2}{2d}.$$

Aus I. findet man:

$y^2 = 2cx - x^2 + a^2 + b^2 - c^2$.

Man setze:

$$2a^2 + b^2 - 2c^2 + d^2 = \alpha, \text{ und}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 \quad = \beta, \text{ so wird}$$

$$y = \frac{4cx - 3x^2 + \alpha}{2d}, \text{ oder}$$

$$y^2 = \frac{(4cx - 3x^2 + \alpha)^2}{4d^2}; \text{ und}$$

$$y^2 = 2cx - x^2 + \beta, \text{ daher}$$

$$2cx - x^2 + \beta = \frac{(4cx - 3x^2 + \alpha)^2}{4d^2}.$$

Hieraus findet man, wenn alles aufgelöst und nach x geordnet wird:

$$x^4 - \frac{8c}{3}x^3 + \frac{2}{9}(8c^2 + 2d^2 - 3\alpha)x^2 + \frac{8c}{9}(\alpha - d^2)x$$

$$+ \frac{\alpha^2 - 4d^2\beta}{9} = 0.$$

So bald nun aus dieser Gleichung der Werth für x gefunden ist, so läßt sich leicht daraus

$$y = \frac{4cx - 3x^2 + \alpha}{2d} \text{ finden.}$$

Beispiel. Wäre $a = 6$, $b = 6$, $c = 5$, $d = 7$ Fuße gegeben, so ist

$$\alpha = 107, \ \beta = 47, \text{ und}$$

$$x^4 - \frac{40}{3}x^3 - \frac{46}{9}x^2 + \frac{2320}{9}x + \frac{2237}{9} = 0.$$

Wenn in der Aufgabe selbst nichts Unmögliches liegt, so muß es für x einen positiven Werth geben, welcher zwischen c und c + a enthalten ist. Man hat also nur nöthig hier den Werth für x zwischen 5 und 11 zu suchen, und man findet, wenn in der Gleichung $x = 6$ gesetzt wird, einen Rest $= + 27,222$; für $x = 7$ ist dieser Rest $= - 369,77$; woraus sich schließen läßt, daß der gesuchte Werth für x sehr nahe bei 6 liegen muß. Man nehme daher $x = 6,1$ so findet man den Rest $= - 11,013$ folglich liegt der gesuchte Werth zwischen den Grenzen 6 und 6, 1. Nun kann man annehmen, daß sich die Unterschiede kleiner Reste sehr nahe wie die Unterschiede der für x gesetzten Zahlen verhalten, also

$$38,235 : 0,1 = 27,222 : 0,0712;$$

Wird dieser gefundene Unterschied 0,0712 zu 6 addirt, so erhält man mit hinlänglicher Genauigkeit

$$x = 6,0712 \text{ Fuße } ^{*)}$$

für die Höhe des Wasserstandes in der ersten Schleusenkammer.

Hieraus folgt ferner:

$$y = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6,071 - 3 \cdot 6,071^2 + 107}{2 \cdot 7} \text{ oder}$$

$$y = 8,418 \text{ Fuße,}$$

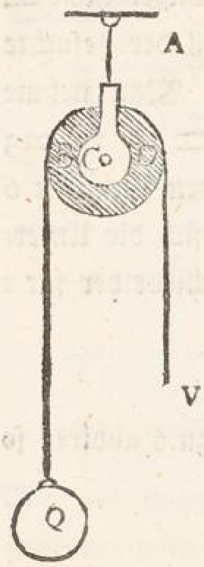
als die Höhe des Wasserstandes in der zweiten Kammer.

§. 32.

Aufgabe. **Ueber eine Rolle B D hängt die Last Q an einem Seile; wie viel Kraft V wird man an dem vertikalen Seile D V anwenden müssen, um dieser Last sowohl als der Steifigkeit des Seils und der Frikzion am Zapfen C das Gleichgewicht zu halten?**

---

*) Wollte man sich in andern Fällen mit dieser Zahl noch nicht begnügen, so kann durch die Fortsetzung dieses Verfahrens, die Wurzel so genau bestimmt werden als es verlangt wird.



Auflösung. Vor der eigentlichen Auflösung dieser Aufgabe wird es nicht undienlich seyn das nöthige von der Steifigkeit der Seile überhaupt auseinander zu setzen, weil in den neusten deutschen Lehrbüchern noch nichts davon enthalten ist.

Wenn d, D die Durchmesser zweier Rollen; δ, Δ die Durchmesser der darüber hängenden Seile und q, Q die daran hängenden Gewichte sind; wenn ferner f, F die nöthigen Gewichte vorstellen, welche zur Ueberwindung der Steifigkeit erfordert werden, so verhält sich nach den neusten im großen angestellten Versuchen des Hrn. **Coulomb**, (man sehe dessen Abhandlung: *Théorie de machines simples*, in den *Mémoires de mathématique & de physique.* Tome X. Paris 1785. S. 260. u. f.) sehr nahe *).

$$\frac{\Delta^2 Q}{D} : \frac{\delta^2 q}{d} = F : f, \text{ folglich}$$

$$\frac{D \,.\, F}{\Delta^2 . Q} \cdot \frac{\delta^2 q}{d} = f;$$

oder wenn man $\frac{D \,.\, F}{\Delta^2 . Q} = k$ setzt, und diese Zahl durch Versuche bestimmt, so ist

$$f = k \frac{\delta^2}{d} q.$$

*) Eigentlich ist Δ^2 zu groß; bei neuen Seilen müßte es $\Delta^{1,8}$, und bei alten ganz abgenutzten $\Delta^{1,4}$ seyn; eben so muß $D^{1,2}$ statt D gesetzt werden. Auch wird noch erfordert: daß für jede Art von Seile eine beständige Größe addirt wird, welche aber in der Ausübung sehr wohl weggelassen werden kann.

Die Zahl k wird sich nun wohl aus den vortreflichen Coulombschen Versuchen am sichersten bestimmen lassen. Berechnet man aus sieben und vierzig daselbst angeführten Versuchen diese Zahl $\frac{D \,.\, F}{\Delta^2 . Q}$, so findet sich, daß unter denselben 0,0035647 das Mittel hält.

In dem dazu gehörigen Versuche ist $\Delta = 3,98$ Linien, $D = 2$ Zolle, $Q = 212\frac{1}{2}$ Pfund, und $F = 6$ Pfund, dieses giebt:

$$\frac{2 \,.\, 6}{3,98 \,.\, 3,98 \,.\, 212,5} = 0,0035647 = k,$$

wo alles im parisischen Maas zu verstehen ist. Will man alles in rheinländischen Linien und Zollen, und in berlinischen Pfunden ausdrücken, so kann solches nach den am Ende dieses Buchs angehängten Tafeln geschehen; man findet daraus:

$$k = 0,0034441\,;$$

daher ist:

$$f = 0,00344 \,.\, \frac{\delta^2}{d}\, q\,;$$

da alsdenn δ in rheinländischen Linien, d in dergleichen Zolle, und q, f in berlinischen Pfunden ausgedrückt ist.

Wird nicht die größte Genauigkeit erfordert, so ist nahe genug

$$f = \frac{1}{300} \,.\, \frac{\delta^2}{d}\, q.$$

Nach der hier vorgelegten Aufgabe hat man daher, wenn der Halbmesser der Rolle $= r$, des Bolzens $= \varrho$, der Durchmesser des Seils $= \delta$ und das Verhältniß der Frikzion zum Druck zwischen Rolle und Bolzen $= \mu : 1$ gesetzt wird:

die Steifigkeit des Seils $= k \frac{\delta^2}{2r} Q$,

das Moment derselben $= r \cdot k \frac{\delta^2}{2r} Q = \dots \frac{1}{2} k \delta^2 Q$;

den Druck auf den Bolzen $= Q + V$,

die davon herrührende Frikzion $= \mu (Q + V)$,

und das Moment derselben $= \dots \dots \mu \varrho (Q + V)$;

das Moment der Last $= \dots \dots r Q$

Für das Gleichgewicht wird erfordert, daß diese drei Momente, dem Momente der Kraft r V gleich sind, also

$rV = rQ + \frac{1}{2} k \delta^2 Q + \mu \varrho (Q + V)$ oder

$rV - \mu \varrho V = rQ + \frac{1}{2} k \delta^2 Q + \mu \varrho Q$, folglich

$$V = \frac{r + \frac{1}{2} k \delta^2 + \mu \varrho}{r - \mu \varrho} \cdot Q.$$

Beispiel. Ueber eine messingene Rolle, deren Halbmesser 3 Zolle groß ist, soll an einem 12 Linien dicken Seile eine Last von 500 Pfund in die Höhe gezogen werden. Der Halbmesser des eisernen Bolzens ist $= \frac{1}{2}$ Zoll; wie viel Kraft wird man wegen dieser Last anwenden müssen?

Hier ist $r = 3$, $\varrho = \frac{1}{2}$, $\delta = 12$, $k = \frac{1}{300}$, $\mu = \frac{1}{5}$, $Q = 500$, daher

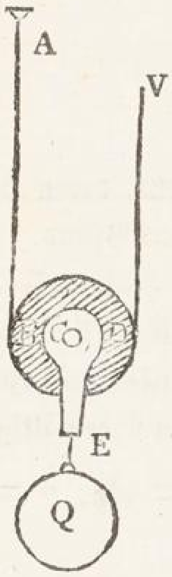
$$V = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300} \cdot 144 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}} \cdot 500 = 584{,}48 \text{ berlin. Pfd.}$$

Anmerkung. In dieser und in den folgenden Auflösungen ist das Gewicht der Rolle nicht mit gerechnet worden, weil solches größtentheils in Vergleichung mit der Last unbeträchtlich ist. Sollte es indessen erfordert werden, so wird sich dasselbe sehr leicht mit in die Rechnung bringen lassen.

§. 33.

§. 33.

Aufgabe. An der Rolle B D in E befindet sich die Last Q. Das eine Ende des Seils ist in A befestiget; man soll die Größe der Kraft V bestimmen welche erfordert wird an dem andern Ende des vertikalen Seils D V, der Last Q sowohl als der Steifigkeit des Seils und der Frikzion am Bolzen C das Gleichgewicht zu halten.



Auflösung. Der Halbmesser der Rolle und des Bolzens sei r, ϱ; das Verhältniß der Frikzion zum Druck zwischen Rolle und Bolzen $= \mu : 1$; die Dicke des Seils $= \delta$. Ferner werde das Seil A B mit einer Kraft S gespannt, so ist:

die Steifigkeit des Seils $= k \dfrac{\delta^2}{2r} S$,
das Moment derselben $= \ldots\ldots\ \frac{1}{2} k \delta^2 S$;
der Druck auf den Bolzen $= S + V$,
das Moment der Friktion $= \ldots\ldots\ \mu \varrho (S + V)$.

Nun wird für das Gleichgewicht erfordert, daß diese beiden Momente mit dem Momente r . S, dem Momente der Kraft r . V gleich seyn müssen, also:

$rV = rS + \frac{1}{2} k \delta^2 S + \mu \varrho (S + V)$ oder
$rV - \mu \varrho V = rS + \frac{1}{2} k \delta^2 S + \mu \varrho S$, daher
$V = \dfrac{r + \frac{1}{2} k \delta^2 + \mu \varrho}{r - \mu \varrho} . S.$

Aber weil alles im Gleichgewicht seyn soll, so ist:

$$S + V = Q \quad \text{daher} \quad S = Q - V, \text{ also}$$

$$V = \frac{r + \frac{1}{2} k \delta^2 + \mu \varrho}{r - \mu \varrho} (Q - V) \text{ oder}$$

$$V + \frac{r + \frac{1}{2} k \delta^2 + \mu \varrho}{r - \mu \varrho} V = \frac{r + \frac{1}{2} k \delta^2 + \mu \varrho}{r - \mu \varrho} Q, \text{ oder}$$

$$\frac{2r + \frac{1}{2} k \delta^2}{r - \mu \varrho} V = \frac{r + \frac{1}{2} k \delta^2 + \mu \varrho}{r - \mu \varrho} Q, \text{ folglich}$$

$$V = \frac{r + \frac{1}{2} k \delta^2 + \mu \varrho}{2r + \frac{1}{2} k \delta^2} Q.$$

Beispiel. An einer messingenen Rolle, deren Halbmesser 2 Zoll ist, hängt eine Last von 600 Pfund. Die Dicke des Seils ist 14 Linien, und der Halbmesser des eisernen Bolzens = ½ Zoll. Wie viel Kraft wird man anwenden müssen, um diese Last, welche vertikal aufgezogen werden soll, bei dem kleinsten Ueberschuß zu überwältigen?

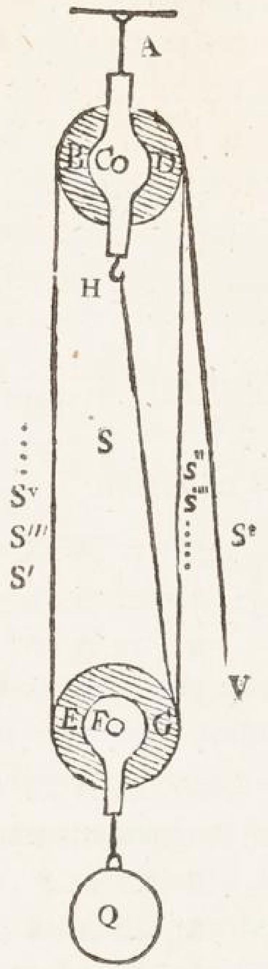
Hier ist $r = 2$, $\varrho = \frac{1}{2}$, $\delta = 14$, $k = \frac{1}{300}$, $\mu = \frac{1}{5}$, und $Q = 600$; daher

$$V = \frac{2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300} \cdot 196 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}}{4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300} \cdot 196} \cdot 600 = \frac{2,4266}{4,3266} \cdot 600$$

$= 336,52$ Berlinische Pfunde.

§. 34.

Aufgabe. Wenn an einem Flaschenzuge t Rollen von gleicher Größe befindlich sind; man soll die Kraft V finden, welche der Last Q, der Steifigkeit der Seile und der Frikzion an den Bolzen das Gleichgewicht hält.



Auflösung. Wenn beistehende Figur die beiden Kloben vorstellt, an welchen die ersten Rollen B D, E G sichtbar sind, so kann man sich hinter diesen Rollen die übrigen hinzu denken.

Man setze den Halbmesser der Rollen $= r$, den Halbmesser der Bolzen $= \varrho$; und weil hier t Rollen angenommen sind, so hängt die Last Q an t Seilen, weshalb man die verschiedenen Spannungen der Seile, auf nachstehende Art bezeichnen kann.

Die Spannung des ersten Seils H G $= S$
des zweiten Seils E B $= S'$
des dritten Seils D G $= S''$
u. s. f. . . . .
und die Spannung des letzten oder V $= S^t$.

Weil man nun ohne Nachtheil voraussetzen kann, daß alle Seile mit einander parallel sind, so ist nach dem vorhergehen §.

$S' = \frac{r + \frac{1}{2}\delta^2 k + \mu\varrho}{r - \mu\varrho} . S$; oder wenn man

$\frac{r + \frac{1}{2}\delta^2 k + \mu\varrho}{r - \mu\varrho} = A$ setzt,

$$S' = A . S.$$

Ferner nach dem §. 32. $S'' = A . S'$

$$S''' = A . S''$$
$$S'''' = A . S'''$$
. . . . .

und endlich $S^t = A . S^{t-1}$;

oder wenn alles durch A und S ausgedrückt wird:

$$S = 1 . S$$
$$S' = A . S$$
$$S'' = A^2 . S$$
$$S''' = A^3 . S$$
. . . . .
$$S^t = A^t . S.$$

Weil diese Spannungen alle für den Fall bestimmt sind, daß V mit Q im Gleichgewicht ist, so muß auch:

$$S + S' + S'' + \ldots . + S^t = Q \text{ seyn.}$$

Aus den zuletzt gefundenen Ausdrücken für die verschiedenen Spannungen, läßt sich aber leicht die Summe derselben nach (R. §. 183.) bestimmen, wenn man die

Glieder der geometrischen Progression summirt und mit S multiplizirt; man erhält alsdann:

$$1 + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^t = \frac{A . A^t - 1}{A - 1}, \text{ daher}$$

$$Q = \frac{A^{t+1} - 1}{A - 1} . S \quad \text{oder}$$

$$S = \frac{A - 1}{A^{t+1} - 1} . Q.$$

Aber $V = S^t = A^t . S$, folglich

$$V = A^t . \frac{A - 1}{A^{t+1} - 1} . Q \quad \text{oder}$$

$$V = \frac{A^{t+1} - A^t}{A^{t+1} - 1} . Q.$$

Sobald also $A = \frac{r + \frac{1}{2} k \delta^2 + \mu \varrho}{r - \mu \varrho}$ aus den gegebenen Größen bestimmt ist, so läßt sich nach der vorstehenden Formel der Werth für die Kraft V leicht bestimmen.

Beispiel. An einem Flaschenzug befinden sich sechs gleich große Rollen mit eisernen Buchsen. Der Halbmesser jeder Rolle ist 4 Zolle, der Halbmesser der eisernen Bolzen $\frac{1}{2}$ Zoll, und die Dicke des Seils 10 Linien. Wie viel Kraft wird erfordert werden, um bei dieser Einrichtung eine Last von 800 Pfund, bei dem kleinsten Ueberschuß, in die Höhe zu ziehen?

Hier ist $r = 4$, $\varrho = \frac{1}{2}$, $\delta = 10$, $k = \frac{1}{300}$, $\mu = \frac{2}{7}$, $t = 6$ und $Q = 800$.

Man erhält also:

$$A = \frac{4 + \frac{1}{2} . \frac{1}{300} . 100 + \frac{2}{7} . \frac{1}{2}}{4 - \frac{2}{7} . \frac{1}{2}} = 1,1147.$$

$\text{Log. } 1,1147 = 0,0471580$

$6 . \text{Log. } 1,1147 = 0,2829480 = \text{Log. } 1,9184$

$7 . \text{Log. } 1,1147 = 0,3301060 = \text{Log. } 2,1385$; daher

$$A^{t+1} = A^7 = 2,1385$$
$$A^t \quad = A^6 = 1,9184$$

$A^{t+1} - A^t = 0,2201$ folglich

$$V = \frac{0,2201}{1,1385} \cdot 800 = 154,4 \text{ Pfund.}$$

§. 35.

Aufgabe. Wenn man mit einer gegebenen Kraft V, eine gegebene Last Q, vermittelst eines Flaschenzugs in die Höhe ziehen soll, wie viel Rollen wird man nöthig haben, um die Last Q nebst den übrigen Hindernissen der Bewegung zu überwältigen; vorausgesetzt, daß die Größe der Rollen und die Dicke des Seils gegeben sind.

Auflösung. Wenn der Halbmesser der Rollen r, der Halbmesser der Bolzen ϱ und die Dicke des Seils δ gegeben ist, so erhält man nach dem vorhergehenden §.

$$V = \frac{A^{t+1} - A^t}{A^{t+1} - 1} Q \text{ oder}$$
$$V A^{t+1} - V = Q A^{t+1} - Q A^t, \text{ oder}$$
$$V A^{t+1} - Q A^{t+1} + Q A^t = V, \text{ oder}$$
$$A^t (V A - Q A + Q) = V, \text{ daher}$$
$$A^t = \frac{V}{A(V-Q)+Q} \quad \text{oder (R. §. 228.)}$$
$$\text{Log.} A^t = t \,\text{Log.}\, A = \text{Log.} \left[\frac{V}{A(V-Q)+Q}\right] \text{ folglich}$$

(R. §. 227.)

$$t = \frac{\text{Log.}\, V - \text{Log.}\,[Q - A(Q-V)]}{\text{Log.}\, A}.$$

Beispiel. Mit 150 Pfund Kraft soll eine Last von 900 Pfund gehoben werden; wie viel Rollen wird der

Flaschenzug haben müssen, wenn $r = 4$ Zoll, $\varrho = \frac{1}{2}$ Zoll, $\delta = 10$ Linien, $k = \frac{1}{300}$ und $\mu = \frac{2}{7}$ gegeben ist?

Aus den gegebenen Größen findet man

$$A = \frac{4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300} \cdot 100 + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}}{4 - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}} = 1,1147$$

Log. $V =$ Log. $150 = 2,1760913$.

Log. $[Q - A\,(Q - V)] =$ Log. $63,975 = 1,8060103$.

Log. $A =$ Log. $1,1147 = 0,0471$; folglich

$$t = \frac{2,176 - 1,806}{0,0471} = 7,8.$$

Es werden daher, wenn die Last durch die gegebene Kraft, überwältiget werden soll, wenigstens 8 Stück Rollen von der bestimmten Größe erfordert.

§. 36.

Aufgabe. Ein Flaschenzug bestehet aus t Paar Rollen von zweierlei Durchmessern; wie groß muß die Kraft V seyn, um der Last Q, der Steifigkeit der Seile und der Frikzion an den Bolzen das Gleichgewicht zu halten.

(Siehe Kupfertafel *Fig. 2.*)

Auflösung. Der Halbmesser der kleinen Rollen F G, H I sei a, ihrer Bolzen α. Der Halbmesser der großen Rollen BC, D E sey b und ihrer Bolzen β.

Bei den kleinen Rollen nenne man:

die Spannung des ersten Seils K I $= S$

des zweiten Seils H F $= S'$

des dritten Seils G I $= S''$

u. s. f. . . . .

des letzten Seils G E $= S^t$;

welches zugleich die Spannung des ersten Seils bei den großen Rollen ist.

Setzt man ferner bei den großen Rollen:

die Spannung des ersten Seils G E $= T$

des zweiten Seils D B $= T'$

des dritten Seils C E $= T''$

u. s. f. . . . .

des letzten Seils C V $= T^t$;

so ist diese letzte Spannung mit der Kraft V einerlei, also

$$T^t = V.$$

Wenn man nun zur Abkürzung der Rechnung

$$\frac{a + \frac{1}{2} k \delta^2 + \mu \alpha}{a - \mu \alpha} = A, \text{ und}$$

$$\frac{b + \frac{1}{2} k \delta^2 + \mu \beta}{b - \mu \beta} = B \text{ setzt,}$$

so ist nach der Auseinandersetzung §. 34.

die Spannung

$$\begin{aligned} S &= 1 . S \\ S' &= A . S \\ S'' &= A^2 . S \\ &\ldots\ldots \\ S^t &= A^t . S = T \\ T' &= B . T \\ T'' &= B^2 . T \\ T''' &= B^3 . T \\ &\ldots\ldots \\ T^t &= B^t . T = V. \end{aligned}$$

Soll nun Q mit V im Gleichgewicht seyn, so wird erfordert, daß alle vorstehende Spannungen der Seile, zusammen genommen der Last Q gleich sind, oder

$$Q = S + S' + S'' + \ldots . + S^t + T' + T'' + \ldots . + T^t.$$

Summirt man die erste Reihe, in welcher S vor kömmt, so erhält man:

$$\frac{A^{t+1} - 1}{A - 1} . S;$$

und die Summe der Reihe in welcher T vorkömmt, ist $=$

$$\frac{B^{t+1}-B}{B-1}\,.\,T;\ \text{daher}$$

$$Q = \frac{A^{t+1}-1}{A-1}\,.\,S + \frac{B^{t+1}-B}{B-1}\,.\,T.$$

Es ist aber:

$$T = S^t = A^t\,S \text{ und } V = T^t = B^t\,T, \text{ also}$$

$$T = \frac{V}{B^t} \text{ und } S = \frac{T}{A^t} = \frac{V}{A^t B^t}.$$

Diese Werthe in die für Q gefundene Gleichung gesetzt, giebt:

$$Q = \frac{A^{t+1}-1}{A-1}\,.\,\frac{V}{A^t B^t} + \frac{B^{t+1}-B}{B-1}\,.\,\frac{V}{B^t};\ \text{oder}$$

$$Q = \left[\frac{A^{t+1}-1}{A^t B^t\,(A-1)} + \frac{B\,(B^t-1)}{B^t\,(B-1)}\right].V.$$

Man bringe beide Brüche unter gleiche Nenner, so ist:

$$Q = \frac{(A^{t+1}-1)(B-1) + A^t B(A-1)(B^t-1)}{A^t B^t\,(A-1)\,(B-1)}\,.\,V;$$

folglich die gesuchte Kraft:

$$V = \frac{A^t B^t\,(A-1)\,(B-1)}{(A^{t+1}-1)(B-1) + A^t B(A-1)(B^t-1)}\,.\,Q.$$

So oft also $A = \frac{a + \frac{1}{2}k\alpha^2 + \mu\alpha}{a - \mu\alpha}$, und

$B = \frac{b + \frac{1}{2}k\beta^2 + \mu\beta}{b - \mu\beta}$ bekannt ist, so kann daraus der Werth für V bestimmt werden.

Beispiel. Vermittelst eines doppelten Flaschenzugs von 6 Paar Rollen, soll eine Last von 1000 Pfund in die Höhe gezogen werden; wie viel Kraft wird zur Ueberwältigung dieser Last gehören, wenn der Halbmesser der großen Rollen 4 Zolle, der kleinen Rollen 3 Zolle, der

Halbmesser der Bolzen $\frac{1}{2}$ Zoll, und die Dicke des Seils 10 Linien beträgt? Die Rollen haben eiserne Buchsen und drehen sich über eiserne Bolzen.

Hieraus ergiebt sich:

$a = 3,\ \alpha = \frac{1}{2},\ b = 4,\ \beta = \frac{1}{2},\ \delta = 10,\ k = \frac{1}{300},$
$\mu = \frac{2}{7},\ t = 6$ und $Q = 1000.$

Es ist also:

$$A = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300} \cdot 100 + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}}{3 - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}} = 1{,}1583.$$

$$B = \frac{4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{300} \cdot 100 + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}}{4 - \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2}} = 1{,}1147.$$

$$\begin{aligned}
\text{Log.}\,A &= \text{Log.}\,1{,}1583 = 0{,}0638211 \\
\text{Log.}\,A^{t} &= 6\,\text{Log.}\,1{,}1583 = 0{,}3829266 \\
\text{Log.}\,A^{t+1} &= 7\,\text{Log.}\,1{,}1583 = 0{,}4467477 = \text{Log.}\,2{,}7973. \\
\text{Log.}\,(A - 1) &= \text{Log.}\,0{,}1583 = 0{,}199\overset{4809}{\cancel{2065}} - 1 \\
\text{Log.}\,(A^{t+1} - 1) &= \text{Log.}\,1{,}7973 = 0{,}2546206 \\
\text{Log.}\,B &= \text{Log.}\,1{,}1147 = 0{,}0471580 \\
\text{Log.}\,B^{t} &= 6\,\text{Log.}\,1{,}1147 = 0{,}2829480 = \text{Log.}\,1{,}9184. \\
\text{Log.}\,(B - 1) &= \text{Log.}\,0{,}1147 = 0{,}0595634 - 1 \\
\text{Log.}\,(B^{t} - 1) &= \text{Log.}\,0{,}9184 = 0{,}9630319 - 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
0{,}3829266 \\
0{,}2829480 \\
0{,}199\overset{4809}{\cancel{2065}} - 1 \\
0{,}0595634 - 1 \\
\hline
0{,}924\overset{9183}{\cancel{6445}} - 2 = \text{Log.}\,[A^{t} B^{t} (A - 1)(B - 1)] \\
\qquad\qquad = \text{Log.}\,0{,}08407.
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
0{,}2546206 \\
0{,}0595634 - 1 \\
\hline
0{,}3141840 - 1 = \text{Log.}\,[(A^{t+1} - 1)(B - 1)] \\
\qquad\qquad = \text{Log.}\,0{,}2061.
\end{array}$$

$$0{,}3829266$$
$$0{,}0471580$$
$$0{,}1992065 - 1$$
$$0{,}9630319 - 1$$

$$0{,}5923230 - 1 = \text{Log.}\,[A^t B\,(A - 1)\,(B^t - 1)]$$
$$= \text{Log.}\ 0{,}3911.$$

Hieraus findet man die nöthige Kraft:

$$V = \frac{0{,}08407}{0{,}2061 + 0{,}3911} \cdot 1000 = 140{,}8 \text{ Pfund.}$$

§. 37.

Aufgabe. Wenn eine Last Q lothrecht an einer Kette hängt, welche sich um eine Welle aufwickelt. Man soll die Kraft P bestimmen die erfordert wird, um der Frikzion zwischen den Kettenschaken und der Last selbst das Gleichgewicht zu halten.

(Siehe Kupfertafel, *Fig. 3.*)

Auflösung. Die Linie A C sei ein horizontaler Durchmesser der Welle; ist nun die Kette von B bis E aufgewickelt, so bleibt noch der lothrecht hängende Theil E Q übrig, und jede Schake wie E F, wird so lange bei E Frikzion verursachen, bis solche gegen den verlängerten Halbmesser C E eben dieselbe Lage wie E D hat.

Man ziehe E G auf E F senkrecht, so ist E G die Richtung nach welcher die Frikzion zwischen den Kettenschaken, der Bewegung widerstehet. Nimmt man nun an, daß sich der senkrechte Druck zur Frikzion $= 1 : \mu$ verhält, so ist μ Q die Größe der Frikzion nach der Richtung E G. Man nehme:

$$EF : EG = 1 : \mu$$

und zeichne das Parallelogramm E F G H, so wird eine Kraft R nach der Richtung H E, dem Widerstande, welcher vom Druck Q und der Frikzion μ Q entstehet, alsdenn das Gleichgewicht halten, wenn sich verhält:

$R : Q = EH : EF$ (St. §. 96.) daher ist

$$R = \frac{EH}{EF} . Q.$$

Man ziehe E K senkrecht auf E C, so ist E K die Richtung nach welcher die Kraft P würkt. In der Verlängerung von HE, sey $EL = EH$ und LK, L M mit E M, EK parallel, so zerlegt sich die Kraft R in zwei andere Kräfte, nach E M und E K, wovon die erste durch den festen Punkt C aufgehoben wird. Es muß daher die Kraft P nach der Richtung E K eben so viel würken, als die Kraft R nach der Richtung E L, wenn sich verhält:

$R : P = EL : EK$ oder $= EH : EK$.

Hieraus findet man:

$$P = \frac{EK}{EH} . R = \frac{EK}{EH} . \frac{EH}{EF} . Q; \text{ oder}$$

$$P = \frac{EK}{EF} . Q.$$

Die Größe der Linie E F im vorstehenden Ausdruck, ist in allen Lagen der Schake E F einerlei, dahingegen die Linie E K sich in jeder Lage ändert. Für die Ausübung wird es am sichersten seyn, wenn der größte Werth von E K in Rechnung gebracht wird. Weil nun E K nie größer als E H werden kann, so verwandelt sich unter dieser Voraussetzung E K in E H, daher ist:

$$P = \frac{EH}{EF} . Q.$$

Nach den Vorhergehenden verhält sich:

$EF : EG = 1 : \mu$, also ist:

$EG = \mu . EF$. Aber (G. §. 108.)

$$EH = \surd(EG^2 + EF^2) = \surd(\mu^2 . EF^2 + EF^2)$$
$$= EF \surd(1 + \mu^2), \text{ daher}$$
$$\frac{EH}{EF} = \surd(1 + \mu^2); \text{ folglich}$$
$$P = \surd(1 + \mu^2) . Q.$$

Sind die Kettenschaken wie gewöhnlich von Eisen, so ist nach **Covlomb** bei ungeschmiertem Eisen, $\mu = \frac{2}{7}$, also

$$\surd(1 + \mu^2) = \surd\frac{53}{49} = 1,040016; \text{ folglich:}$$
$$P = 1,04 . Q; \text{ oder beinahe}$$
$$= \frac{26}{25} Q.$$

Anmerkung. Eine Anwendung dieser Formel findet man im §. 41.

§. 38.

Erster Zusatz. In der Auseinandersetzung vorstehender Aufgabe, ist wegen der leichtern Auflösung vorausgesetzt worden, daß der größte Werth von $EK = EL$ werden kann. Man sieht aber leicht ein, daß dieses nur alsdenn statt findet, wenn es möglich ist, daß der Winkel CEH ein rechter wird. So oft also der unveränderliche Winkel $CED + FEH$ größer als $90°$ ist, wird das Maximum für EK, auch kleiner wie EL.

Man setze den Winkel $CED = \alpha$, $FEH = \beta$, so ist EK = Maximum, wenn $CEF = CED = \alpha$, also $CEH = \alpha + \beta$ ist.

Es ist aber der Winkel

$$ELK = CEL = 180° - CEH = 180° - (\alpha + \beta);$$

ferner verhält sich (G. §. 258.)

$$EL : EK = \sin. EKL : \sin. ELK \quad \text{oder}$$
$$= \sin. 90° \; : \sin. 180° - (\alpha + \beta), \text{ daher ist}$$

$$EK = EL \sin. 180^\circ - (\alpha + \beta) \text{ oder}$$
$$EK = EL . \sin (\alpha + \beta).$$

In dem rechtwinklichten Dreieck C E N verhält sich:

$$EC : CN = \sin. 90^\circ : \sin. \alpha, \text{ daher ist:}$$
$$\text{Sin. } \alpha = \frac{CN}{EC}.$$

Setzt man den Halbmesser der Welle $AC = r$, und die innere Weite der Kettenschaken $= w$, so ist $EN = \frac{1}{2} w$, und weil C N von A C nur sehr wenig abweicht, $CN = r$; alsdenn ist (G. §. 108.)

$$EC = \sqrt{(r^2 + \tfrac{1}{4} w^2)}, \text{ daher}$$
$$\text{Sin. } \alpha = \frac{r}{\sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} w^2)}}.$$

Ferner ist: (G. §. 258.)

$$EC : EN = \sin. ENC : \sin. ECN \text{ oder}$$
$$\sqrt{(r^2 + \tfrac{1}{4} w^2)} : \tfrac{1}{2} w = \sin. 90^\circ : \cos. \alpha; \text{ daher}$$
$$\text{Cos. } \alpha = \frac{w}{2\sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} w^2)}}.$$

Aus gleichen Gründen findet man:

$$EH : HF = \sin. EFH : \sin. FEH, \text{ oder}$$
$$EH : \mu EF = \sin. 90^\circ : \sin. \beta; \text{ daher}$$
$$\text{Sin. } \beta = \frac{\mu . EF}{EH}.$$

Ferner: $EH : EF = \sin. EFH : \sin. EHF$, oder

$$= \sin. 90^\circ : \cos. \beta, \text{ daher}$$
$$\text{Cos. } \beta = \frac{EF}{EH}.$$

Aber nach (G. §. 233.) ist:

$$\text{Sin. } (\alpha + \beta) = \sin. \alpha . \cos. \beta + \cos. \alpha \sin. \beta \text{ oder}$$
$$= \frac{r}{\sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} w^2)}} . \frac{EF}{EH} + \frac{w}{2\sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} w^2)}} . \frac{\mu EF}{EH}.$$

Da nun:

$$EK = EH . \sin. (\alpha + \beta), \text{ so wird}$$

$$EK = EF \cdot \frac{r + \frac{1}{2}\mu w}{\sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} w^2)}}.$$ Aber §. 37.

$$P = \frac{EK}{EF} \cdot Q, \text{ folglich}$$

$$P = \frac{r + \frac{1}{2}\mu w}{\sqrt{(r^2 + \frac{1}{4} w^2)}} \cdot Q.$$

Und dieses ist der eigentliche Werth, welcher für P allemal in Rechnung gebracht werden müßte, so oft $(\alpha + \beta) > 90^\circ$ ist; wenn man hingegen nicht auf die größte Schärfe sieht, so wird man sich in den meisten Fällen mit dem im vorigen §. gefundenen Werthe begnügen können.

Anmerkung. Hr. Coulomb a. a. O. §. 149. erwähnt der Reibung zwischen den Kettenschaken, und es ist sehr zu bedauern, daß derselbe keine Versuche über diesen Gegenstand mitgetheilet hat.

§. 39.

Zweiter Zusatz. Will man noch untersuchen, wie sich die Weite der Kettenschake w gegen den Halbmesser der Welle r verhalten müßte, damit die Kraft P so klein, als es nur möglich ist, werden kann, so läßt sich diese Untersuchung durch Betrachtung der Figur selbst, oder durch Differenziirung der gefundenen Formel nach (M. A. §. 44.) anstellen, wenn man w variabel und r constant annimmt.

Zur Erleichterung der Rechnung setze man:

$$r + \tfrac{1}{2}\mu w = y,$$

$$r^2 + \tfrac{1}{4} w^2 = z, \text{ so ist}$$

$$P = \frac{y}{z^{\frac{1}{2}}} Q \text{ also (M. A. §. 35.)}$$

$$dP = \frac{z^{\frac{1}{2}} dy - y\, dz^{\frac{1}{2}}}{z} = \frac{z\, dy - \frac{1}{2} y\, dz}{z^{\frac{3}{2}}};$$

und wenn man substituirt und abkürzt:

$$\frac{dP}{dw} = \frac{r}{4} \cdot \frac{2\mu r - w}{z^{\frac{3}{2}}}. \text{ Ferner}$$

$$\frac{d^2 P}{dw^2} = \frac{2}{r} \cdot \frac{w^2 - 3\mu w r - 2 r^2}{z^{\frac{5}{2}}}.$$

Setzt man nun:

$$\frac{dP}{dw} = 0, \text{ so findet sich}$$

$$w = 2\mu r; \text{ also}$$

$$\frac{d^2 P}{dw^2} = \frac{2}{r} \cdot \frac{-2\mu^2 r - 2 r^2}{z^{\frac{5}{2}}},$$ welches eine negative Größe ist, es wird daher für

$$w = 2\mu r$$

die Funkzion P ein Maximum.

Je kleiner w gegen r ist, desto kleiner wird P werden. Wollte man $w > 2\mu r$ nehmen, so wird zwar der Ausdruck für P auch kleiner; alsdenn setzt dieses aber voraus, daß der Winkel $HEC < 90°$ sey, gegen die Bedingung des vorigen §.; es muß daher dieser Fall hier ausgeschlossen werden.

Hieraus folgt, daß es am vortheilhaftesten ist, die Kettenschaken allemal so kurz zu nehmen, als es die übrigen Umstände erlauben.

Wenn der für w gefundene Werth in die Gleichung des §. 38. gesetzt wird, so findet man:

$$P = \frac{r + \frac{1}{2}\mu^2 r}{\sqrt{(r^2 + \mu^2 r^2)}} \cdot Q = Q \cdot \sqrt{(1 + \mu^2)}$$

$$= 1,04 \cdot Q.$$

Für $w = \frac{1}{100} r$ ist:

$$P = 1,0014 \cdot Q.$$

Aus

Aus der Betrachtung der Figur, kann der Werth von w für das Maximum von P, ohne Differenzialrechnung gefunden werden. Denn für CEH = 90°, erhält EK seinen größten Werth = EL; alsdann ist aber $\alpha + \beta = 90°$ daher

Sin. β = cos. α, oder wenn man substituirt

$$\frac{\mu}{\sqrt{(1+\mu^2)}} = \frac{w}{2\sqrt{(r^2+\frac{1}{4}w^2)}},\ \text{folglich}$$

$$w = 2\mu r.$$

§. 40.

Aufgabe. **Die Kraft zu bestimmen welche anfänglich erfordert wird, ein Schutzbrett bei einem Wehre aufzuziehen.**

Auflösung. Wenn a die Breite des Schutzbretts, h die Höhe des Wassers vor demselben, und q das Gewicht dieses Schutzbretts anzeigt; wenn ferner x die zum Aufziehen nöthige Kraft bezeichnet, so ist (Hst. §. 19.)

$\frac{1}{2}ah^2\gamma$ = dem Druck des Wassers gegen das Brett.

Wegen Unebenheit der Fugen, kann man die Frikzion $= \frac{1}{3}$ des Drucks setzen, daher ist: $\frac{1}{6}ah^2\gamma$ = der Frikzion welche bei dem Aufziehen überwältigt werden muß. Hierzu noch das Gewicht q des Schutzbretts, giebt:

$$x = \frac{1}{6}ah^2\gamma + q.$$

Beispiel. Ein 4 Fuß breites und 210 Pfund schweres Schutzbrett, vor welchem das Wasser $3\frac{1}{2}$ Fuß hoch stehet, erfordert demnach zum Aufziehen eine Kraft von

$$x = \frac{4 \cdot 49 \cdot 66,4}{6 \cdot 4} + 210 = 752,3 \text{ Pfund.}$$

§. 41.

Zusatz. Soll das Schutzbrett vermittelst einer Kette, welche über eine Welle befestigt ist, dergestalt aufgezogen werden, daß man die Welle vermittelst eines Hebebaums umdrehet, so sey

q das Gewicht des Schutzbretts mit der Kette,

q' das Gewicht der Welle,

r der Halbmesser derselben,

ϱ der Halbmesser des Wellzapfens und

b die Entfernung in welcher die Kraft x vom Mittelpunkt der Welle würkt.

Nun wird die Umdrehung der Welle erstlich durch den Widerstand

$\frac{1}{6} a h^2 \gamma + q = Q$ verhindert, welcher bei dem Aufziehen des Schutzbretts überwältigt werden muß; zweitens durch die Frikzion der Kettenschaken beim Aufwickeln um die Welle; und drittens durch die Frikzion an den Wellzapfen.

Die Kraft welche erfordert wird, um die Last Q und die von derselben entstehende Frikzion zwischen den Kettenschaken, zu überwältigen, findet man nach dem §. 37. $= \frac{26}{25} Q$. Der Druck von den Zapfen der Welle auf die Pfannen ist $= Q + q' + x$; und wenn daselbst das Verhältniß der Frikzion zum Druck $= \mu : 1$ gesetzt wird, so findet man diese Frikzion $= \mu (Q + q' + x)$.

Ist nun M das Moment des Hebebaums gegen die Axe der Welle, so erhält man für das Gleichgewicht zwischen den Momenten des Widerstandes und den Momenten der Kraft:

$$\frac{26}{25} r Q + \mu \varrho (Q + q' + x) = b x + M, \text{ oder}$$

$$Q \left(\frac{26}{25} r + \mu \varrho\right) + \mu \varrho q' - M = b x - \mu \varrho x, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{Q \left(\frac{26}{25} r + \mu \varrho\right) + \mu \varrho q' - M}{b - \mu \varrho} \text{ oder}$$

$$x = \frac{\left(\frac{1}{6} a h^2 \gamma + q\right) \left(\frac{26}{25} r + \mu \varrho\right) + \mu \varrho q' - M}{b - \mu \varrho}.$$

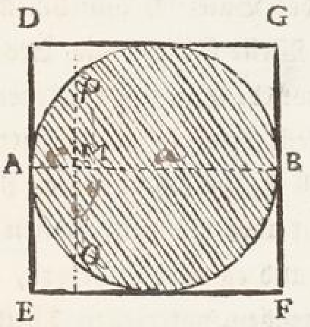
Beispiel. Es sey $a = 4$ Fuß, $h = \frac{7}{2}$ Fuß, $r =$ 3 Zoll $= \frac{1}{4}$ Fuß, $\varrho = 4$ Linien $= \frac{1}{36}$ Fuß, $b = 4$ Fuß; $q = 210$ Pfund, $q' = 60$ Pfund und $M = 80$. Wenn ferner die eisernen Wellzapfen in hölzernen Pfannen laufen, so ist $\mu = \frac{1}{5}$ und man erhält

$$x = \frac{\left(\frac{4 \cdot 49 \cdot 66{,}4}{6 \cdot 4} + 210\right)\left(\frac{26}{25} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{36}\right) + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{36} \cdot 60 - 80}{4 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{36}},$$ oder

$x = 30$ Pfund.

§. 42.

Aufgabe. Die respektive Festigkeit einer Welle, mit der Festigkeit eines Balkens von eben der Materie zu vergleichen, wenn beide einerlei Länge haben, und der Durchmesser der Welle, der Höhe und Breite des Balkens gleich ist.



Auflösung. Man setze $AB = DE = EF = a$;
AM ~~PM~~ $= x$, $PQ = y$, und die
respektive Festigkeit der Welle $APBQ = P$
des Theils $PAQP = p$
des Balkens $DEFG = Q$;
so kann man, bei gleich langen Balken ihre respektive Festigkeit, durch ein Produkt aus der Breite in das Quadrat ihrer Höhe, ausdrücken, (Karst. Lehrbegr. 3. Theil (1769.) §. 192.) Daher ist

$$dp = y^2 dx; \quad \text{aber } \tfrac{1}{4} y^2 = ax - x^2 \text{ daher}$$

$$p = \int 4(ax - x^2)\,dx = 2ax^2 - \tfrac{4}{3}x^3 + \text{Const.}$$

Für $x = 0$ wird $P = 0$, also Const. $= 0$, daher ist

$$p = 2x^2 (a - \tfrac{2}{3}x)$$

Für $x = a$ erhält man:

$$P = 2a^2 (a - \tfrac{2}{3}a) = \tfrac{2}{3}a^3.$$

Aber $Q = a \cdot a^2$ (Karst. a. a. O.) also

$$P : Q = \tfrac{2}{3}a^3 : a^3$$
$$= \tfrac{2}{3} : 1$$
$$= 2 : 3.$$

Es ist daher eine Welle nur $\frac{2}{3}$ so stark als ein Balken, welcher mit ihr gleiche Länge, Breite und Höhe hat.

Anmerkung. Man könnte bei der Vergleichung der respektiven Festigkeit der Welle mit der respektiven Festigkeit des Balkens, annehmen, daß die brechende Fläche der Welle sich um die Axe E F drehen müste, und dann würde man sich vorstellen können, daß ihre absolute Festigkeit, in dem Mittelpunkt der Kreisfläche A P B Q, vereinigt wäre. Nach dieser Voraussetzung liegt aber ein vollkommen fester Körper zum Grunde, und es wird erfordert, daß sich um den am tiefsten liegenden materiellen Theil des Bogens A Q B, die ganze Kreisfläche bewege. Dieses findet aber bei keinem Körper, mit welchem Versuche angestellt werden, statt; am allerwenigsten aber kann dieses bei Wellen angenommen werden, wo ein einziger Punkt dem Druck des ganzen respektiven Gewichts widerstehen müßte. Es schien mir daher die hier gebrauchte Vorstellungsart, diejenige zu seyn, welche besonders bei Holzarten, der Natur am nächsten kommt.

Bei vollkommen harten Körpern wäre eigentlich:

$$P : Q = \pi : 4 = 3,14195 : 4.$$

§. 43.

Aufgabe. Eine frei liegende eichene Welle ist 10 Zoll stark und 16 Fuß lang; mit wie viel Gewicht wird man dieselbe in ihrer Mitte mit Sicherheit beschweren können?

Auflösung. Den körperlichen Inhalt der Welle findet man =

$0,785 \cdot \frac{100}{144} \cdot 16 = 8,722$ Kubikfuße, (G. §. 346.)
also ihr Gewicht nach **Musschenbröks** Tafeln (Stat. §. 12.)

$0,929 \cdot 8,722 \cdot 65,306 = 523,93$ Berlin. Pfund.
Setzt man von zwei verschiedenen Balken die Längen L, l, die Breiten B, b; die Höhen H, h, und die zum Zerbrechen nöthigen Gewichte P, p, so ist (Karst. Lehrb. a. a. O.)

$$\frac{B \cdot H^2}{L} : \frac{b \cdot h^2}{l} = P : p, \text{ also}$$

$$p = \frac{P \cdot L}{B \cdot H^2} \cdot \frac{b\ h^2}{l}, \text{ oder wenn man}$$

$$\frac{P \cdot L}{B \cdot H^2} = n \text{ setzt:}$$

$$p = n \cdot \frac{b \cdot h^2}{l}.$$

Sobald also die Zahl n aus hinlänglichen Versuchen bekannt ist, kann man allemal das zum Zerbrechen nöthige Gewicht bestimmen. Die vollständigsten Versuche sind von Hrn. **Büffon** angestellt worden und in den physischen Abhandlungen der Pariser Akademie vom Jahre 1741 beschrieben. Wird daselbst unter allen Versuchen das Mittel für die Zahl $\frac{P \cdot L}{B \cdot H^2}$ genommen; so findet sich, wenn man das Gewicht des Balkens mit zur Last rechnet, $n = 560$, welches auch gut genug mit den weniger beträchtlichen Versuchen des Hrn. Belidor in der *Science des Ingénieurs* (1734) Liv. IV. Chap. III. übereinstimmt.

Wenn b, h in Rheinländischen Zollen; l in Fußen und p in Berlinischen Pfunden ausgedrückt wird, so ist:

$$n = 546.$$

Für $b = h$ ist $p = 546 \cdot \frac{b^3}{l}$ Berlin. Pfund; bezeichnet alsdann q bei einer Welle deren Durchmesser mit der Breite b übereinkömmt, und deren Länge $= l$ ist, das zum Zerbrechen nöthige Gewicht nebst dem Gewicht der Welle, so ist §. 42.

$$3 : 2 = p : q \text{ also}$$

$$q = \tfrac{2}{3} p = \tfrac{2}{3} \cdot 546 \cdot \frac{b^3}{l} \text{ oder}$$

$$q = 364 \frac{b^3}{l}.$$

Wird nun die gesuchte Last $= V$ gesetzt, und zur Sicherheit vor dem Zerbrechen, die Hälfte der zum Zerbrechen nöthigen Kraft genommen, so ist:

$$\tfrac{1}{2} q = V + 523{,}93 = \tfrac{1}{2} \cdot 364 \cdot \frac{b^3}{l}; \text{ folglich}$$

$$V = 182 \frac{b^3}{l} - 523{,}93, \text{ oder}$$

$$= \frac{182 \cdot 1000}{16} - 523{,}93 = 10851 \text{ Berl. Pfund.}$$

§. 44.

Aufgabe. Aus der gegebenen Länge l, und der Last V mit welcher eine eichene Welle in der Mitte beschwert werden soll, die nöthige Stärke derselben zu bestimmen.

Auflösung. Wenn b der gesuchte Durchmesser der Welle ist, so findet man nach dem vorhergehenden §. das Gewicht der Welle =

$$\frac{0{,}785 \cdot b^2 \cdot l}{144} \cdot 0{,}929 \cdot 65{,}306 = 0{,}331 \cdot l \cdot b^2, \text{ daher}$$

ebendaselbst:

$$V = \frac{182}{l} b^3 - 0{,}331 \cdot l \cdot b^2.$$

Ist nun $l = 20$ Fuß und $V = 16000$ Pfund gegeben, so erhält man:

$$16000 = \frac{182}{20} \cdot b^3 - 0{,}331 \cdot 20 \cdot b^2, \text{ oder}$$

$$b^3 - 0{,}727 \cdot b^2 - 1758{,}24 = 0.$$

Aus dieser kubischen Gleichung läßt sich der Werth für b leicht bestimmen. Denn man sieht bald, daß b zwischen 12 und 13 liegen muß, weil für $b = 12$ der Rest $= -134{,}93$ und für $b = 13$ dieser Rest $= +315{,}89$ gefunden wird. Auch folgt aus diesen verschiedenen Resten, daß der wahre Werth für b, näher bei 12 als bei 13 liegt; setzt man daher $b = 12{,}3$ so erhält man zum Rest $- 7{,}361$; für $b = 13{,}4$ ist der Rest $= + 36{,}601$, daher verhält sich auf eine ähnliche Art wie im §. 31.

$$43{,}962 : 0{,}1 = 7{,}361 : 0{,}0167;$$

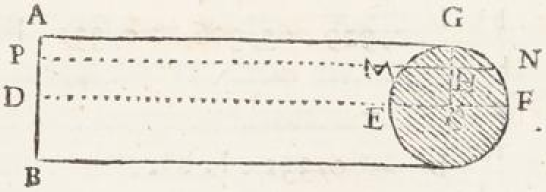
und wenn der gefundene Werth zu 12,3 hinzu gesetzt wird, so ist:

der gesuchte Durchmesser der Welle $b = 12{,}3167$ Rheinl. Zolle.

Anmerkung. In des Hrn. G. O. B. R. Mönnich Lehrbuch der Mathematik (1784.) 2ter Theil. Seite 116 bis 129. findet man über die Festigkeit der Materialien überhaupt, und besonders über die Stärke der Balken, sehr lehrreiche Untersuchungen.

§. 45.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines kreisförmigen Ringes zu finden.



Auflösung. Wenn man sich vorstellt, daß sich die Kreisfläche E F, deren Mittelpunkt C ist, in der Entfernung D E um die Axe A B drehet, so wird dadurch ein solcher Ring erzeugt werden. Man setze die halbe innere Weite des Ringes, oder den Halbmesser D E $= R$, die halbe Dicke des Ringes oder den Halbmesser C E $= r$. Nimmt man ferner A P $= x$ und in der darauf senkrechten Linie P N die Sehne M N $= y$, so ist die auf der Mitte von M N errichtete senkrechte Linie G H $= x$, und man erhält:

$$PH = DC = R + r.$$
$$PM = PH - MH = R + r - \tfrac{1}{2} y$$
$$PN = PH + HN = R + r + \tfrac{1}{2} y$$
$$MH = \sqrt{[GH(EF - GH)]}. \text{ (G. §. 186.) oder}$$
$$\tfrac{1}{2} y = \sqrt{(2rx - x^2)}.$$

Derjenige Theil, welcher durch Umdrehung der Fläche M G N um die Axe A B erzeugt wird, heiße V, so ist die Fläche welche durch Umdrehung der Linie M N entstehet

$$= \pi (PN^2 - PM^2). \text{ (G. §. 252.) oder}$$
$$= \pi [(R + r + \tfrac{1}{2} y)^2 - (R + r - \tfrac{1}{2} y)^2]$$
$$= \pi . 2 (R + r) y.$$

Man erhält daher auf eine ähnliche Art wie (M. A. §. 72.)

$$dV = 2\pi (R + r) y \, dx \text{ oder}$$
$$= 4\pi (R + r) dx \sqrt{(2rx - x^2)} \text{ also}$$
$$V = \int 4\pi (R + r) dx \sqrt{(2rx - x^2)}.$$

NB. Man kann sich auch den Ring als einen Cylinder vorstellen dessen Grundfläche gleich der senkrechten Durchschnittsfläche u. dessen Höhe gleich der Peripherie ist, welche durch den Mittelpunkt der Grundfläche um die Axe des Cylinders geht. Nennt man CE = r u. DE = R so ist die Peripherie = $2\pi(R+r)$ u. die ~~Kreis~~ Grundfläche = πr^2 folglich der Inhalt des dem Ringe gleichen Cylinders = $2\pi(R+r) + \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 (R+r)$

Nach (M. A. §. 87. 4ter Zuſ.) findet man das Integral

$$V = 4\pi (R + r) \left[\tfrac{1}{2} r^2 \, \mathrm{Acſinv.} \frac{x}{r} - \tfrac{1}{2} (r - x) \sqrt{(2rx - x^2)} \right]$$

Für $x = 2r$ wird $\mathrm{Acſinv.} \frac{x}{r} = \mathrm{Acſinv.}\, 2 = \pi$, und der vorſtehende Ausdruck verwandelt ſich in:

$$4\pi (R + r) \tfrac{1}{2} r^2 \pi - 0;$$

daher iſt der körperliche Inhalt des ganzen Ringes

$$= 2\pi^2 r^2 (R + r).$$

Setzt man die ganze innere Weite des Ringes, oder $2R = D$ und die Dicke deſſelben $2r = d$, ſo findet man den geſuchten Inhalt

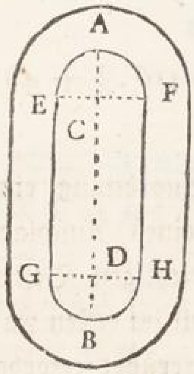
$$= \tfrac{1}{4} \pi^2 d^2 (D + d)$$

Beiſpiel. Wenn die innere Weite eines Ringes 6 Zoll beträgt und ſeine Dicke 2 Zoll, ſo iſt $D = 6$, $d = 2$, folglich findet man ſeinen Inhalt

$$= \tfrac{1}{4} \cdot 9{,}8696 \cdot 4 \cdot (6 + 2) = 78{,}9568 \text{ Kubikzolle.}$$

§. 46.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt und das Gewicht einer Kette zu finden.



Auflöſung. Die gewöhnlichen Kettenſchaken kann man ſich vorſtellen, als, als wenn ſolche aus zwei halben Ringen E A F und G B H, und aus zwei Zylinder E G und F H zuſammengeſetzt wären.

Sobald nun die innere größte Weite einer Schake $AB = a$ und die kleinere $EF = GH = b$ nebſt der Dicke d gegeben ſind, ſo läßt ſich der Inhalt derſelben leicht finden.

$= \frac{1}{4} \pi^2 d^2 (D + d)$

Nach dem vorhergehenden §. ist der Inhalt von E A F und G B H

$$= \tfrac{1}{4} \pi^2 d^2 (b + d);$$

und nach (G. §. 346.) findet man den Inhalt der beiden Zylinder E G und F H:

$$= \tfrac{1}{2} \pi d^2 (a - b);$$ folglich ist:

der Inhalt einer Kettenschake

$$= \tfrac{1}{4} \pi d^2 [\pi (b + d) + 2 (a - b)].$$

Sind nun überhaupt n Schaken, und m ist die Verhältnißzahl von dem spezifischen Gewicht der Materie der Schaken, so findet man (St. §. 12.)

das Gewicht der ganzen Kette

$$= \tfrac{1}{4} \pi \gamma n m d^2 [\pi (b + d) + 2 (a - b)].$$

Beispiel. Eine Kette von geschmiedetem Eisen bestehet aus 200 Schaken. Bei jeder Schake beträgt die innere gröste Weite 3 Zoll, die kleinere 1 Zoll und die Dicke 4 Linien oder $\frac{1}{3}$ Zoll; wie groß ist das Gewicht dieser Kette?

Zur Auflösung der gefundenen Formel hat man: $a = 3$, $b = 1$, $d = \frac{1}{3}$; $n = 200$ und weil alles in Zollen gegeben ist $\gamma = \frac{1}{1728} \cdot 65{,}306 = 0{,}0378$.

Ferner ist für geschmiedetes Eisen, $m = 8{,}286$, daher das gesuchte Gewicht der Kette

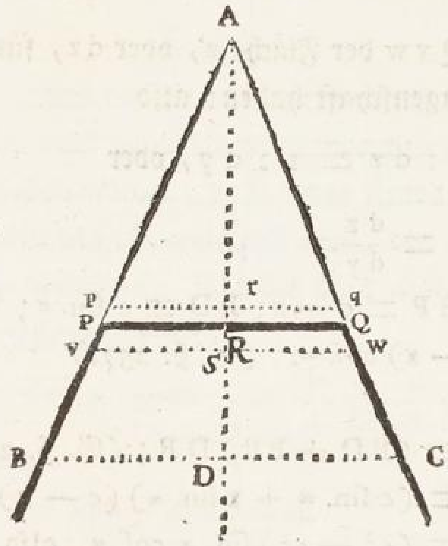
$$= 0{,}785 \cdot 0{,}0378 \cdot 8{,}286 \cdot 200 \cdot \tfrac{1}{9} (3{,}1416 \cdot \tfrac{4}{3} + 4)$$

$= 44{,}738$ Berlin. Pfund.

Anmerkung. Man befindet sich bei Anordnung einer Maschine oder bei Verfertigung eines Anschlags, öfters in Verlegenheit wegen der richtigen Bestimmung des Gewichts einer Kette, weil im ersten Falle der Druck, welcher von der Kette herrührt erfordert wird, und im zweiten Falle die Bestimmung des Preises einer Kette, von ihrem Gewichte abhängt.

§. 47.

Aufgabe. Die Lage B A C einer austretenden Deichsecke ist gegeben, man soll dieselbe durch eine grade Linie P Q, welche bei P und Q gleiche Winkel formiret, so abschneiden, daß keine größere Deichslinie angegeben werden kann, welche zugleich noch so viel Land mehr mit einschließt, damit der dadurch erhaltene Vortheil eben so groß ist, als die Vermehrung der Kosten für die längere Deichslinie beträgt.



Auflösung. Wenn P Q die gesuchte Linie und P B C Q ein Theil des einzudeichenden Landes ist, so sey $AB = AC = c$, der Winkel $BAD = DAC = \alpha$; $AP = AQ = x$, die Deichlinie $BPQC = y$; die Fläche $BPQC = z$.

Ist nun eine Quadratruthe bedeichtes Land, a Rthlr. mehr werth, als eine Quadratruthe unbedeichtes, und kostet jede Ruthe Deich b Rthlr., so muß, wenn die Deichskosten den Werth des Landes nicht übersteigen sollen, jede neue Ruthe Deich eine Fläche von $\frac{b}{a}$ □ Ruthen einschließen. Denn

$$a \text{ Rthlr.} : b \text{ Rthlr.} = 1 . \square \text{R.} : \frac{b}{a} \square \text{R.}$$

Weil vorausgesetzt ist, daß die Linie PQ die Bedingungen der Aufgabe erfülle, so wird sich ausser PQ keine andere Linie wie pq angeben lassen, welche auf jede Ruthe Deich $\frac{b}{a}$ □ Ruthen Land einschließt; es muß daher der letzte Streifen PQvw der Fläche z, oder dz, für den Zuwachs dy, diese Eigenschaft haben: also

$$\frac{b}{a} : dz = 1 : dy, \text{ oder}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{dz}{dy}.$$

Es ist aber $BP = c - x$; $BD = c \sin. \alpha$; $PR = x \sin. \alpha$ $DR = (c - x) \cos. \alpha$. (G. §. 257.)

Ferner:

$$z = (BD + PR) DR; \text{ (G. §. 223.) oder}$$
$$= (c \sin. \alpha + x \sin. \alpha)(c - x) \cos. \alpha$$
$$= (c^2 - x^2) \sin. \alpha \cos. \alpha, \text{ also}$$
$$dz = -2 x dx \sin. \alpha \cos. \alpha.$$

Weiter ist:

$$y = 2 . BP + 2 . PR, \text{ oder}$$
$$= 2(c - x) + 2 x \sin. \alpha, \text{ also}$$
$$dy = -2 dx + 2 dx \sin. \alpha; \text{ daher}$$
$$\frac{b}{a} = \frac{dz}{dy} = \frac{-2 x dx \sin. \alpha \cos. \alpha}{-2(1 - \sin. \alpha) dx}, \text{ folglich}$$
$$x = \frac{b}{a} . \frac{1 - \sin. \alpha}{\sin. \alpha . \cos. \alpha}.$$

Anmerkung. Im zweiten Theil der gerühmten Beiträge zur hydraulischen Architektur, Seite 15. findet Herr C. Woltmann:

$$x = \frac{b}{a} \cot. \alpha \operatorname{cosec}. \alpha,$$

welches aber offenbar ein Versehen ist und davon herrühret, daß daselbst nur der Ort gesucht wird, wo das Dreieck C p r den Bedingungen ein Gnüge leistet. Durch folgende Untersuchung wird man sich leicht überzeugen, daß wenn nach dieser Formel gerechnet wird, noch mehr Land mit Vortheil hätte eingedeicht werden können.

§. 48.

Zusatz. Soll die gefundene Linie P Q die vortheilhafteste seyn, so muß jede größere Eindeichung nicht ohne Nachtheil geschehen können; d. h. jeder Zuwachs an Land wie P p q Q wird nicht hinreichend seyn, die vergrößerten Deichskosten zu bestreiten. Wendet man alsdenn die von Hrn. W. angegebene Formel

$$x = \frac{b}{a} \operatorname{Cot}. \alpha \,.\, \operatorname{cosec}. \alpha = \frac{b}{a} \frac{\cos. \alpha}{\sin. \alpha^2}$$ auf ein Beispiel an und setzt:

B A C $= 60°$ und $a = b$, so ist

$\alpha = 30°$ und $\frac{b}{a} = 1$,

da alsdann auf jede □ Ruthe Landes, eine Ruthe Deich kömmt. Es ist also

$$x = \frac{\cos. 30°}{(\sin. 30°)^2} = 3,4641.$$

Nimmt man nun z. B.

P p $= 0,4641$; so ist

p r $= 1,5$

R r $= 0,4018$; also

Fläche P p q Q = 1, 299 □ Ruthen; und die neue Deichlinie P p q Q = 3, 928 Ruthen; wird hiervon die Deichlinie P Q = 3, 464 abgezogen, so erhält man 0, 464; welches anzeigt, daß wenn man noch 1, 299 □ R. Land eindeicht, so muß die vorher angenommene Deichlinie P Q um 0, 464 Ruthen vergrößert werden. Hieraus folgt, daß man das Stück Land P p q Q noch mit großem Vortheil eindeichen kann, weil nach dem Vorhergehenden, die Eindeichung nur alsdenn aufhört, wenn jede □ Ruthe Land, mehr als eine Ruthe Deich erfordert. Man findet also nach dieser Formel x zu groß, oder die Deichlinie zu klein, und es muß die Linie P Q näher gegen A liegen, weil noch mehr Land mit Vortheil einzudeichen ist.

Wendet man die vorhin gefundene Formel

$$x = \frac{b}{a} \cdot \frac{1 - \sin.\,\alpha}{\sin\,\alpha\;\cos.\,\alpha}$$

auf dieses Beispiel an, so ist:

$$x = \frac{1 - \sin.\,30^\circ}{\sin.\,30^\circ\;\cos.\,30^\circ} = 1,1547 = A\,P.$$

Hat nun dieser Werth von x die gehörigen Eigenschaften, so muß auf jede □ Ruthe der Fläche P p q Q mehr als eine Ruthe Deich, und auf jede □ Ruthe der Fläche P v w Q weniger als eine Ruthe Deich kommen.

Man setze z. B.

P p = 0, 1547; so ist
p r = 0, 5
r R = 0, 134,
die Fläche P p q Q = 0, 144 □ Ruthen;
die deshalb nöthige Vergrößerung der Deichlinie
= 0, 154 Ruthen, wie erfordert wird.

Ferner ist v s = 0, 654.

R s = 0, 134

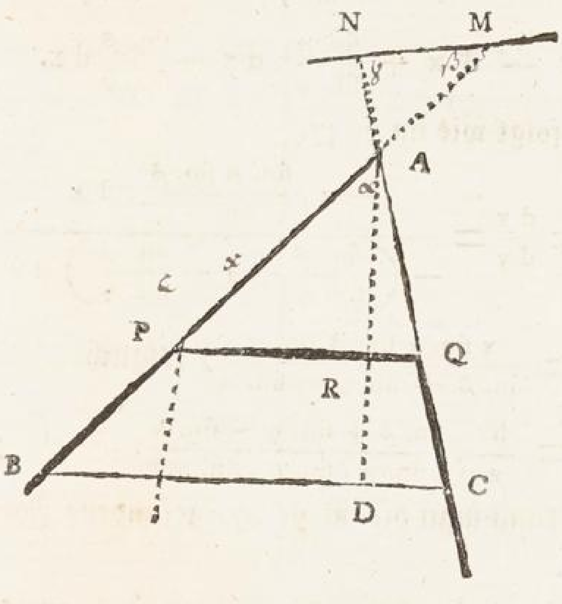
Fläche P v w Q = 0, 165 □ Ruthen,

die deshalb nöthige Vergrößerung der Deichlinie

= 0, 154 Ruthen; woraus sehr leicht folgt, daß die gefundene Formel die Bedingungen der Aufgabe erfüllt.

§. 49.

Aufgabe. Die vortretende Deichsecke B A C, nach den Bedingungen der vorhergehenden Aufgabe, durch eine grade Linie P Q mit einer gegebenen Linie M N parallel, abzuschneiden.



Auflösung. Man bezeichne die gegebenen Winkel B A C, A M N, A N M, durch α, β, γ, und die Linien A B, A P durch c, x, so ist:

$$BC = \frac{c \sin. \alpha}{\sin. \gamma}. \text{ (G. §. 258.)}$$

$$PQ = \frac{x \sin. \alpha}{\sin. \gamma}.$$

$$QC = \frac{(c - x)\,\text{sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,\gamma}.$$

$$DR = (c - x)\,\text{sin.}\,\beta.$$

Setzt man nun die Fläche B P Q C $= z$ und die zugehörige Deichlinie B P Q C $= y$, so erhält man:

$$z = \tfrac{1}{2}\left(\frac{c\ \text{sin.}\,\alpha}{\text{sin.}\,\gamma} + \frac{x\ \text{sin.}\,\alpha}{\text{sin.}\,\gamma}\right).(c - x)\,\text{sin.}\,\beta;$$

$$= (c^2 - x^2)\,\frac{\text{sin.}\,\alpha\ \text{sin.}\,\beta}{2\,\text{sin,}\,\gamma}.$$

$$dz = -\,x\,dx\,.\,\frac{\text{sin.}\,\alpha\ \text{sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,\gamma}.$$

Ferner:

$$y = (c - x) + \frac{x\ \text{sin.}\,\alpha}{\text{sin.}\,\gamma} + \frac{(c - x)\ \text{sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,\gamma}.$$

$$dy = -\,dx + \frac{\text{sin.}\,\alpha}{\text{sin.}\,\gamma}.\,dx - \frac{\text{sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,\gamma}\,dx.$$

Hieraus folgt wie im §. 47.

$$\frac{b}{a} = \frac{dz}{dy} = \frac{-\,x\,.\,\dfrac{\text{sin.}\,\alpha\ \text{sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,\gamma}\,.\,dx}{-\left(\dfrac{\text{sin.}\,\beta}{\text{sin.}\,\gamma} + 1 - \dfrac{\text{sin.}\,\alpha}{\text{sin.}\,\gamma}\right)dx} \text{ oder}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{x\ \text{sin.}\,\alpha\ \text{sin.}\,\beta\ \text{sin.}\,\gamma}{\text{sin.}\,\beta + \text{sin.}\,\gamma - \text{sin.}\,\alpha}, \text{ folglich}$$

$$x = \frac{b}{a}\,.\,\frac{\text{sin.}\,\beta + \text{sin.}\,\gamma - \text{sin.}\,\alpha}{\text{sin.}\,\alpha\,.\,\text{sin.}\,\beta\,.\,\text{sin.}\,\gamma}.$$

Hieraus kann man die im §. 47. gefundene Formel leicht herleiten.

Beispiel. Wenn die Richtung N M eines Strohms mit der verlängerten Deichlinie B A einen Winkel B M N $= 50°$ einschließt, und die verlängerten Deichlinien selbst sich unter einem Winkel B A C $= 84°$ schneiden. Jeder Morgen eingedeichtes Land ist 65 Rthlr. mehr werth als ein Morgen uneingedeichtes Land, und jede laufende Ruthe Deich kostet $\overset{30}{28}$ Rthlr. Wie groß wird die Linie

A P für den Anfangspunkt der mit N M parallelen Linie P Q genommen werden müssen, damit diese Linie, die übrigen im §. 47. festgesetzte Eigenschaften, erhält?

Wenn der Morgen eingedeichtes Land 65 Rthlr. mehr werth ist, als ein Morgen uneingedeichtes, so ist dieser Werth für eine □ Ruthe $= \frac{65}{180} = \frac{13}{36} = a$; ferner $b = 30$, also:

$$\frac{b}{a} = \frac{30 \cdot 36}{13} = \frac{1080}{13}.$$

Weiter hat man $\alpha = 84^\circ$, $\beta = 50^\circ$, $\gamma = 360 - \alpha - \beta = 46^\circ$, folglich:

$$x = \frac{1080 \cdot (\sin. 50^\circ + \sin. 46^\circ - \sin. 84^\circ)}{13 \cdot \sin. 84^\circ \cdot \sin. 50^\circ \cdot \sin. 46^\circ}$$

Bedient man sich zur Abkürzung der Rechnung der Logarithmen, so kann die Rechnung auf folgende Art ausgeführt werden.

$$\begin{array}{rcl}
\text{Sin. } 50^\circ & = & 0,7660444 \\
\text{Sin. } 46^\circ & = & \underline{0,7193398} \\
 & & 1,4853842 \\
\text{Sin. } 84^\circ & = & \underline{0,9945218}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\text{Log. } 0,4908624 & = & 0,6909598 - 1 \\
\text{Log. } 1080 & = & \underline{3,0334238} \\
 & & 2,7243836
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\text{Log. } 13 & = & 1,1139433 \\
\text{Log. } \sin. 84^\circ & = & 9,9976143 - 10 \\
\text{Log. } \sin. 50^\circ & = & 9,8842540 - 10 \\
\text{Log. } \sin. 46^\circ & = & \underline{9,8569341 - 10}
\end{array}$$

$$30,8527457 - 30 = \underline{0,8527457}$$

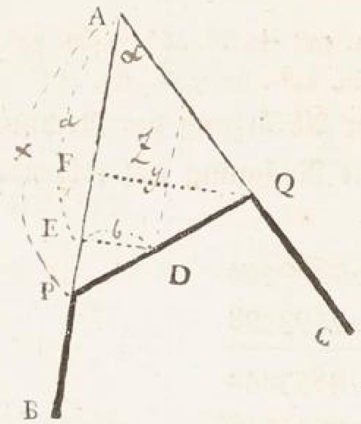
$$1,8716379 =$$

Log. 74,411; folglich ist:

$x = AP = 74,41$ Ruthen.

§. 50.

Aufgabe. Zwei Deichlinien B A, C A, schneiden sich verlängert in A und bilden daselbst eine vortretende Ecke. Der Punkt D ist entweder die Mitte einer Anhöhe, oder es liegt vor derselben ein tiefer Kolk, (gouffre) welcher nicht mit eingedeicht werden soll; es wird verlangt, daß man durch den Punkt D eine Linie P Q dergestalt ziehet, damit durch dieselbe der größt mögliche Raum B P Q C eingeschlossen werde.



Auflösung. Wenn der Raum B P Q C ein Maximum seyn soll, so wird erfordert daß A P Q ein Minimum werde. Man setze den Winkel B A C $= \alpha$; A E $=$ a, die auf A E senkrechte Linie E D $=$ b und ziehe Q F mit DE parallel. Ferner sey AP $=$ x, FQ $=$ y, so erhält man:

$$PE = x - a,$$

$$AF = y \cot. \alpha, \text{ (G. §. 257.)}$$

$$PF = AP - AF = x - y \cot. \alpha.$$

Es verhält sich aber:

$$PE : ED = PF : FQ \quad \text{oder}$$

$$x - a : b = x - y \cot. \alpha : y, \quad \text{daher}$$

$$x y - a y = b x - b y \cot. \alpha, \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{b\,x}{x - a + b\cot.\alpha}.$$

Der Inhalt des $\triangle APQ$ sey $= z$, so ist:

$$z = \tfrac{1}{2}\,x\,y = \frac{\frac{1}{2}\,b\,x^2}{x - (a - b\cot.\alpha)},$$ oder wenn man

$a - b\cot.\alpha = A$ setzt:

$$z = \frac{\frac{1}{2}\,b\,x^2}{x - A}.$$

Der Werth von x für das Minimum von z kann nun nach (M. A. §. 44.) bestimmt werden. Denn:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{b\,x\,(x - A) - \frac{1}{2}\,b\,x^2}{(x - A)^2} = \frac{\frac{1}{2}\,b\,x^2 - b\,x\,A}{(x - A)^2}.$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{(x - A)^2\,b + (x - 2\,A)\,b\,x}{(x - A)^3}.$$ Aber für

$\frac{dz}{dx} = 0$ wird $\frac{1}{2}\,b\,x^2 = b\,x\,A$, folglich

$x = 2\,A = 2\,(a - b\cot.\alpha)$.

Hieraus erhält man:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{A^2\,b}{A^3} = \frac{b}{a - b\cot.\alpha} = \frac{1}{\frac{a}{b} - \cot.\alpha}.$$

Weil aber der Punkt D allemal zwischen den Linien AB, AC liegen muß, so läßt sich leicht einsehen, daß jederzeit $\frac{a}{b} > \cot.\alpha$ wird, daher ist $\frac{b}{a - b\cot.\alpha}$ eine positive Größe, folglich muß

z ein Minimum werden, wenn

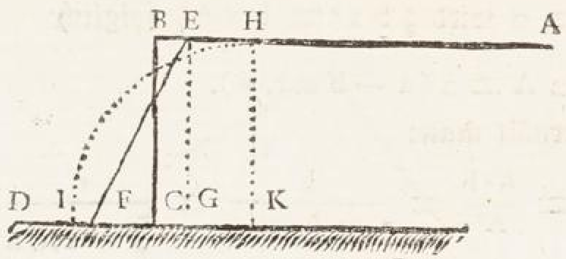
$x = 2\,(a - b\cot.\alpha)$ genommen wird.

Beispiel. Es sey der Winkel $BAC = 68^\circ$, $AE = 35$ Ruthen, $ED = 14$ Ruthen, so wird $\alpha = 68^\circ$; $a = 35$, $b = 14$, daher:

$x = 2\,(35 - 14.\cot 68^\circ) = 2\,(35 - 14.0{,}4040262)$ folglich $AP = 58{,}687$ Ruthen.

§. 51.

Aufgabe. Zur Anfertigung eines neuen Deichs A B C, welcher an die mit ihm parallele Anhöhe D C, vermittelst des Querdeichs B C senkrecht anschließen soll, ist eine bestimmte Summe Geldes bewilliget. Es fragt sich: ob man mit eben der Summe, oder welches einerlei ist, mit einer eben so langen Deichlinie A E F, nicht noch einen größern Raum einschließen kann; und welche Lage muß die Linie E F haben, damit das eingedeichte Land so groß werde, als es ohne Vergrößerung der Deichlinie möglich ist.



Auflösung. Man setze: Δ EFG — Parallelogram BCGE $=$ z, so muß nach den Bedingungen der Aufgabe, z ein Maximum seyn, welches nach (M. A. §. 44.) gefunden werden kann.

Es sey BC $=$ a, BE $=$ x, so ist FE $=$ a $+$ x, daher: FG $= \sqrt{[(a+x)^2 - a^2]} = \sqrt{(2ax + x^2)}$, also

$$\Delta EFG = \tfrac{1}{2} a \sqrt{(2ax + x^2)},$$

Parallgr. BCGE $=$ ax, folglich

$$z = \tfrac{1}{2} a \sqrt{(2ax + x^2)} - ax; \text{ also}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{a(a+x)}{2\sqrt{(2ax+x^2)}} - a = 0, \text{ oder}$$

$a + x = 2\sqrt{(2ax + x^2)}$, oder wenn man beide Theile der Gleichung quadrirt und ordnet:

$$x^2 + 2ax - \tfrac{1}{3}a^2 = 0, \text{ folglich}$$
$$x = -a \pm \sqrt{(a^2 + \tfrac{1}{3}a^2)} = a(\sqrt{\tfrac{4}{3}} - 1)$$
$$= 0,1547 \,.\, a, \text{ oder beinahe}$$
$$= \tfrac{2}{13}\, a.$$

Hieraus findet man ferner

$$CF = FG - CG = \sqrt{(2a \,.\, 0,1547 \,.\, a + 0,1547^2 a^2)} - 0,1547 \,.\, a,$$
$$= 0,4224 \,.\, a = \tfrac{8}{19} \,.\, a \text{ beinahe.}$$

§. 52.

Zusatz. Soll der Deich durch eine krumme Linie, unter obiger Bedingung, an die Anhöhe KD schließen, so ist bekannt, daß unter allen Linien von gleicher Länge, die Kreislinie die größte Fläche einschließt.

Ist daher H der Punkt, in welchem der gesuchte Kreisbogen die Linie BA berühret, so sey $BH = y$. Alsdann muß $HI = \frac{1}{2}a\pi = a + y$ seyn, daher wird:

$$y = a(\tfrac{1}{2}\pi - 1) = 0,57079 \,.\, a, \text{ oder beinahe}$$
$$y = \tfrac{4}{7}\, a.$$

Um zu finden wie viel die Kreislinie HI mehr Raum einschließt als die grade Linie EF, so bestimme man:

$$\text{Quadrant } HKI - (HEGK + EFG) =$$
$$\tfrac{1}{4}a^2\pi - (y - x)a - \tfrac{1}{2}a\sqrt{(2ax - x^2)} =$$
$$0,78539 \,.\, a^2 - 0,41609 \,.\, a^2 - 0,28867 \,.\, a^2 =$$
$$0,08063 \,.\, a^2 \text{ oder beinahe}$$

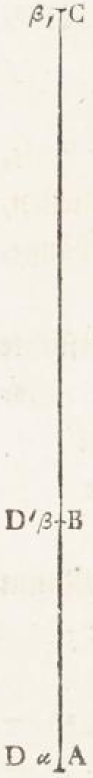
$\frac{2}{25}a^2$, welches der Raum ist, der gewonnen wird, wenn man statt der Linie EF den Bogen HI annimmt.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist nach Brahms a. a. O. 1ter Theil §. 165 und ist zu schön als daß sie hier übergangen werden könnte. Jedem Freunde der Wissenschaften wird noch lange das Andenken dieses würdigen Mannes schätzbar bleiben.

§. 53.

Ob gleich nachstehende Aufgabe in dem 2ten Theile der Karstenschen Anfangsgründe sehr schön durch Elementaranalysis aufgelöst ist, so wird dennoch nachstehende Auflösung durch Integralrechnung, sich leichter übersehen lassen.

Aufgabe. Vermittelst des Barometers eine Höhe zu messen.



Auflösung. Die Barometerhöhe in A sey $= \alpha$, in B $= \beta$ und die Höhe AB $= x$. Wächst nun x um den Theil dx, so muß die Barometerhöhe β um den Theil $-d\beta$ zunehmen, und die Luftsäule von der Höhe dx muß eben so stark drücken, wie die Quecksilbersäule von der Höhe $d\beta$.

Ist nun D die Dichtigkeit der Luft bei A, und D′ bei B; ferner δ die Dichtigkeit des Quecksilbers, so wächst der Druck der Luft um den Theil $D'dx$, wenn der Druck der Quecksilbersäule um den Theil $-\delta\, d\beta$ zunimmt. Man hat also

$$D' . dx = -\delta . d\beta .$$

Es verhalten sich aber die Barometerhöhen wie die Pressungen der Luft, und diese, wie die Dichtigkeiten derselben, also:

$$\alpha : \beta = D : D' = \frac{\beta . D}{\alpha}, \text{ daher}$$

$$\frac{\beta D}{\alpha} . dx = -\delta . d\beta, \text{ oder}$$

$$\frac{D}{\alpha\delta} . dx = -\frac{d\beta}{\beta}; \text{ also (M. A. §. 62. 4. Z.)}$$

$$\int \frac{D}{\alpha\delta} . dx = \frac{Dx}{\alpha\delta} = -\text{Log. nat. } \beta + \text{const.}$$

Es ist aber der Modul von den briggischen Logarithmen $= 0{,}4342945$; setzt man diesen $= m$, so erhält man für das gemeine Logarithmensystem

$$\frac{D\,x}{\alpha\,\delta} = -\frac{\text{Log.}\,\beta}{m} + \text{const.}$$

Für $x = 0$, wird $\beta = \alpha$ also const. $= \frac{\text{Log.}\,\alpha}{m}$, daher:

$$\frac{m\,D\,x}{\alpha\,\delta} = \text{Log.}\,\alpha - \text{Log.}\,\beta = \text{Log.}\,\frac{\alpha}{\beta}$$ (N. §. 227.) folglich

$$x = \frac{\alpha\,\delta}{m\,D}\,\text{Log.}\,\frac{\alpha}{\beta}.$$

Für die Höhe A C $= y$ sey die Barometerhöhe in C $= \beta'$, so ist nach der eben gefundenen Formel:

$$y = \frac{\alpha\,\delta}{m\,D}\,\text{Log.}\,\frac{\alpha}{\beta'}.$$

Setzt man B C $= y - x = z$, so wird:

$$z = y - x = \frac{\alpha\,\delta}{m\,D}\left(\text{Log.}\,\frac{\alpha}{\beta'} - \text{Log.}\,\frac{\alpha}{\beta}\right)$$ oder

$$= \frac{\alpha\,\delta}{m\,D}\,(\text{Log.}\,\alpha - \text{Log.}\,\beta' - \text{Log.}\,\alpha + \text{Log.}\,\beta),$$ folglich

$$z = \frac{\alpha\,\delta}{m\,D}\,\text{Log.}\,\frac{\beta}{\beta'}.$$

Wenn das Quecksilber 14 mal dichter, und die Luft 800 mal dünner als Wasser ist, so steigt das Quecksilber im Barometer auf $27\frac{1}{2}$ Parisische Zolle. Man erhält daher:

$\alpha = 27\frac{1}{2}$ Zolle, $\delta = 14$, $D = \frac{1}{800}$, also

$$\frac{\alpha\,\delta}{m\,D} = \frac{27\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 800}{0,4342945} = 709200 \text{ Zolle}$$

$= 59100$ Fuß $= 9850$ Toisen, folglich

$$z = 9850\,.\,\text{Log}\,\frac{\beta}{\beta'} = \left(1 - \frac{1}{66}\right) 10000\,\text{Log.}\,\frac{\beta}{\beta'};$$

wo z in Toisen gefunden wird.

Verlangt man diese Höhe in Rheinländische Fuße ausgedrückt, so kann die in Parisischen Fußen ausgedrückte Zahl $6\,.\,9850 = 59100$ leicht in Rheinländischen angegeben werden, denn nach den angehängten Tafeln findet man:

59100	
51750	162
9315	029
103	500
61168	691 ; folglich ist

$$z = 61168,7 \,.\, \text{Log.}\, \frac{\beta}{\beta'}.$$

Da alsdann z in Rheinländischen Fußen bestimmt wird.

Anmerkung. Hr. Bouguer findet aus Beobachtungen:

$$z = (1 - \tfrac{1}{50})\; 10000\; \text{Log.}\, \frac{\beta}{\beta'};$$

und Hr. de Lüc:

$$z = 10000\; \text{Log.}\, \frac{\beta}{\beta'};$$

folglich ist der hier gefundene Werth für z, zwischen diesen beiden durch verschiedene Beobachtungen gefundenen Werthen enthalten, und kann daher mit desto mehr Sicherheit in der Ausübung angenommen werden.

Sollte die Temperatur der Atmosphäre in B und C verschieden seyn, so müssen zuvor die gefundenen Barometerhöhen noch berichtigt werden.

§. 54.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines Kreuzgewölbes ABCA′B′ zu finden, wenn solches nach einem Kreisbogen gewölbt ist.

(Siehe Kupfertafel *Fig. 4.* und *5.*)

Auflösung. Es sey ADECF der achte Theil des ganzen Gewölbes (*Fig. 4.*); der Winkel AB′A′ unter welchem die Gänge sich schneiden sey α. Man ziehe BG

(*Fig. 5.*) senkrecht auf die verlängerte Linie $B'A$, so ist BG der Durchmesser desjenigen Kreises, nach welchem das Gewölbe gerundet ist, also der Bogen BSG eine halbe Kreislinie.

Man setze $AP = x$, die auf der Grundfläche BAB' senkrechte Linie $PM = y$; und die Weite des Gewölbbogens oder $GE = a$. Ferner sey PQ, PR, MN, MS mit AB' parallel, so müssen alle Punkte in der Linie SN gleich hoch liegen, daher ist

$$RS = PM = y.$$

Weil F der Mittelpunkt der Fläche $ABA'B'$ ist, so wird $AD = DF$, also $AP = PQ = x$. Da nun $\angle A'BA = \alpha = BAG$, so ist (G. §. 257.)
$RG = AP \,.\, \sin \alpha = x \sin. \alpha$; und ferner (G. §. 186.)
$RS = \sqrt{(GR \,.\, RB)}$ oder

$$y = \sqrt{[x \sin. \alpha (a - x \sin. \alpha)]} = \sqrt{[a x \sin. \alpha - x^2 \sin. \alpha^2]}.$$

Setzt man nun den Inhalt des unbestimmten Stücks $APMNQ = V$, so ist

$$dV = \text{Fläche } PMNQ \,.\, dx = PM \,.\, PQ \,.\, dx$$
$$= y x dx = x dx \sqrt{(a x \sin. \alpha - x^2 \sin. \alpha^2)};$$

folglich:

$$V = \int x dx \sqrt{(a x \sin. \alpha - x^2 \sin. \alpha^2)} \text{ oder}$$
$$= \int \sin. \alpha \,.\, x dx \left(\frac{a x}{\sin. \alpha} - x^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Um die Integration zu bewerkstelligen, setze man:

$$\frac{a x}{\sin. \alpha} - x^2 = z, \text{ so ist}$$

$$\frac{a dx}{\sin. \alpha} - 2 x dx = dz, \text{ oder}$$

$$x dx = \frac{a dx}{2 \sin. \alpha} - \frac{dz}{2}.$$

Diese Werthe in die zuletzt für V gefundene Formel gesetzt, giebt:

$$V = \int \sin.\alpha . \left(\frac{a\,dx}{2\sin.\alpha} - \frac{dz}{2}\right) z^{\frac{1}{2}}.$$

$$= \tfrac{1}{2} a \int z^{\frac{1}{2}} dx - \tfrac{1}{2} \sin.\alpha \int z^{\frac{1}{2}} dz.$$

Das zweite Integral läßt sich leicht finden; denn:

$$-\tfrac{1}{2}\sin.\alpha \int z^{\frac{1}{2}} dz = -\tfrac{1}{2}.\tfrac{2}{3}.\sin.\alpha . z^{\frac{3}{2}} + \text{const. oder}$$

$$= -\tfrac{1}{3}\sin.\alpha . \sqrt{\left[\left(\frac{ax}{\sin.\alpha} - x^2\right)^3\right]} + \text{const.}$$

Das erste Integral $\frac{1}{2} a \int z^{\frac{1}{2}} dx$ findet man nach (M. A. §. 87. 4ter Zus.) wenn daselbst $\frac{a}{\sin.\alpha}$ statt $2r$ gesetzt wird, und es ist:

$$\tfrac{1}{2} a \int dx \sqrt{\left(\frac{ax}{\sin.\alpha} - x^2\right)} =$$

$$\tfrac{1}{2} a \left[\tfrac{1}{2}.\frac{a^2}{4\sin.\alpha^2}.\text{Acsinv.}\frac{2\sin.\alpha}{a}.x - \right.$$

$$\left.\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{2.\sin.\alpha} - x\right)\sqrt{\left(\frac{ax}{\sin.\alpha} - x^2\right)}\right] + \text{const.}$$

Beide Integrale zusammen geben:

$$V = \frac{a^3}{16.\sin.\alpha^2}.\text{Acsinv.}\frac{2\sin.\alpha}{a}x -$$

$$\frac{a}{4}\left(\frac{a}{2\sin.\alpha} - x\right)\sqrt{\left(\frac{ax}{\sin.\alpha} - x^2\right)} -$$

$$\tfrac{1}{3}\sin.\alpha \sqrt{\left[\left(\frac{ax}{\sin.\alpha} - x^2\right)^3\right]} + \text{const.}$$

Für $x = 0$ wird $V = 0$ also Const. $= 0$, und man erhält nach vorhergegangener Auflösung und Zusammenziehung:

$$V = \frac{a^3}{16.\sin.\alpha^2}.\text{Acsinv.}\frac{2\sin.\alpha}{a}.x -$$

$$\left(\frac{a^2}{8\sin.\alpha} + \frac{ax}{12} - \frac{x^2\sin.\alpha}{3}\right)\sqrt{\left(\frac{ax}{\sin.\alpha} - x^2\right)}.$$

Es ist aber $AD = \frac{HG}{\sin.\alpha} = \frac{a}{2\sin.\alpha}$. Wenn daher $AP = AD$ wird, so ist $x = \frac{a}{2\sin.\alpha}$, also P = Körper $ADECF$ =

$$\frac{a^3}{16 . \sin. \alpha^2} \text{ Acsinv. } \frac{2 \sin. \alpha}{a} \cdot \frac{a}{2 \sin. \alpha} -$$

$$\left(\frac{a^2}{8 \sin. \alpha} + \frac{a}{12} \cdot \frac{a}{2 \sin \alpha} - \frac{a^2 \sin. \alpha}{12 . \sin. \alpha^2}\right) \sqrt{\left(\frac{a^2}{2 \sin. \alpha^2} - \frac{a^2}{4 \sin. \alpha^2}\right)}$$

$$= \frac{a^3}{16 . \sin. \alpha^2} \text{ Acsinv. } 1 - \frac{a^3}{\sin. \alpha^2} \left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{24} - \tfrac{1}{12}\right) \sqrt{\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right)};$$

oder weil Acsinv. $1 = \frac{1}{2}\pi$, so ist der

$$\text{Körper } ADECF = \frac{a^3 \pi}{32 . \sin. \alpha^2} - \frac{a^3}{24 \sin. \alpha^2}$$

$$= \frac{a^3}{8 \sin. \alpha^2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right).$$

Weil man nun denjenigen Theil des Gewölbes, welcher über A F D′ oder B F D′ stehet, auf gleiche Art findet, so folgt daraus, daß die vorstehende Formel den achten Theil des ganzen Gewölbes angiebt, daher findet man den

Inhalt des ganzen Kreuzgewölbes

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) \frac{a^3}{\sin. \alpha^2}$$

$$= \frac{0,45206483 . a^3}{\sin. \alpha^2}.$$

Beispiel. Wenn sich zwei Gewölbe unter einem Winkel von 75° schneiden, und es ist ihre Bogenweite oder $a = 12$ Fuße, so findet man, wenn zur Erleichterung der Rechnung, die Logarithmen genommen werden:

Log. 0,4520648 = 0,6552008 — 1
Log. 1728 = 3,2375437
2,8927445

Nun ist Log. sin. 75° = 9,9849438 — 10 oder
= 0,9849438 — 1, daher

Log. (sin. 75°)² = 2 Log. sin. 75° = 0,9699876 — 1.

Zieht man diese letzte Zahl von 2,8927445 ab, so erhält man:

$$\text{Log.}\ \frac{0{,}452 \cdot 1728}{(\sin.\ 75^\circ)^2} = 2{,}9227569.$$

Nach den Tabellen stimmt hierzu die Zahl 837,0658; es ist daher der Inhalt des gesuchten Kreuzgewölbes

$= 837{,}0658$ Kubikfuße.

§. 54.

Zusatz. Durchschneiden sich beide Gewölbe unter einem **rechten Winkel**, so wird $\alpha = 90^\circ$, also $\sin.\ 90^\circ = 1$ und man erhält aus der Formel im vorstehenden §. für diesen Fall, den

Inhalt des sich rechtwinklicht schneidenden Kreuzgewölbes:

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) a^3 \text{ oder}$$

$$= 0{,}4520648 \cdot a^3.$$

§. 55.

Aufgabe. Ein rechtwinklichtes Kreuzgewölbe soll einen Fuß dick und 15 Fuß im Lichten weit seyn, man frägt: wie groß ist der körperliche Inhalt des einen Fuß starken Mauerwerks?

Auflösung. Man setze die innere Weite von 15 Fuß $= d$, und die äußere oder 17 Fuß $= D$, so ist nach dem vorhergehenden §. der gesuchte Inhalt

$$= \left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{3}\right) \cdot (D^3 - d^3);$$

$$= 0{,}4520648 \cdot (17^3 - 15^3);$$

$= 0{,}4520648 \cdot 1538 = 695{,}275$ Kubikfuße.

Von den nachstehenden Tafeln.

Die folgenden Tafeln schienen mir um so viel mehr hierher zu gehören, da solche bei der Auflösung der meisten mathematischen Aufgaben die Rechnungen sehr abzukürzen dienen, indem sie nicht nur die weitläuftigen Multiplikationen und Divisionen ersparen, sondern auch, zur Vermeidung der gewöhnlichen Rechnungsfehler, nicht wenig beitragen. So viel mir bekannt ist, sind solche zum erstenmale hier abgedruckt.

Um den Gebrauch und Nutzen zu zeigen, werde ich die wegen jeder Tafel nöthige Bemerkungen auf einander folgen lassen, und ihre Anwendung durch einige Beispiele erläutern.

Hr. G. O. B. R. Schulze, im ersten Hefte seines Taschenbuchs (1782) §. 486, hat bereits den Nutzen von andern dergleichen Tafeln gezeigt.

I. Tafel. Diese setzt voraus, daß sowohl für das zehntheilige als auch für das zwölftheilige Maaß, einerlei Länge zur Ruthe angenommen worden ist. Sie hat einen doppelten Nutzen; weil sie zuerst dazu dient, jede gegebene Anzahl zehntheiliger Längenfuße in zwölftheilige zu verwandeln; oder wenn es besondere Umstände erfordern, so findet man in der daneben stehenden Abtheilung, die demselben entsprechenden zwölftheiligen Fuße, Zolle, Linien und Skrupel, bis auf Zehntheile des Skrupels genau. In den Tafeln selbst lese man statt: Zht. zehntheilige; Zwt. zwölftheilige; F. Fuße; Z. Zolle; L. Linien; S. Skrupel.

Dasselbe gilt von den Abtheilungen für die Zolle, Linien und Skrupel.

Bei dieser und allen folgenden Tafeln, die XVte ausgenommen, ist das neunfache jedes Werthes angegeben, auch wo es die Umstände erforderten, findet man das 10, 12, 144 und 1728fache desselben.

II. Tafel. Diese enthält umgekehrt die Vergleichung der zwölftheiligen Fuße u. s. w. mit den zehntheiligen, bis auf Zehnmillionentheile genau.

III. IV. V. VI. Tafel. Bei diesen Tafeln ist gleichfalls zum Grunde gelegt, daß einerlei Quadratruthe in 100 oder 144 Quadratfuße u. s. w.; und einerlei Kubikruthe in 1000 oder 1728 Kubikfuße u. s. w. eingetheilt ist. Sie sind bis auf Zehnmillionentheile genau berechnet, und zu der letzten Dezimalstelle, ist allemal noch 1 hinzu gesetzt worden, wenn auf dieselbe eine 6 oder höhere Ziffer folgte.

Außerdem ist hier noch der Dezimalbruch auf die untergeordneten Maaße, bis auf Zehntheile eines Skrupels genau, reduzirt.

Erstes Beispiel. Es sollen 743,680743 zehntheilige □ Fuß in zwölftheilige verwandelt werden.

Man schreibe die gegebene Zahl auf nachstehende Art, so findet man aus der ersten Abtheilung der III. Tafel:

700	1008,
40	57, 6
3	4, 32
0, 6	0, 864
0, 08	0, 1152
0, 0007	0, 001008
0, 00004	0, 0000576
0, 000003	0, 00000432

1070, 9002699 zehntheilige □ Fuß.
= 743, 680743 zwölftheilige □ Fuß.

Zweites Beispiel. Werden zugleich die Zolle, Linien und Skrupel verlangt, so findet man nach der zweiten Abtheilung der III. Tafel:

		Fuß.	Zoll.	Linien.	Skrupel.
Fuß	700	1008			
	40	57	86	57	86, 4
	3	4	46	11	74, 9
Zoll	60		124	59	130, 2
	8		16	84	113, 4
Linien	7			20	129, 9
Skrupel	40			1	27, 6
	3				12, 9
		1070 F.	129 Z.	91 L.	143, 3 S.
Zht. □ Maaß =		743 F.	68 Z.	7 L.	43 S.
Zwt. □ Maaß.					

Auf gleiche Art wird das zwölftheilige Maaß durch eine leichte Rechnung, in zehntheiliges verwandelt.

VII. VIII. IX. Tafel. Diese dienen dazu, jede gegebene Anzahl zwölftheiliger Zolle, Linien und Skrupel, in zwölftheilige Fuße, nach Längen, Flächen- oder Körpermaaß zu verwandeln.

Die angegebenen Werthe sind bis auf Tausendmillionentheile genau, nur daß bei dem Körpermaaße, aus leicht einzusehenden Gründen, noch einige Dezimalstellen mehr beigefügt sind.

Beispiel. Wenn 137 □ Zoll, 46 □ Linien, 129 □ Skrupel zwölftheiliges Maaß in Fuße dieses Maaßes ausgedrückt werden sollen, so kömmt die Rechnung nach der VIII. Tafel auf folgende Art zu stehen.

□ Zolle	100	0, 6944444
	30	0, 2083333
	7	0, 0486111
□ Linien	40	0, 0019290
	6	0, 0002893
□ Skrupel	100	0, 0000339
	20	0, 0000067
	9	0, 0000030
		0, 9536507 □ Fuß
		= 137 □ Z. 46 □ L. 129 □ S.

X. Tafel. Hier ist zum Grunde gelegt, daß nach Eisenschmidt, 14400 Rheinländische Fuße = 13913 Parisische Fuße sind, und darnach ist die Größe des Längen, Flächen- und Körperfußes für beide Maaße so bestimmt, daß es leicht ist, jede gegebene Anzahl Rheinländischer Fuße in Parisische, und umgekehrt, zu verwandeln.

Ferner sind zu mehrerer Bequemlichkeit bei vorkommenden Rechnungen, die nöthigen Logarithmen beigefügt worden.

Beispiel. Wären 817,346 Parisische Kubikfuß gegeben, und man sollte dieselben in Rheinländische verwandeln, so ist:

800	886, 98261
10	11, 087283
7	7, 761098
0,3	0, 332618
0,04	0, 044349
0,006	0, 006652

906, 21461 Rheinländische Kubikfuß
= 817, 346 Parisischen Kubikfuß.

XI. Tafel. Diese enthält eine Vergleichung des Berlinischen Pfundes mit dem Parisischen, wenn nach **Kruse** vorausgesetzt wird, daß 10188 Berlinische Pfunde = 9750 Parisischen sind.

XII. XIII. Tafel. Bei diesen Tafeln ist gleichfalls nach **Kruse** angenommen worden, daß 9728 Berlinische Pfunde = 9750 Cöllnischen, und daß 10188 Cöllnische Pfunde = 9728 Parisischen sind.

XIV. Tafel. In dieser Tafel enthält die erste Abtheilung das Gewicht von einem Rheinländischen Kubikfuß Regenwasser, bei einer Temperatur von 64 bis 66 Fahrenheitschen Graden, in Berlinischen Pfunden = γ Hierbei sind die neusten Versuche aus Hrn. **Karstens** Naturwissenschaft (1785.) §. 34. zum Grunde gelegt.

Die zweite Abtheilung dieser Tafel enthält das Vielfache der Zahl $\frac{1}{\gamma}$. Diese wird sehr häufig gebraucht, wenn aus dem Gewichte eines Körpers, sein Inhalt gefunden werden soll.

Die dritte Abtheilung giebt das Vielfache von dem Gewichte eines zwölftheiligen Kubikzolles an; und von der letzten Abtheilung gilt ebendasselbe, was von der zweiten gesagt worden ist.

Erstes Beispiel. Wenn 87 Fuß 29,64 Zoll in Rheinländischem Kubikmaaß gegeben sind, wieviel wird eine eben so große Menge Regenwasser in Berlinischen Pfunden wiegen?

Fuß	80	5224, 512
	7	457, 1448
Zoll	20	0, 75586
	9	0, 34014
	0,6	0, 02267
	0,04	0, 00151

5682, 77698 Berlinische Pfunde
= dem Gewichte von 87 F. 29, 64 Z. Regenwasser.

Zweites Beispiel. Soll hingegen der Raum gefunden werden, welchen 736, 94 Berlinische Pfunde Regenwasser einnehmen, so findet man denselben $= \frac{1}{7} 736, 94$ (St. §. 19.) daher nach der zweiten Abtheilung der XIV. Tafel

700	10, 7184
30	0, 45936
6	0, 091872
0, 9	0, 013781
0, 04	0, 000612

11, 28402 Rheinländ. Kubikfuß Regenwasser welche 736, 94 Berlinische Pfunde wiegen.

XV. Tafel. Die oft erwähnten mühsamen Versuche des Hrn. Coulomb, lassen sich zwar nicht wohl mit einem Blicke übersehen, und unter allen Umständen unbedingt anwenden. Um aber doch einigermaßen die Frikzion bei verschiedenen Körpern mit mehr Genauigkeit als gewöhnlich geschiehet, in Rechnung zu bringen, so ist unter allen diesen Versuchen eine mittlere Zahl genommen, und daraus diese Tafel zusammengesetzt worden.

Von den Brüchen, welche in den Abtheilungen stehen, zeigt der Zähler und Nenner, das Verhältniß der Frikzion zum Druck an.

Z. B. Bei trocknem Eichenholz auf Tannenholz, verhält sich im Anfange der Bewegung, die Frikzion zum Druck = 3 : 7.

XVI. Tafel Die in der Mechanik gebräuchliche Gallilåische Zahl g, oder der Weg welchen ein frei fal=

lender Körper, nahe an der Oberfläche der Erde, in der ersten Sekunde zurück legt, ist hier in Rheinländischen Fußen bis auf Tausendtheile genau angegeben, und darnach sind die übrigen Werthe von $\frac{1}{4g}$ $\sqrt{g}$ und $\sqrt{\frac{1}{g}}$ berechnet, welche bei dem Falle der Körper und besonders in der Hydraulik von vielfältigem Gebrauche sind.

Erstes Beispiel. Wenn nach der Größe des Raums gefragt wird, welchen ein Körper bei dem freien Falle in 13,5 Sekunden durchläuft, so ist dieser Raum (Karst. Mech. §. 19.) $= g . 13,5^2 = g . 182,25$; daher:

100	1562, 5
80	1250, 00
2	31, 250
0, 2	3, 1250
0, 05	0, 78125
	2847, 6562

2847, 6562 Rheinländische Fuß, welche ein frei fallender Körper in 13,5 Sekunden durchläuft.

Zweites Beispiel. Wenn ein Körper am Ende seines Falles eine Geschwindigkeit von 15,8 Fuß in einer Sekunde erlangt hat, wie groß ist der Raum durch welchen derselbe gefallen ist?

Diesen Raum findet man (K. M. §. 20.)

$$= \frac{1}{4g} . 15,8^2 \frac{1}{4g} . 249,64; \text{ daher}$$

200	3, 2
40	0, 64
9	0, 144
0,6	0, 0096
0,04	0, 00064
	3, 9942

3, 9942 Rheinländische Fuß, welche der Körper durchlaufen muß, um eine Geschwindigkeit von 15,8 Fuß zu erlangen.

Drittes Beispiel. Ein Körper ist durch einen Raum von 38,6 Rheinländischen Fuß frei gefallen, wie groß ist seine am Ende des Falles erlangte Geschwindigkeit?

Nach Karsten a. a. O. ist diese Geschwindigkeit $= 2 \cdot \sqrt{g} \cdot \sqrt{38,6} = 12,4256 \cdot \sqrt{g}$ und man erhält:

10	39, 52847
2	7, 905694
0, 4	1, 5811388
0, 02	0, 0790569
0, 005	0, 0197642
0, 0006	0, 0023717
	49, 116496

49, 116496 Rheinländ. Fuß, Geschwindigkeit welche ein Körper durch den Fall von einer 38,6 Fuß großen Höhe erlangt.

Viertes Beispiel. Wie viel Zeit wird erfordert, wenn ein Körper durch einen Raum von 37, 5 Rheinländischen Fuß, frei fallen soll?

Diese Zeit findet man a. a. O.

$$= \sqrt{37,5} \cdot \sqrt{\frac{1}{g}} = 6,1237 \cdot \sqrt{\frac{1}{g}}; \text{ daher:}$$

6	1, 517893
0, 1	0, 0252982
0, 02	0, 0050596
0, 003	0, 0007589
0, 0007	0, 0001771
	1, 549187

1, 549187 Sekunden, welche ein Körper nöthig hat, um bei dem freien Falle einen Raum von 37,5 Fuß zu durchlaufen.

Es würde mir sehr angenehm seyn, wenn ich erfahren könnte, ob schon Tafeln berechnet sind, welche für jeden Durchmesser von 1 bis 1000 die dazu gehörige Kreisfläche, bis auf neun Dezimalstellen genau, angeben. Hr. H. R. **Kästner** erwähnt in der zweiten Sammlung der geometrischen Aufgaben (1791.) 121ste Seite, einer solchen Tafel in **Beyers** Conometria mauritana (1619.) nach welcher die Kreisflächen bis auf fünf Dezimalstellen genau angegeben sind. Die von mir berechnete Tafel wäre ich bereit, wegen ihres mannichfaltigen Nutzens, mitzutheilen, sobald ich die Versicherung erhalten hätte, daß noch keine dergleichen öffentlich bekannt sind.

Tafeln,

welche

die Vergleichung und das Vielfache

verschiedener

in der

Mathematik gebräuchlichen Größen

enthalten.

I. Tafel.

Vergleichung des zehntheiligen Långenmaaßes mit dem zwölftheiligen.

Zht. Fuße.	Zwölfthl. Fuße.	F.	Z.	L.	S.
1	1,2000000	1.	2.	4.	9,6
2	2,4000000	2.	4.	9.	7,2
3	3,6000000	3.	7.	2.	4,8
4	4,8000000	4.	9.	7.	2,4
5	6,0000000	6.	0.	0.	0
6	7,2000000	7.	2.	4.	9,6
7	8,4000000	8.	4.	9.	7,2
8	9,6000000	9.	7.	2.	4,8
9	10,8000000	10.	9.	7.	2,4
10	12,0000000	12.	0.	0.	0
Zht. Zolle.	**Zwölfthl. Zolle.**	**F.**	**Z.**	**L.**	**S.**
1	1,4400000	0.	1.	5.	3,4
2	2,8800000	0.	2.	10.	6,7
3	4,3200000	0.	4.	3.	10,1
4	5,7600000	0.	5.	9.	1,4
5	7,2000000	0.	7.	2.	4,8
6	8,6400000	0.	8.	7.	8,2
7	10,0800000	0.	10.	0.	11,5
8	11,5200000	0.	11.	6.	2,9
9	12,9600000	1.	0.	11.	6,2
10	14,4000000	1.	2.	4.	9,6

Fortsetzung.

(Långenmaaß.)

Zht Linien	Zwölfthl. Linien.	Z.	L.	S.
1	1,7280000	0.	1.	8,7
2	3,4560000	0.	3.	5,5
3	5,1840000	0.	5.	2,2
4	6,9120000	0.	6.	0,9
5	8,6400000	0.	8.	7,7
6	10,3680000	0.	10.	4,4
7	12,0960000	1.	0.	1,2
8	13,8240000	1.	1.	9,9
9	15,5520000	1.	3.	6,6
10	17,2800000	1.	5.	3,4

Zht. Skr.	Zwölfthl. Skrupel.	L.	S.
1	2,0736000	0.	2,1
2	4,1472000	0.	4,1
3	6,2208000	0.	6,2
4	8,2944000	0.	8,3
5	10,3680000	0.	10,4
6	12,2416000	1.	0,4
7	14,5152000	1.	2,5
8	16,5888000	1.	4,6
9	18,6624000	1.	6,6
10	20,7360000	1.	8,7

II. Tafel.

Vergleichung des zwölftheiligen Längenmaaßes mit dem zehntheiligen.

Zwt. Fuße	Zehnthl. Fuße.	F.	Z.	L.	S.
1	0,8333333	0.	8.	3.	3,3
2	1,6666667	1.	6.	6.	6,7
3	2,5000000	2.	5.	0.	0.
4	3,3333333	3.	3.	3.	3,3
5	4,1666667	4.	1.	6.	6,7
6	5,0000000	5.	0.	0.	0.
7	5,8333333	5.	8.	3.	3,3
8	6,6666667	6.	6.	6.	6,7
9	7,5000000	7.	5.	0.	0.
10	8,3333333	8.	3.	3.	3,3
11	9,1666667	9.	1.	6.	6,7
12	10,0000000	10.	0.	0.	0.

Zwt. Zolle.	Zehnthl. Zolle.	Z.	L.	S
1	0,6944444	0.	6.	9,4
2	1,3888889	1.	3.	8,9
3	2,0833333	2.	0.	8,3
4	2,7777778	2.	7.	7,8
5	3,4722222	3.	4.	7,2
6	4,1666667	4.	1.	6.7
7	4,8611111	4.	8.	6,1
8	5,5555556	5.	5.	5,5
9	6,2500000	6.	2.	5,0
10	6,9444444	6.	9.	4,4
11	7,6388889	7.	6.	3,9
12	8,3333333	8.	3.	3,3

Fortsetzung.

(Längenmaaß.)

Zwt. Linien.	Zehnthl. Linien.	L.	S.
1	0,5787037	0.	5,8
2	1,1574074	1.	1,6
3	1,7361111	1.	7,4
4	2,3148148	2.	3,1
5	2,8935185	2.	8,9
6	3,4722222	3.	4,7
7	4,0509259	4.	0,5
8	4,6296296	4.	6,3
9	5,2083333	5.	2,0
10	5,7870370	5.	7,8
11	6,3657407	6.	3,6
12	6,9444444	6.	9,4
Zwt. Skrup.	**Zehnthl. Skrupel.**		**S.**
1	0,4822531		0,5
2	0,9645062		1,0
3	1,4467592		1,4
4	1,9290123		1,9
5	2,4112654		2,4
6	2,8935185		2,9
7	3,3757716		3,4
8	3,8580247		3,9
9	4,3402778		4,3
10	4,8225308		4,8
11	5,3047839		5,3
12	5,7870370		5,8

III. Tafel.

Vergleichung des Zehntheiligen Flächenmaaßes mit dem zwölftheiligen.

Zht. Fuße	Zwölfthl. Fuße.	F.	Z.	L.	S.
1	1,4400000	1.	63.	51.	121,0
2	2,8800000	2.	126.	103.	97,9
3	4,3200000	4.	46.	11.	47,9
4	5,7600000	5.	109.	63.	51,8
5	7,2000000	7.	28.	115.	28,8
6	8,6400000	8.	92.	23.	5,8
7	10,0800000	10.	11.	74.	126,7
8	11,5200000	11.	74.	126.	103,7
9	12,9600000	12.	138.	34.	80,6
10	14,4000000	14.	57.	86.	57,6
20	28,8000000	28.	115.	28.	115,2
30	43,2000000	43.	28.	115.	28,8
40	57,6000000	57.	86.	57.	86,4
50	72,0000000	72.	0.	0.	0.
60	86,4000000	86.	57.	86.	57,6
70	100,8000000	100.	115.	28.	115,2
80	115,2000000	115.	28.	115.	28,8
90	129,6000000	129.	86.	57.	86,4
100	144,0000000	144.	0.	0.	0.

Fortsetzung.

(Flächenmaaß.)

Zht. Zolle.	Zwölfthl. Zolle.	F.	Z.	L.	S.
1	2,0736000	0.	2.	10.	86,2
2	4,1472000	0.	4.	21.	28,3
3	6,2208000	0.	6.	31.	114,5
4	8,2944000	0.	8.	42.	56,7
5	10,3680000	0.	10.	52.	142,8
6	12,4416000	0.	12.	63.	85,0
7	14,5152000	0.	14.	74.	27,2
8	16,5888000	0.	16.	84.	113,4
9	18,6624000	0.	18.	95.	55,5
10	20,7360000	0.	20.	105.	141,7
20	41,4720000	0.	41.	67.	139,4
30	62,2080000	0.	62.	29.	137,1
40	82,9440000	0.	82.	135.	134,8
50	103,6800000	0.	103.	97.	132,5
60	124,4160000	0.	124.	59.	130,2
70	145,1520000	1.	1.	21.	127,9
80	165,8880000	1.	21.	127.	125,6
90	186,6240000	1.	42.	89.	123,3
100	207,3600000	1.	63.	51.	121,0

Fortsetzung.

(Flächenmaaß.)

Zht. Linien.	Zwölfthl. Linien.	Z.	L.	S.
1	2,9859840	0.	2.	141,0
2	5,9719680	0.	5.	140,0
3	8,9579520	0.	8.	137,9
4	11,9439360	0.	11.	135,9
5	14,9299200	0.	14.	133,9
6	17,9159040	0.	17.	131,9
7	20,9018880	2.	20.	129,9
8	23,8878720	0.	23.	127,8
9	26,8738560	0.	26.	125,8
10	29,8598400	0.	29.	123,8
20	59,7196800	0.	59.	103,6
30	89,5795200	0.	89.	83,5
40	119,4393600	0.	119.	63,3
50	149,2992000	1.	5.	43,1
60	179,1590400	1.	35.	22,9
70	209,0188800	1.	65.	2,7
80	238,8787200	1.	94.	126,6
90	268,7385600	1.	124.	106,4
100	298,5984000	2.	10.	86,2

Fortsetzung.

Längenmaaß.

Zht. Skrup.	Zwölfthl. Skrupel.	L.	S.
1	4,2998170	0.	4,3
2	8,5996339	0.	8,6
3	12,8994509	0.	12,9
4	17,1992678	0.	17,2
5	21,4990848	0.	21,4
6	25,7989018	0.	25,7
7	30,0987187	0.	30,0
8	34,3985357	0.	34,3
9	38,6983526	0.	38,6
10	42,9981696	0.	42,9
20	85,9963392	0.	85,8
30	128,9945088	0.	128,7
40	171,9926784	1.	27,6
50	214,9908480	1.	70,5
60	257,9890176	1.	113,4
70	300,9871872	2.	12,3
80	343,9853568	2.	55,2
90	386,9835264	2.	98,1
100	429,9816960	2.	141,0

IV. Tafel.

Vergleichung des zwölftheiligen Flächenmaaßes mit dem zehntheiligen.

zwt. Fuße.	Zehnthl. Fuße.	F.	Z.	L.	S.
1	0,6944444	0.	69.	44.	44,4
2	1,3888889	1.	38.	88.	88,9
3	2,0833333	2.	8.	33.	33,3
4	2,7777778	2.	77.	77.	77,8
5	3,4722222	3.	47.	22.	22,2
6	4,1666667	4.	16.	66.	66,7
7	4,8611111	4.	86.	11.	11,1
8	5,5555556	5.	55.	55.	55,6
9	6,2500000	6.	25.	0.	0.
10	6,9444444	6.	94.	44.	44,4
20	13,8888889	13.	88.	88.	88,9
30	20,8333333	20.	83.	33.	33,3
40	27,7777778	27.	77.	77.	77,8
50	34,7222222	34.	72.	22.	22,2
60	41,6666667	41.	66.	66.	66,7
70	48,6111111	48.	61.	11.	11,1
80	55,5555556	55.	55.	55.	55,6
90	62,5000000	62.	50.	0.	0.
100	69,4444444	69.	44.	44.	44,4
110	76,3888889	76.	38.	88.	88,9
120	83,3333333	83.	33.	33.	33,3
130	90,2777778	90.	27.	77.	77,8
140	97,2222222	97.	22.	22.	22,2
144	100,0000000	100.	0.	0.	0.

Fortsetzung.

(Flächenmaaß.)

Zwt. Zolle.	Zehnthl. Zolle.	Z.	L.	S.
1	0,4822531	0.	48.	22,5
2	0,9645062	0.	96.	45,1
3	1,4467593	1.	44.	67,7
4	1,9290123	1.	92.	90,1
5	2,4112654	2.	41.	12,6
6	2,8935185	2.	89.	35,2
7	3,3757716	3.	37.	57,7
8	3,8580247	3.	85.	80,2
9	4,3402778	4.	34.	2,8
10	4,8225309	4.	82.	25,3
20	9,6450617	9.	64.	50,6
30	14,4675926	14.	46.	75,9
40	19,2901234	19.	29.	1,2
50	24,1126543	24.	11.	26,5
60	28,9351851	28.	93.	51,8
70	33,7577160	33.	75.	77,1
80	38,5802469	38.	58.	2,4
90	43,4027777	43.	40.	27,7
100	48,2253086	48.	22.	53,
110	53,0478395	53.	4.	78,3
120	57,8703704	57.	87.	3,6
130	62,6929013	62.	69.	28,9
140	67,5154322	67.	51.	54,2
144	69,4444444	69.	44.	44,4

Fort-

Fortsetzung.

(Flächenmaaß.)

Zwt. Lin.	Zehnthl. Linien.	L.	S.
1	0,3348980	0.	33,5
2	0,6697959	0.	67,0
3	1,0046939	1.	0,5
4	1,3395919	1.	34,0
5	1,6744899	1.	67,4
6	2,0093879	2.	0,9
7	2,3442858	2.	34,4
8	2,6791838	2.	67,9
9	3,0140818	3.	1,4
10	3,3489798	3.	34,9
20	6,6979595	6.	69,8
30	10,0469393	10.	4,7
40	13,3959190	13.	39 6
50	16,7448988	16.	74,5
60	20,0938786	20.	9,4
70	23,4428583	23.	44,3
80	26,7918381	26.	79,2
90	30,1408178	30.	14,1
100	33,4897976	33.	49,0
110	36,8387774	36.	83,9
120	40,1877571	40.	18,8
130	43,5367369	43.	53,7
140	46,8857166	46.	86,6
144	48,2253085	48.	22,5

Fortsetzung.

(Flächenmaaß.)

Zwt. Skrup.	Zehnthl. Skrupel.	S.
1	0,2325680	0,2
2	0,4651360	0,5
3	0,6977041	0,7
4	0,9302722	0,9
5	1,1628402	1,2
6	1,3954082	1,4
7	1,6279763	1,6
8	1,8605443	1,9
9	2,0931123	2,1
10	2,3256804	2,3
20	4,6513608	4,6
30	6,9770412	7,0
40	9,3027216	9,3
50	11,6284019	11,6
60	13,9540823	14,0
70	16,2797627	16,3
80	18,6054431	18,6
90	20,9311235	21,0
100	23,2568039	23,3
110	25,5824843	25,6
120	27,9081647	28,0
130	30,2338451	30,2
140	32,5595255	32,6
144	33,4897976	33,5

V. Tafel.

Vergleichung des zehntheiligen Körpermaaßes mit dem zwölftheiligen.

Zht. Fuße	Zwölfthl. Fuße.	F.	Z.	L.	S.
1	1,7280000	1.	1257.	1700.	608,3
2	3,4560000	3.	787.	1672.	1216,5
3	5,1840000	5.	317.	1645.	96,8
4	6,9120000	6.	1575.	1617.	705,0
5	8,6400000	8.	1105.	1589.	1313,3
6	10,3680000	10.	635.	1562.	193,5
7	12,0960000	12.	165.	1534.	801,8
8	13,8240000	13.	1423.	1506.	1410,0
9	15,55 0000	15.	953.	1479.	290,3
10	17,2800000	17.	483.	1451.	898,6
20	34,5600000	34.	967.	1175.	69,1
30	51,8400000	51.	1451.	898.	967,7
40	69,1200000	69.	207.	622.	138,2
50	86,4000000	86.	691.	345.	1036,8
60	103,6800000	103.	1175.	69.	207,4
70	120,9600000	120.	1658.	1520.	1105,9
80	138,2400000	138.	414.	1244.	276,5
90	155,5200000	155.	898.	967.	1175,0
100	172,8000000	172.	1382.	691.	345,6
200	345,6000000	345	1036.	1382.	691,2
300	518,4000000	518.	691.	345.	1036,8
400	691,2000000	691.	345.	1036.	1382,4
500	864,0000000	864.	0.	0.	0
600	1036,8000000	1036.	1382.	691.	345,6
700	1209,6000000	1209.	1036.	1382.	691,2
800	1382,4000000	1382.	691.	345.	1036,8
900	1555,2000000	1555.	345.	1036.	1382,4
1000	1728,0000000	1728.	0.	0	0.

Fortsetzung.

(Körpermaaß.)

Zht. Zolle	Zwölftheil Zolle.	F.	Z.	L.	S.
1	2,9859840	0.	2.	1703.	1348,4
2	5,9719680	0.	5.	1679.	968,9
3	8,9579520	0.	8.	1655.	589,3
4	11,9439360	0.	11.	1631.	209,8
5	14,9299200	0.	14.	1606.	1558,2
5	17,9159040	0.	17.	1582.	1178,7
7	20,9018880	0.	20.	1558.	799,1
8	23,8878720	0.	23.	1534.	419,6
9	26,8738560	0.	26.	1510.	40,0
10	29,8598400	0.	29.	1485.	1388,5
20	59,7196800	0.	59.	1243.	1049,0
30	89,7595200	0.	89.	1001.	709,4
40	119,4393600	0.	119.	759.	369,9
50	149,2992000	0.	149.	517.	30,4
60	179,1590400	0.	179.	274.	1418,9
70	209,0188800	0.	209.	32.	1079,4
80	238,8787200	0.	238.	1518.	739,9
90	268,7385600	0.	268.	1276.	400,3
100	298,5984000	0.	298.	1034.	60,8
200	597,1968000	0.	597.	340	121,7
300	895,7952000	0.	895.	1374.	182,5
400	1194,3936000	0.	1194.	680.	243,3
500	1492,9920000	0.	1492.	1714.	304,1
600	1791,5904000	1.	63.	1020.	365,0
700	2090,1888000	1.	362.	326.	425,8
800	2388,7872000	1.	660.	1360.	486,6
900	2687,3856000	1.	959.	666.	547,5
1000	2985,9840000	1.	1257.	1700.	608,3

Fortsetzung.

(Körpermaaß.)

Zht Lin.	Zwölfthl. Linien.	Z.	L.	S.
1	5,1597803	0.	5.	276,1
2	10,3195607	0.	10.	552,2
3	15,4793410	0.	15.	828,3
4	20,6391214	0.	20.	1104,4
5	25,7989018	0.	25.	1380,5
6	30,9586821	0.	30.	1656,6
7	36,1184625	0.	36.	204,7
8	41,2782428	0.	41.	480,8
9	46,4380232	0.	46.	756,9
10	51,5978035	0.	51.	1033,0
20	103,1956070	0.	103.	338,0
30	154,7934106	0.	154.	1371,0
40	206,3912140	0.	206.	676,0
50	257,9890176	0.	257.	1709,0
60	309,5868211	0.	309.	1014,0
70	361,1846246	0.	361.	319,0
80	412,7824281	0.	412.	1352,0
90	464,3802317	0.	464.	657,0
100	515,9780352	0.	515.	1690,0
200	1031,9560704	0.	1031.	1652,1
300	1547,9341056	0.	1547.	1614,1
400	2063,9121408	1.	335.	1576,2
500	2579,8901760	1.	851.	1538,2
600	3095,8682112	1.	1367.	1500,2
700	3611,8462464	1.	155.	1462,3
800	4127,8242816	2.	671.	1424,3
900	4643,8023168	2.	1187.	1386,4
1000	5159,7803520	2.	1703.	1348,4

Fortsetzung.

(Körpermaaß.)

Zht Skr.	Zwölfthl. Skrup.	L.	S.
1	8,9161004	0.	8,9
2	17,8322009	0.	17,8
3	26,7483013	0.	26,7
4	35,6644018	0.	35,7
5	44,5805022	0.	44,6
6	53,4966027	0.	53,5
7	62,4127031	0.	62,4
8	71,3288036	0.	71,3
9	80,2449040	0.	80,2
10	89,1610045	0.	89,2
20	178,3220090	0.	178,3
30	267,4830134	0.	267,5
40	356,6440179	0.	356,6
50	445,8050224	0.	445,8
60	534,9660269	0.	535,0
70	624,1270314	0.	624,1
80	713,2880359	0.	713,3
90	802,4490403	0.	802,4
100	891,6100448	0.	891,6
200	1783,2200896	1.	55,2
300	2674,8301345	1.	946,8
400	3566,4401793	2.	110,4
500	4458,0502241	2.	1002,0
600	5349,6602689	3.	165,7
700	6241,2703138	3.	1057,3
800	7132,8803586	4.	220,9
900	8024,4904034	4.	1112,5
1000	8916,1004482	5.	276,1

VI. Tafel.

Vergleichung des zwölftheiligen Körpermaaßes mit dem zehntheiligen.

Zwt. Fuße	Zehnthl. Fuße	F.	Z.	L.	S.
1	0,5787037	0.	578.	703.	703,7
2	1,1574074	1.	157.	407.	407,4
3	1,7361111	1.	736.	111.	111,1
4	2,3148148	2.	314.	814.	814,4
5	2,8935185	2.	893.	518.	518,5
6	3,4722222	3.	472.	222.	222,2
7	4,0509259	4.	50.	925.	925,9
8	4,6296296	4.	629.	629.	629,6
9	5,2083333	5.	208.	333.	333,3
10	5,7870370	5.	787.	37.	37,0
20	11,5740741	11.	574.	74.	74,1
30	17,3611111	17.	316.	111.	111,1
40	23,1481481	23.	148.	148.	148,1
50	28,9351852	28.	935.	185.	185,2
60	34,7222222	34.	722.	222.	222,2
70	40,5092593	40.	509.	259.	259,3
80	46,2962963	46.	296.	296.	296,3
90	52,0833333	52.	83.	333.	333,3
100	57,8703704	57.	870.	370.	370,4
200	115,7407407	115.	740.	740.	740,7
300	173,6111111	173.	611.	111.	111,1
400	231,4814815	231.	481.	481.	481,5
500	289,3518518	289.	351.	851.	851,8
600	347,2222222	347.	222.	222.	222,2
700	405,0925926	405.	92.	592.	592,6
800	462,9629630	462.	962.	962.	963,0
900	520,8333333	520.	833.	333.	333,3
1000	578,7037037	578.	703.	703.	703,7
1728	1000,0000000	1000.	0.	0.	0.

Fortsetzung.

(Körpermaaß.)

Zwt. Zolle	Zehnthl. Zolle	Z.	L.	S.
1	0,3348980	0.	334.	898,0
2	0,6697959	0.	669.	796,0
3	1,0046939	1.	4.	693,9
4	1,3395919	1.	339.	591,9
5	1,6744899	1.	674.	489,9
6	2,0093879	2.	9.	387,9
7	2,3442858	2.	344.	285,8
8	2,6791838	2.	679.	183,8
9	3,0140818	3.	14.	81,8
10	3,3489798	3.	348.	979,8
20	6,6979595	6.	697.	959,5
30	10,0469393	10.	46.	939,3
40	13,3959190	13.	395.	919,0
50	16,7448988	16.	744.	898,8
60	20,0938786	20.	93.	878,6
70	23,4428584	23.	442.	858,4
80	26,7918381	26.	791.	838,1
90	30,1408179	30.	140.	817,9
100	33,4897977	33.	489.	797,7
200	66,9795953	66.	979.	595,3
300	100,4693930	100.	469.	593,0
400	133,9591907	133.	959.	190,7
500	167,4489884	167.	448.	988,4
600	200,9387860	200.	938.	786,0
700	234,4285837	234.	428.	583,7
800	267,9183814	267.	918.	381,4
900	301,4081790	301.	408.	179,0
1000	334,8979767	434.	897.	976,7
1728	578,7037837	578.	703.	703,7

Fortsetzung.

(Körpermaaß.)

zwt. Linien.	zehnthl. Linien.	L.	S.
1	0,1938067	0.	193,8
2	0,3876134	0.	387,6
3	0,5814201	0.	581,4
4	0,7752268	0.	775,2
5	0,9690335	0.	969,0
6	1,1628402	1.	162,8
7	1,3566469	1.	356,6
8	1,5504536	1.	550,4
9	1,7442603	1.	744,2
10	1,9380670	1.	938,1
20	3,8761340	3.	876,1
30	5,8142010	5.	814,2
40	7,7522680	7.	752,3
50	9,6903350	9.	690,3
60	11,6284020	11.	628,4
70	13,5664690	13.	566,5
80	15,5045360	15.	504,5
90	17,4426030	17.	442,6
100	19,3806700	19.	380,7
200	38,7613399	38.	761,3
300	58,1420098	58.	142,0
400	77,5226798	77.	522,7
500	96,9033497	96.	903,3
600	116,2840197	116.	284,0
700	135,6646896	135.	664,7
800	155,0453596	155.	45,4
900	174,4260295	174.	526,0
1000	193,8066995	193.	806,7
1728	334,8979767	334.	898,0

Fortsetzung.

(Körpermaaß.)

Zwt. Skrup.	Zehnthl. Skrup.	S.
1	0,1121566	0,1
2	0,2243133	0,2
3	0,3364700	2,3
4	0,4486266	0,4
5	0,5607833	0,6
6	0 6729399	0,7
7	0,7850966	0,8
8	0,8972532	0,9
9	1,0094099	1,0
10	1,1215665	1,1
20	2,2431331	2,2
30	3,3646996	3,4
40	4,4862662	4,5
50	5,6078237	5,6
60	6,7293993	6,7
70	7,8509658	7,8
80	8,9725324	9,0
90	10,0940989	10,1
100	11,2156655	11,2
200	22,4313310	22,4
300	23,6469964	33,6
400	44,8626619	44,9
500	56,0783274	56,1
600	67,2939929	67,3
700	78,5096583	78,5
800	89,7253238	89,7
900	100,9409893	100,9
1000	112,1566548	112,1
1728	193,8066995	143,8

VII. Tafel.

Vergleichung der Zolle, Linien und Skrupel des zwölftheiligen Längenmaaßes, mit den Fußen desselben.

Zwt. Zolle	Zwölfthl. Fuße.	Zwt. Lin.	Zwölfthl. Fuße.
1	0,083333333	1	0,006944444
2	0,166666667	2	0,013888889
3	0,250000000	3	0,020833333
4	0,333333333	4	0,027777778
5	0,416666667	5	0,034722222
6	0,500000000	6	0,041666667
7	0,583333333	7	0,048611111
8	0,666666667	8	0,055555556
9	0,750000000	9	0,062500000
10	0,833333333	10	0,069444444
11	0,916666667	11	0,076388889
12	1,000000000	12	0,083333333

Zwt. Skrup.	Zwölftheil. Fuße.
1	0,000578704
2	0,001157407
3	0,001736111
4	0,002314815
5	0,002893518
6	0,003472222
7	0,004050926
8	0,004629630
9	0,005208333
10	0,005787037
11	0,006365741
10	0,006944444

VIII. Tafel.

Vergleichung der Zolle, Linien und Skrupel des zwölftheiligen Flächenmaaßes, mit den Fußen desselben.

zwt. Zolle	Zwölfthl. Fuße.	Zwt. Lin.	Zwölfthl. Fuße.
1	0,006944444	1	0,000048225
2	0,013888889	2	0,000096451
3	0,020833333	3	0,000144676
4	0,027777778	4	0,000192901
5	0,034722222	5	0,000241126
6	0,041666667	6	0,000289352
7	0,048611111	7	0,000337577
8	0,055555556	8	0,000385802
9	0,062500000	9	0,000434028

Zwt. Skrup.	Zwölfthl. Fuße.
1	0,000000335
2	0,000000670
3	0,000001005
4	0,000001340
5	0,000001674
6	0,000002010
7	0,000002344
8	0,000002679
9	0,000003014

IX. Tafel.

Vergleichung der Zolle, Linien und Skrupel des zwölftheiligen Körpermaaßes, mit den Fußen desselben.

zwt. Zolle	Zwölfthl. Fuße.	zwt. Lin.	Zwölfthl. Fuße.
1	0,000578703704	1	0,000000334898
2	0,001157407407	2	0,000000669796
3	0,001736111111	3	0,000001004694
4	0,002314814815	4	0,000001339592
5	0,002893518518	5	0,000001674490
6	0,003472222222	6	0,000002009388
7	0,004050925926	7	0,000002344286
8	0,004629629630	8	0,000002679184
9	0,005208333333	9	0,000003014082

Zwt. Skrup	Zwölfthl. Fuße.
1	0,000000000194
2	0,000000000388
3	0,000000000581
4	0,000000000775
5	0,000000000969
6	0,000000001163
7	0,000000001357
8	0,000000001550
9	0,000000001744

X. Tafel.

Vergleichung des Rheinländischen Fußmaaßes mit dem Parisischen.

Längenmaaß.

Rhl. F.	Pariser Fuße.	Par. F.	Rheinl. Fuße.
1	0,9661806	1	1,0350032
2	1,9323611	2	2,0700065
3	2,8985417	3	3,1050097
4	3,8647222	4	4,1400129
5	4,8309028	5	5,1750162
6	5,7970833	6	6,2100194
7	6,7632639	7	7,2450226
8	7,7294444	8	8,2800259
9	8,6956250	9	9,3150291

Log. 0,9661806 = 0,9850583 — 1

Log. 1,0350032 = 0,0149417.

Flächenmaaß.

Rhl. F.	Paris. Fuße.	Par. F.	Rheinl. Fuße.
1	0,9335049	1	1,0712317
2	1,8670097	2	2,1424634
3	2,8005146	3	3,2136951
4	3,7340194	4	4,2849268
5	4,6675243	5	5,3561585
6	5,6010292	6	6,4273902
7	6,5345340	7	7,4986218
8	7,4680389	8	8,5698535
9	8,4015437	9	8,6410852

Log. 0,9335049 = 0,9701166 — 1

Log. 1,0712317 = 0,0298834.

Fortsetzung.

Körpermaaß.

Rhl. F.	Paris. Fuße.	Par. F.	Rheinl. Fuße.
1	0,9019342	1	1,1087283
2	1,8038685	2	2,2174565
3	2,7058027	3	3,3261848
4	3,6077370	4	4,4349130
5	4,5096712	5	5,5436413
5	5,4116055	6	6,6523696
7	6,3135397	7	7,7610978
8	7,2154739	8	8,8698261
9	8,1174082	9	9,9785543

Log. 0,9019342 = 0,9551749 — 1

Log. 1,1087283 = 0,0448251.

XI. Tafel.

Vergleichung des Berlinischen Pfundes mit dem Parisischen.

Berl. Pf.	Paris. Pfunde.	Par. Pf.	Berlin. Pfunde.
1	1,9570082	1	1,0449231
2	2,9140165	2	2,0898461
3	3,8710247	3	3,1347692
4	4.8280330	4	4,1796923
5	5,7700412	5	5,2246154
6	6,7420495	6	6,2695385
7	7.6990577	7	7,3144615
8	8,6560659	8	8,6793846
9	9,6130742	o	9,4043077

Log. 0,9570082 = 0,9809157 — 1

Log. 1,0449231 = 0,0190843.

XII. Tafel.

Vergleichung des Berlinischen Pfundes mit dem Cöllnischen.

Berl. Pfd	Cölln. Pfunde.	Cölln. Pf.	Berlin. Pfunde.
1	1,0022615	1	0,9977436
2	2,0045230	2	1,9954878
3	3,0067485	3	2,9932308
4	4,0090460	4	3,9909744
5	5,0123076	5	4,9887179
6	6,0135691	6	5,9864615
7	7,0158306	7	6,9842051
8	8,0180921	8	7,1819487
9	9,0203536	9	8,9796923

Log. 1,0022615 = 0,0009810.

Log. 0,9977436 = 0,9990188 — 1.

XIII. Tafel.

Vergleichung des Cöllnischen Pfundes mit dem Parisischen.

Cöll. Pfd.	Paris. Pfund.	Par. Pfd.	Cölln. Pfund.
1	0,9548488	1	1,0472862
2	1,9096977	2	2,0945724
3	2,8645465	3	3,1418585
4	3,8193954	4	4,1891447
5	4,7742442	5	5,2364390
6	5,7290930	6	6,2837171
7	6,6839419	7	7,3310033
8	7,6387907	8	8,3782895
9	8,5936396	9	9,4255757

Log. 0,9548488 = 0,9799346 — 1

Log. 1,0472862 = 0,0200653.

XIV. Tafel.

Gewicht eines Rheinländischen Kubikfußes Regenwassers und der davon abhängigen Zahlen, in Berlinischen Pfunden.

K. F.	γ		$\frac{1}{\gamma}$
1	65,3064	1	0,015312
2	130,6128	2	0,030624
3	195,9192	3	0,045936
4	261,2256	4	0,061248
5	326,5320	5	0,076560
6	391,8384	6	0,091872
7	457,1448	7	0,107184
8	522,4512	8	0,122496
9	587,7576	9	0,137808

Log. 65,3064 = 1,8149557

Log. 0,015312 = 0,1850443 — 2

K. Z.	$\frac{\gamma}{1728}$		$\frac{1}{0,037793}$
1	0,037793	1	26,459891
2	0,075586	2	52,919782
3	0,113379	3	79,379674
4	0,151172	4	105,839564
5	0,188965	5	132,299456
6	0,226758	6	158,759346
7	0,264551	7	185,219238
8	0,302344	8	211,679129
9	0,340137	9	238,139020

Log. 0,037793 = 0,5774120 — 2

Log. 26,459891 = 1,4225880.

XV. Tafel.

Verhältnisse zwischen Frikzion und Druck nach Coulomb.

Reibende Körper.	Nach vorhergegangener Bewegung.					Im Anfange der Bewegung.					
	Trocken.	Talg.	Theer.	Abgenutztes Talg.	Trocken mit kreuzenden Fasern.	Trocken.	Talg.	Oehl.	Theer.	Abgenutztes Talg.	Trocken mit kreuzenden Fasern.
Eichen auf Eichen	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{11}$
Tannen auf Tannen	$\frac{1}{6}$					$\frac{5}{9}$					
Ulmen auf Ulmen	$\frac{1}{10}$					$\frac{6}{13}$					
Eichen auf Tannen	$\frac{2}{13}$					$\frac{2}{3}$					
Steineichen auf Guajac		$\frac{1}{26}$		$\frac{1}{16}$							
Steineichen auf Ulmen		$\frac{1}{33}$		$\frac{1}{20}$							
Buchsbaum a. Guajac		$\frac{1}{23}$		$\frac{1}{14}$							
Buchsbaum auf Ulmen		$\frac{1}{29}$		$\frac{1}{20}$							
Eisen auf Eisen	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$				$\frac{2}{7}$					
Kupfer auf Eisen	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$		
Eisen auf Guajac	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$				$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{10}$				
Eisen auf Eichen	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{35}$		$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{5}$					$\frac{1}{14}$
Kupfer auf Eichen	$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{47}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{2}{11}$					

XVI. Tafel.

Vielfaches derjenigen Zahlen, welche bei dem Falle der Körper vorkommen.

	g		$\frac{1}{4g}$
1	15,625	1	0,016
2	31,250	2	0,032
3	46,875	3	0,048
4	62,500	4	0,064
5	78,125	5	0,080
6	93,750	6	0,096
7	104,375	7	0,112
8	125,000	8	0,128
9	140,625	9	0,144
	$\sqrt{g}$		$\frac{1}{\sqrt{g}}$
1	3,952847	1	0,252982
2	7,905694	2	0,505964
3	11,858541	3	0,758947
4	15,811388	4	1,011929
5	19,764235	5	1,264910
6	23,717082	6	1,517893
7	27,669929	7	1,770875
8	31,622777	8	2,023858
9	35,575624	9	2,276840

Log. 15,625 = 1,1938200.

Einige bemerkte erhebliche Druckfehler.

S. 16. Z. 10. statt $c + (c + d) + (c + 2d) + (c + 3d) + \ldots\ldots$
lese man $c;\ (c + d);\ (c + 2d);\ (c + 3d);\ \ldots\ldots$

— 38. —— bei der daselbst stehenden Figur, muß A C senkrecht auf B C gezogen werden.

— 39. letzte Z. statt $3\,(b - mr - n\,g$ lese man $3\,(b - mr - n\,g)$

— 40.	Z. 13.	st.	Brahm.	l. m.	Brahms.
— 41.	— 9.	st.	D C	l. m.	D E
— 43.	— 10.	st.	$E = c$,	l. m.	E oder $BL = c$,
— 57.	— 11.	st.	$B^t - 1)$	l. m.	$(B^t - 1)$

Nachricht an den Buchbinder.

Die Kupfertafel wird am Ende des Buchs so angebunden, daß solche ganz ausgeschlagen werden kann.

Nöthige Anzeige von Druckfehlern

welche sich in

J. A. Eytelweins Aufgaben zur Uebung der Analysis,

gr. 8. Berlin, bey Friedrich Maurer, 1793.

bey Entfernung des Druckorts eingeschlichen.

Seite 16 Zeile 18. statt b c. lese man (b c +

— — — 21. lese man $x = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2}{144}\left[bc + \frac{bd(b-1)}{2}\right]$

— — — 22. lese man $x = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2 b}{288}\left[2c + d(b-1\right]$

Hiernach ist die folgende Rechnung zu verbessern.

— 39 — 24. und Seite 40 Zeile 12. ist statt der daselbst geführten Rechnung, folgendes zu setzen:

Diese Kraft N preßt ferner den Haken bei A, nach der Richtung AE, mit einer Kraft $= \frac{\frac{1}{2}b}{a}$ N, u. den Haken bei B, nach entgegengesetzter Richtung, mit einer Kraft $= \frac{\frac{1}{2}b}{a}$ N; (St. §. 133.) und man erhält das Moment dieser Pressungen bei A $= \frac{bmr}{2a}$ P Cos. φ, und bei B $= \frac{n\varrho b}{2a}$ P Cos. φ.

Nach den Bedingungen der Aufgabe sollen nun diese fünf Momente, mit dem Momente FG.M im Gleichgewicht sein, es ist daher:

$$\tfrac{1}{2}bP\,\text{Sin.}\,\varphi = \tfrac{1}{2}mrP\,\text{Sin.}\,\varphi + \tfrac{1}{2}n\varrho P\,\text{Sin.}\,\varphi + \tfrac{2}{3}n\varrho P\,\text{Cos.}\,\varphi$$
$$+ \frac{mrb}{2a}P\,\text{Cos.}\,\varphi + \frac{n\varrho b}{2a}P\,\text{Cos.}\,\varphi.$$

Oder alles mit $\frac{6.a}{P}$ multiplizirt und geordnet:

$(3ab - 3amr - 3an\varrho)\,\text{Sin.}\,\varphi = (4an\varrho + 3bmr + 3bn\varrho)$ Cos. φ, folglich (G. §. 232.)

$$\text{Tgt}\,\varphi = \frac{n\varrho(4a + 3b) + 3bmr}{3a(b - mr - n\varrho)}.$$

Hieraus findet man im 28 §.

$$x = \frac{n\varrho(4a + 3b) + 3bmr}{3(b - mr - n\varrho)},$$

und im Beispiele:

$$x = \frac{(4.\ 16.\ 12 + 3.\ 9.\ 12) + 3.\ 9.\ 12.\ \frac{9}{2}}{3\,(3.\ 9.\ 12 - \frac{9}{2} - 1)} = 2{,}\ 66 \text{ Zoll.}$$

Seite 56 Zeile 10. statt α^2 lese man δ^2

— — — 11. — β^2 —— δ^2

— 57 — 15. — α^2 —— δ^2

— — — 16. — β^2 —— δ^2

— 60 — 17. — $\frac{EH}{EK}$ —— $\frac{EH}{EF}$

— 95 — 9. — zehn —— zwölf

— — — 10. — zwölf —— zehn. Desgleichen Zeile 24 u. 25.

— 97 — 20. muß hinter γ ein Punkt sein.

— 99 — 4. hinter $\frac{1}{49}$ ein Komma.

— — — 23. hinter $15{,}8^2$ kommt =

— 100 — 31. statt mauritana lese man mauritiana.

— 104 — 7. bei 4 Lin. lese man 10,9

— — — 20. — 6 Skr. —— 12,4416000

— 107 — 7. — 3 Fuße —— 74,9

— 113 — 26. — 140 Lin. —— 88,6

— 120 — 32. — 1728 —— 578,7037037

— 121 — 30. bei 900 lese man 426,0

— 122 — 6. — 3 —— 0,3

— — — 17. — 50 —— 5,6078327

— — — 24. — 300 —— 33,6469964

— — — 32. — 1728 —— 193,8

— 123 — 30. unten —— 12

— 126 — 27. bei 9 —— 9,6410852

— 127 unter Paris. Pfunde, statt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
lese man 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

— 128 Zeile 9. bei 5 lese man 5,0113076

— — — 12. — 8 —— 7,9819487.

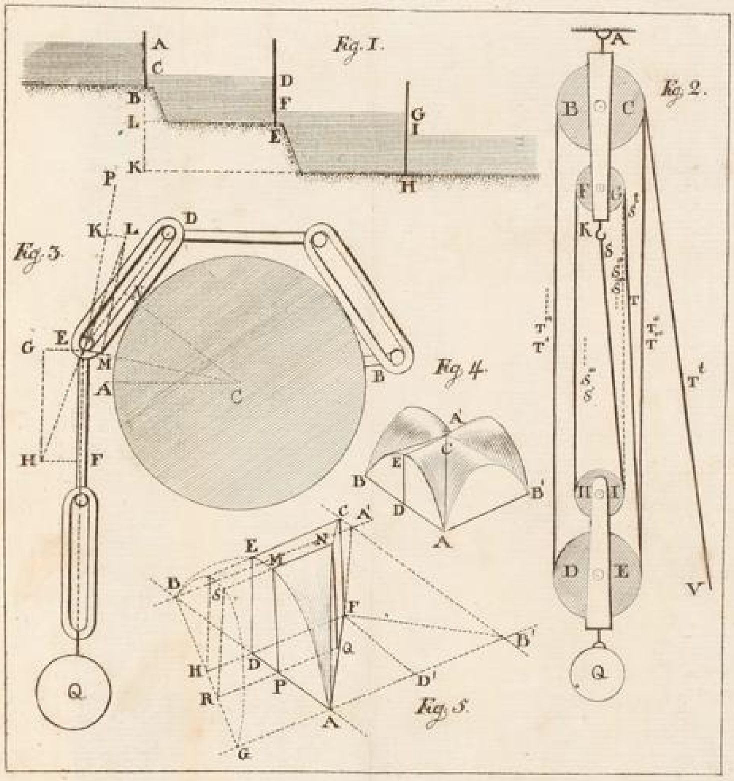


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.