Jahresbericht

über das

Großherzogliche

Karl Friedrichs-Gymnasium

zu Eisenach

von Ostern 1854 bis Ostern 1855

erstattet

von

dem Direktor

Dr. Karl Hermann Funkhänel,

Großherzoglich Sächs. Hofrath.

Voran steht

eine Abhandlung des Professor Dr. Fresenius:

Zur Einführung in die Differentialrechnung.

Eisenach, 1855.

Gedruckt in der privilegirten Buchdruckerei daselbst.

Herrn Director D. Wex mit [illegible]

[illegible]

[illegible] von W. Rein

Zur Einführung in die Differentialrechnung.

Nicht, um zur Erledigung der vielbesprochnen Frage beizutragen, ob die Differentialrechnung zum Cursus der Mathematik auf Gymnasien zu fügen sei, ist das Nachstehende entworfen; denn es läßt sich diese Frage nicht so kurz und für alle Umstände gültig beantworten.

Soviel zwar hat gewiß seine Richtigkeit, wie es denn auch neuerdings mehrfach, besonders von Schlömilch ausgesprochen worden ist, daß die Schwierigkeit dieses Zweiges, wie er sich jetzt behandeln läßt, ihn nicht auszuschließen brauche. Denn an die Stelle der „metaphysischen Untersuchungen", die früher eine so beliebte Einleitung zur Differentialrechnung ausmachten, ist jetzt eine einfach klare Fassung des Grenzbegriffs getreten, der alsobald herausspringt, wenn zwischen den elementaren Kategorien der Gleichung und Ungleichung als Verbindungsglied die Näherungsgleichung eingeführt wird — lauter Dinge, die einem sonst wohlgeordneten Verstande nach Zurücklegung der Elemente nicht so große Schwierigkeiten mehr bereiten können.

Im Uebrigen wäre dem Schüler auf der obersten Stufe der Vorbereitung ein Blick in das neue Land wohl zu gönnen. Er wäre damit an der Hand des näheren Lehrers noch über eine Schwelle geführt, die ihm, wenn er sie, sich selbst überlassen, überschreiten soll, doch noch manche Verlegenheit und Irrung zu bereiten pflegt. Ein Blick in die Formen- und Gedankenfülle, welche sich in dem neuen Bereich aufthut, möchte wohl auch öfter, als es bisher der Fall war, den jungen Akademiker verlocken, seine mathematischen Kenntnisse, auch wenn sie nicht in näherer Beziehung zu seinem speciellen Fach stehen, weiter fortzubilden — eine Extravaganz, die er schwerlich zu bereuen hätte. Doch — Kürze der Zeit! dies eine Wort macht alle weiteren Gründe überflüssig.

Hier nur ein bescheidner Vermittelungsvorschlag: Wo der Schüler der obersten Classe bei zweijährigem Curs von einer Wiederholung ganz oder theilweise dispensirt werden kann, möge es ihm erlaubt sein, sich — wie mit irgend einer andern Aufgabe — so auch mit den Elementen der Analysis als einer Privatarbeit zu beschäftigen. Diesen Privatstudien ihre erste Beihülfe zu gewähren, ist der nächste Zweck des nachfolgenden Entwurfs. Die Voraussetzungen gehen nicht über die Elementarmathematik (einschließlich der Trigonometrie, des Binom's für ganze positive Exponenten und der analytischen Behandlung der Kegelschnitte) hinaus. Natürlich ist die Ausdehnung demgemäß beschränkt. Daß für den bezeichneten Zweck der Weg der strengsten Allgemeinheit anfänglich durch den der Induction ersetzt und später erst wiedergewonnen wird, rechtfertige sich aus der Regel der Pädagogik: Abstraction aus Concretem! Begriffe aus Anschauungen!

Vorbereitung: Näherungsgleichungen..

§. 1. Schon in den Anfangsgründen der Arithmetik, wie in denen der Geometrie werden in manchen Fällen Berechnungen geführt, von denen man einsieht, daß sie nie zu einem festen vollständigen Resultate führen können. So bei der Verwandlung der meisten Brüche in Decimalbrüche, ferner bei den Wurzelausziehungen, endlich in der Planimetrie, wenn der Umfang des Kreises durch den Radius oder die Fläche des Kreises durch das Quadrat des Radius gemessen werden sollte.

Aber darum, daß das Verfahren in solchen Fällen irgend einmal abgebrochen werden mußte, ohne daß man zum genauen Ziel gekommen war, hielten wir diese Rechnungen nicht für fruchtlos. Im Gegentheil schätzten wir bei praktischen Aufgaben ein solches unvollkommenes Resultat einem vollkommenen gleich, wenn wir nur überzeugt sein konnten, daß das noch Fehlende ein sehr kleines Bruchtheilchen unseres Maßes betrug, und eine Methode, welche bei jeder neuen Rechnungswiederholung nur dem Ziele näher kam, konnte uns eine, die es wirklich erreicht hätte, ganz gut ersetzen. Denn wir brauchten ja nur das Verfahren so lange fortzusetzen, bis das Fehlende für unsern Zweck unbedeutend genug geworden war.

Aehnliche Fälle wie die genannten häuften sich später so, daß wir ein eigenes algebraisches Zeichen, das des sogenannten Unendlichen, ∞, gerechtfertigt fanden.

Z. B. die Summe aller Glieder einer Differenzenreihe ersten Grads wird bekanntlich gefunden, indem man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt. So war für die Reihe der natürlichen Zahlen von 1 bis n die Summe $= (1 + n)\frac{n}{2}$.

Wird hierin n sehr groß, so wird man das in der Parenthese dazukommende 1 wenig mehr daneben bemerken, oder wenn es fehlte, vermissen. Die Algebra sagt daher, die Summe von ∞ Gliedern dieser Reihe sei $= \infty \cdot \frac{\infty}{2} = \frac{\infty^2}{2}$. Das 1 ist dabei unterschlagen. ∞ heißt aber weder irgend eine große Zahl, denn dann wäre das Resultat unrichtig, noch eine endlose Zahl, denn die läßt sich nicht denken; sondern es liegt in dem Zeichen ∞ die Bedeutung: Je größer die Zahl angenommen wird, desto näher kommt die Gleichung der Wahrheit, hier z. B. die Summe der Glieder dem halben Quadrat ihrer Anzahl. Bei der Berechnung der Kreisperipherie fanden wir, daß der Umfang des Kreises mit um so größerer Genauigkeit durch den Umfang eines regulären Sehnen- oder Tangentenvielecks ersetzt werden konnte, je mehr Seiten das Vieleck hatte.

Wir könnten also kurz sagen, der Kreis sei ein Vieleck von ∞ Seiten. Dieß heißt aber weder: von sehr vielen, noch von unzähligen Seiten. ∞ ist also ein Abkürzungszeichen, welches überall da angewandt werden kann, wo es sich um ein je mehr, desto mehr handelt.

Noch ein passendes Beispiel liefert die trigonometrische Tangente.

Tang 90 läßt sich nicht messen, aber wir geben sie als ∞ an, weil, je mehr wir uns dem 90 näherten, desto größer die gegenüberstehende Kathete, gemessen durch die anliegende, gefunden wurde. In diesem Sinne rechtfertigen sich folgende Gleichungen, welche alle widersinnig aussehen, so lange wir uns unter ∞ eine feste Größe denken:

$$1)\ \infty \pm a = \infty. \quad 2)\ \frac{a}{\infty} = 0. \quad 3)\ \frac{a}{0} = \infty. \quad 4)\ \infty^2 \pm \infty = \infty^2.$$

$$5)\ \infty^n \pm \infty^{n-1} \pm \infty^{n-2} \ldots = \infty^n. \quad 6)\ \left(\frac{a}{\infty}\right) \pm \left(\frac{b}{\infty}\right)^2 \pm \left(\frac{c}{\infty}\right)^n = \frac{a}{\infty}.$$

Anmerkung. 1) Je größer eine Zahl, desto weniger wird sie durch Zufügen oder Abzählen einer constant bleibenden geändert.

Aus 2) und 3) erkennt man, daß der 0 ebenso wie dem ∞ ein Verhältnißbegriff beigelegt werden kann.

3) heißt: je kleiner ein Nenner bei constantem Zähler wird, desto größer wird der Bruchwerth.

4) läßt sich $(\infty \pm 1)\,\infty$ schreiben und auf 1) reduciren.

5) ist nur das verallgemeinerte 4). Sie lehren: je größer eine Zahl ist, desto eher lassen sich ihre niederen Potenzen gegen ihre höheren vernachlässigen.

Bei 6): je kleiner eine Zahl, desto eher verschwinden die höheren Potenzen gegen die niedrigste.

Aus den vorhin angeführten Beispielen ergab sich schon, daß wir uns eines Resultats, das sich an und für sich unserer Beurtheilung entzog, durch die Betrachtung der Resultate bemächtigen können, deren Voraussetzungen denen des gesuchten Falles in stetigem Fortschritt näher und näher kommen. Einige Beispiele an Curven sollen nun zeigen, wie ein ähnliches Princip zu neuen Ergebnissen und Begriffen die Bahn bricht.

§. 2. Wenn man für einen Punkt o der Parabel pos (Fig. 1.) die Richtung der Tangente wissen will, so könnte man davon ausgehen, daß der Winkel, den sie mit der Axe macht, größer als α sein muß, weil die im $\measuredangle\ \alpha$ durch o gezogene Linie Sehne ist und die Parabel noch in p trifft. Je näher aber, wenn diese

Sehne um o gedreht wird, der Punkt p an o fällt, für desto richtiger würde α als der Winkel der Tangente gelten können, für völlig richtig, sobald p nach o selbst fällt. Der $\measuredangle\,\alpha = \angle$ pom kann durch pm und om ausgedrückt werden: $\text{Tang}\,\alpha = \frac{pm}{om}$.

Wird nun aber die Sehne Tangente, indem der Punkt p nach o rückt, so verschwindet uns die Möglichkeit, den $\measuredangle\,\alpha$ durch $\frac{pm}{om}$ zu bestimmen, denn beide sind dann auch verschwunden. Suchen wir darum nach dem Werthe, dem sich der Bruch $\frac{pm}{om}$ um so mehr nähert, je näher p dem o kommt.

Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = ax$

sb heiße x', $sd = x''$, $bo = y'$, $dp = y''$, also $om = x'' - x'$, $pm = y'' - y'$,

so ist $\text{Tang}\,\alpha = \frac{pm}{om} = \frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{y''-y'}{\frac{y''^2}{a} - \frac{y'^2}{a}}$ (weil $x = \frac{y^2}{a}$) $= a\left(\frac{y''-y'}{y''^2-y'^2}\right) = a\,\frac{y''-y'}{(y''-y')(y''+y')} = \frac{a}{y''+y'}$.

Je näher nun der Punkt p an o rückt, um so ähnlicher wird y'' dem y'; damit nähert sich also der Ausdruck $\frac{a}{y''+y'}$ immer mehr dem $\frac{a}{2y'}$ und diese Grenze dürfen wir der Einleitung gemäß für den wahren Werth der Tang α' für den Fall der Tangente halten.

Ebenso leicht finden wir die Subtangente nb. Denn $\frac{om}{pm} = \frac{wb}{y'}$; je mehr sich aber p dem o nähert, um so mehr nähert sich wb der Subtangente nb, zugleich aber nähert sich $\frac{om}{pm} = \frac{y''+y'}{a}$ m $\frac{2y'}{a}$. Also $\frac{nb}{y'} = \frac{2y'}{a}$, giebt $nb = \frac{2y'^2}{a} = 2x'$.

In der That ist die Subtangente bei der Parabel stets der doppelten Abscisse gleich.

Errichten wir auf die Sehne po ein Perpendikel og (Fig. II.) und auf die Tangente eins oc, so ist $\triangle\, opm \sim obg$, also $\frac{pm}{om} = \frac{bg}{y'}$. Nun nähert sich p dem o, w dem n, g dem c und $\frac{pm}{om}$ dem Werth $\frac{a}{2y'}$, also $\frac{bc}{y'} = \frac{a}{2y'}$, oder $bc = \frac{a}{2}$. Dieß ist der Werth der Subnormale. Der Werth der Tangente und Normale ist mit Hülfe der Ordinate daraus zu bilden.

§. 3. Dasselbe Verfahren soll am Kreis angewendet werden. Seine Mittelpunktsgleichung ist: $y^2 = r^2 - x^2$. Eine Sehne mache den $\measuredangle\,\alpha$ mit der Axe der X, so wird die trigonometrische Tangente dieses Winkels abermals durch den Bruch gemessen werden, dessen Zähler der Unterschied der Ordinaten für die 2 Schneidungspunkte, dessen Nenner der Unterschied der entsprechenden Abscissen ist. Also $\text{Tang}\,\alpha = \frac{y''-y'}{x''-x'}$, wie vorher. Um Quadrate zu bekommen, multipliciren wir Nenner und Zähler mit $(y''+y')(x''+x')$, giebt

$$\text{Tang}\,\alpha = \frac{(y''-y')(y''+y')(x''+x')}{(x''-x')(x''+x')(y''+y')} = \frac{(y''^2-y'^2)(x''+x')}{(x''^2-x'^2)(y''+y')} = \frac{[(r^2-x''^2)-(r^2-x'^2)]\,(x''+x')}{(x''^2-x'^2)(y''+y')}$$
$$= -\frac{(x''^2-x'^2)(x''+x')}{(x''^2-x'^2)(y''+y')} = -\frac{x''+x'}{y''+y'}.$$

Je näher der zweite Schnittpunkt dem ersten rückt, um so näher kommt x'' dem x' und y'' dem y', also der Werth $-\frac{x''+x'}{y''+y'}$ dem $-\frac{2x'}{2y'} = -\frac{x'}{y'} = \text{Tang}\,\alpha'$, wie es auch durch ähnliche Dreiecke sehr leicht zu erweisen ist.

Das —-Zeichen aber bedeutet, daß der Winkel dießmal nach der entgegengesetzten Seite geöffnet ist, als wir es voraussetzten, indem wir die Ordinatendifferenz $y'' - y'$ nannten. In der That ist die dem Coordinatenanfang entferntere Ordinate y'', welche der größeren Abscisse x'' entspricht, hier die kleinere. Der Ausdruck $-\frac{x}{y}$ lehrt uns also auch, daß hier die Curve für die wachsenden Abscissen sich herabsenkt, während die Parabel für wachsende Abscissen anstieg.

§. 4. Zieht man an die Parabel noch eine dritte Ordinate rg (Fig. III.), die von der zweiten ebenso weit entfernt ist als die zweite von der ersten, und nennt sie y''', so ist $rq = rv - qv$

$$rv = pm \text{ (wegen } \Delta\, rvp \cong pmo) = y'' - y'$$
$$qv = y''' - y'', \text{ also } rq = (y'' - y') - (y''' - y'').$$

Dieses Stück, die Differenz der Ordinatendifferenzen, bildet ein Verhältniß zum Quadrat der Abscissendifferenz, welches bei dem Annähern des Punkts p nach o (also bei dem Zusammenrücken der zwei Ordinaten y''' und y'' gegen die erste y') einem festen Grenzwerthe zustrebt.

Dieß Verhältniß ist: $\frac{(y''-y')-(y'''-y'')}{(x''-x')^2} = \frac{\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'''-y''}{x''-x'}}{x''-x'}$. Aber $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ nähert sich der Grenze $\frac{a}{2y'}$ (nach §. 2). Ebenso, wenn wir berücksichtigen, daß zwischen y'' und y''' eine der andern völlig entsprechende Figur obwaltet und $pv = dg = bd = x'' - x'$ ist, nähert sich $\frac{y'''-y''}{x''-x'}$ dem $\frac{a}{2y''}$; also der Werth $\frac{\frac{y''-y'}{x''-x'} - \frac{y'''-y''}{x''-x'}}{x''-x'}$ der Grenze $\frac{\frac{a}{2y'} - \frac{a}{2y''}}{x''-x'} = \frac{a(y''-y')}{2y'y''(x''-x')}$, der Bruch $\frac{y''-y'}{x''-x}$ aber wieder dem $\frac{a}{2y'}$. Also nähert sich der ganze Werth der Grenze $\frac{a.a}{2.2y'y''y'}$; wenn aber $y' = y''$, ist die Grenze $\frac{a^2}{4y'^3}$.

§. 5. Suchen wir die Grenze dieses Werthes $\frac{(y''-y')-(y'''-y'')}{(x''-x')^2}$ für den Kreis, bei welchem sich der Bruch $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ dem $-\frac{x'}{y'}$ und $\frac{y'''-y''}{x''-x'}$ dem $-\frac{x''}{y''}$ nähert, so wird der ganze Werth $-\frac{\frac{x'}{y'} - \frac{x''}{y''}}{x''-x'} = \frac{x''y'-x'y''}{y''y'(x''-x')}$.

Dieß mit $x''y' + x'y''$ erweitert, giebt $\frac{x''^2y'^2 - x'^2y''^2}{(x''-x')(x''y''y'^2 + x'y'y''^2)} = \frac{(r^2-y''^2)y'^2 - (r^2-y'^2)y''^2}{(x''-x')(x''y''y'^2 + x'y'y''^2)}$ $= \frac{r^2(y'^2-y''^2)}{(x''-x')(x''y'+x'y'')y''y'} = \frac{r^2(y'-y'')(y''+y')}{(x''-x')(x''y'+x'y'')y''y'}$; da $\frac{y'-y''}{x''-x'} = -\frac{y''-y'}{x''-x'}$ die Grenze $+\frac{x'}{y'}$ hat, so ist die Grenze des Werths $= \frac{r^2x'(y''+y')}{y'^2y''(x''y'+x'y')}$. Nun $x'' = x'$ und $y'' = y'$ gesetzt, ist die Grenze $= \frac{2y'x'r^2}{2y'x'y'^3} = \frac{r^2}{y^3}$.

§. 6. Wir fanden sowohl bei der Parabel als dem Kreis soeben den Ausdruck für die Differenzendifferenz bei positivem y positiv; bei negativem y wäre er negativ geworden, weil y einen ungeraden Exponenten hatte.

Betrachten wir aber den Kreis, statt wie in §. 5. nach der Mittelpunktsgleichung, für ein Coordinatensystem, wo die Abscissenaxe den Kreis tangirt (Fig. IV.), während die Ordinatenaxe durchs Centrum geht, so ist die Gleichung $y = r \pm \sqrt{r^2 - x^2}$ und alle Ordinaten werden positiv. Da wir aber nun statt des y ein $y - r$ einsetzen müssen, wird obiger Grenzwerth $\frac{r^2}{(y-r)^3}$.

Nach der Gleichung hat $y - r$ einen positiven und negativen Werth, also auch $\frac{r^2}{(y-r)^3}$. Dieser negative Werth muß zu dem unteren Zweig fz des Kreises gehören und das negative Zeichen der Differenzendifferenz bedeutet, daß die Differenz der Ordinaten y''' und y'' am unteren Zweig größer sei, als die der Ordinaten y'' und y', umgekehrt wie bisher. Es wird also das $-$-Zeichen dabei immer anzeigen, daß die Curve gegen die Axe convex ist, vorausgesetzt, daß man sich auf der positiven Ordinatenseite befindet, und das $+$ Zeichen der Differenzendifferenz deutet unter gleicher Voraussetzung auf eine concave Curve (wie es in §. 4 die Parabel, in §. 5 der Kreis war und auch hier der obere Kreiszweig hf ist). Andere Beispiele davon später (§. 24).

§. 7. Durch drei Punkte, die nicht einer Richtung angehören, läßt sich immer ein Kreis ziehen. Suchen wir nun einen Kreis, der durch die Punkte o, p und q der Parabel (Fig. III.) geht, so wird dieser die Sehnen op und pq und sowohl die Ordinatendifferenz als die Differenzendifferenz mit der Parabel gemeinschaftlich haben. Wenn nun die drei Punkte wie bisher in einen zusammenrücken, so ist dieß der Berührungspunkt der Parabel und eines Kreises, und zwar eines solchen, der kurz vor dem völligen Zusammenrücken der Punkte noch dreimal die Parabel geschnitten hat. Sein Radius sowohl als seine Lage wird sich während des Zusammenrückens der drei Punkte verändert haben, aber mit der Annäherung der letzteren hat auch er einer festen Größe und Lage zugestrebt. Diese Grenzgröße und Grenzlage des Kreises ist uns wichtig, denn sie giebt uns denjenigen Kreis, der sich der Krümmung der Parabel am engsten von allen an diesem Punkte möglichen Kreisen anschmiegt. Er mißt die Krümmung der Parabel an dieser Stelle und heißt daher Krümmungskreis.

Sein Radius ist, so lange wir ihn suchen, unbestimmt $= r$, ebenso die Coordinaten seines Mittelpunkts $x - m$ und $y - n$. Nun ist die Ordinatendifferenz $\frac{y'' - y'}{x'' - x'}$ im Grenzwerth für den Kreis nach §. 3 $= -\frac{x-m}{y-n}$, für die Parabel $\frac{a}{2y}$ (§. 2). (An die Stelle der Mittelpunktscoordinaten x und y des Kreises müssen hier die allgemeinen $x - m$ und $y - n$ gesetzt werden, da sein Centrum nicht auf der Axe zu liegen braucht.) Die Differenzendifferenz $\frac{(y''-y')-(y'''-y')}{(x''-x')^2}$ ist im Grenzwerth für den Kreis nach §. 5 $= \frac{r^2}{(y-n)^3}$, für die Parabel $\frac{a^2}{4y^3}$ (§. 4). Also aus den Bedingungsgleichungen: 1) $-\frac{x-m}{y-n} = \frac{a}{2y}$ und 2) $\frac{r^2}{(y-n)^3} = \frac{a^2}{4y^3}$ nebst der allgemeinen Kreisgleichung: 3) $r^2 = (y-n)^2 + (x-m)^2$ lassen sich die drei gesuchten Werthe m, n und r finden.

Gleichung 1) quadrirt, $\frac{a^2}{4y^2} = \frac{(x-m)^2}{(y-n)^2}$, und in 2) dividirt, giebt $\frac{1}{y} = \frac{r^2}{(x-m)^2(y-n)}$, oder: $(x-m)^2(y-n) = r^2 y$.

Die linke Seite wird wegen 3): $(r^2 - (y-n)^2)(y-n) = r^2(y-n) - (y-n)^3 = r^2 y$, also $r^2(y - y + n) = -(y-n)^3$ und 4) $r^2 n = -(y-n)^3$. Also ist $n = -\frac{(y-n)^3}{r^2}$. Aber nach 2) ist $\frac{(y-n)^3}{r^2} = \frac{4y^3}{a^2}$, also $n = -\frac{4y^3}{a^2}$, also ist $y - n = y + \frac{4y^3}{a^2}$. Dieß in 1) eingesetzt, giebt $a\left(y + \frac{4y^3}{a^2}\right) = -2y(x-m)$, $a\left(y + \frac{4y^3}{a^2}\right) = \frac{a^3 y + 4ay^3}{a^2} = \frac{a^2 y + 4y^3}{a}$ und $x - m = -\frac{a^2 + 4y^2}{2a}$. Um den Radius zu finden, setzen wir in die Gleichung 4) $r^2 n = -(y-n)^3$ den Werth für $(y-n) = y + \frac{4y^3}{a^2}$ ein, also: $r^2 n = -\left(y + \frac{4y^3}{a^2}\right)^3 = -\left(\frac{a^2 y + 4y^3}{a^2}\right)^3$. Nun n eingesetzt: $-\frac{r^2 \cdot 4y^3}{a^2} = -\left(\frac{a^2 y + 4y^3}{a^2}\right)^3$ oder $r^2 = \frac{(a^2 + 4y^2)^3}{4a^4}$, und weil $y^2 = ax$, $r = \frac{\sqrt{(a^2 + 4ax)^3}}{2a^2}$.

Für den Scheitel der Parabel, also $x = 0$, wird der Krümmungsradius $= \frac{\sqrt{a^6}}{2a^2} = \frac{a}{2}$, n wird $= 0$ und $m = \frac{a}{2}$. Das erste und letzte sagt dasselbe: der Mittelpunkt des Krümmungskreises (das Krümmungscentrum) falle um $\frac{a}{2}$ vom Scheitel weg auf die Abscissenaxe.

§. 8. Wenn es aus dem Vorigen deutlich wurde, wie das Krümmungscentrum bestimmt wird und daß jeder Parabelpunkt sein eignes Krümmungscentrum hat, so wird es auch einleuchten, daß für eine ununterbrochene Reihe von Parabelpunkten eine Reihe zugehöriger Krümmungscentra vorhanden sein müsse, die ebenfalls eine zusammenhängende Linie bilden.

Ist z. B. (Fig. VI.) $so = \frac{a}{2}$, also o das Krümmungscentrum des Scheitels s, so wird Punkt u ein schon entfernter liegendes Krümmungscentrum v haben und t ein noch entfernteres w. Die Krümmungscentra der Parabelpunkte zwischen s und t aber werden zwischen o und w fallen. Man kann sich am unteren Ende der Linie ow einen Faden befestigt und über ihre convexe Biegung gelegt denken. Zuerst treffe sein freies Ende den Scheitel s. Wird er nun allmählich abgewickelt, so beschreibt das freie Ende als immer größer werdender Radius die Parabel st. Dieser Eigenschaft wegen heißt die Linie ow die Evolute oder Abgewickelte der Parabel und die Parabel heißt in Bezug auf sie ihre Evolvente oder durch Abwickelung erzeugte. Zur Abwickelung des unteren Parabelzweiges sg dient der obere Evolutenzweig oz.

Um die Gleichung der Evolute zu finden, haben wir nur die allgemeinen Ausdrücke für die Coordinaten des Krümmungscentrums zu vergleichen. Sie sind $x - m = -\frac{a^2 + 4y^2}{2a} = -\frac{a}{2} - 2x$, also $x = \frac{m}{3} - \frac{a}{6}$ und $n = -\frac{4y^3}{a^2} = -4\sqrt{\frac{x^3}{a}}$, also $x = \sqrt[3]{\frac{an^2}{16}}$.

Beide Werthe für x gleichgesetzt giebt:

$$\frac{m}{3} - \frac{a}{6} = \sqrt[3]{\frac{an^2}{16}} \text{ oder } n^2 = \frac{16}{27a}\left(m - \frac{a}{2}\right)^3.$$

m und n sind jetzt die Veränderlichen, und zwar bezeichnet m die Abscissen, n die Ordinaten.

Näheres über diese Linie, die auch die Neilische Parabel heißt, bei späteren Beispielen.

Verallgemeinerung.

§. 9. Vergleicht man das in allen diesen Fällen angewendete Verfahren mit dem in §. 1 aus der Elementarmathematik angeführten, so zeigt sich als das beiden Gemeinschaftliche, daß auf einen Werth, der nicht direct gefunden werden konnte, durch Näherung geschlossen wurde. Der Unterschied aber zwischen beiden Verfahrungsarten, der die letztere ungleich höher stellen muß, ist: daß man sich dort in der That immer mit einem allmählich entstehenden und unvollendeten Resultat begnügen mußte, während wir hier eine Näherung nur in Gedanken vollzogen, die uns dann immer in Form der Grenze auf einen sicheren und vollständigen Werth wies. Dort erhielten wir z. B. statt des Kreises immer nur ein Polygon. Hier erschien z. B. §. 2 als Grenze aller Subsekanten die wirkliche Subtangente $= 2x$, aber nur dadurch, daß wir in die Formel der Subsekante einen Werth verflochten hatten, der bei ihrem Uebergang in die Subtangente einer Grenze fähig war.

Unser Verfahren in den bisherigen Fällen hatte indeß noch etwas Unbehülfliches und Unvollkommenes. Indem wir uns bei jedem Beispiel erst den Werth vergegenwärtigten, den wir zur Grenze führen wollten und dann durch allerlei Umwandlungen zu einer Form gelangten, die uns für den Coincidenzfall der Punkte einen Werth übrig ließ (denn der anfängliche, z. B. in §. 2 das $a\left(\frac{y'' - y'}{y''^2 - y'^2}\right)$, hätte uns für das Zusammenfallen der Punkte ($y'' = y'$) noch den ganz unverständlichen Ausdruck $a\frac{0}{0}$ geliefert), schienen wir immer vom Zufall abhängig, ob uns die rechte Umwandlung gelingen würde, ein Zweifel, der bei verwickelteren Fällen als dem der Parabel und des Kreises immer gegründeter wird. Man hat also eine Methode aufgesucht und Regeln gefunden, solche Grenzwerthe ganz allgemein aufzusuchen. Der wissenschaftliche Zweig, welcher sich damit beschäftigt, heißt die Differentialrechnung. Die ersten Grundzüge derselben sollen hier dargelegt und an einigen einfachen Beispielen erprobt werden.

Wie in der Gleichung einer Curve zwei veränderliche Werthe x und y aneinander geknüpft sind, so daß die Veränderung des einen die Veränderung des andern zur Folge hat, so können wir noch unzählige andere Fälle der Verknüpfung von 2 oder mehreren Veränderlichen denken. So wird z. B. die Fläche eines Dreiecks veränderlich sein, wenn es eine der drei Seiten ist, oder es wird sich die Geschwindigkeit einer Bewegung mit der Dichtigkeit des widerstehenden Mittels verändern u. s. w.

Man nennt die Größe, welche durch eine Gleichung so von einer andern abhängig ist, daß sie sich bei der Veränderung dieser mitverändert, ihre Function. — In $y^2 = ax$ war y Function der Veränderlichen x. Man kann ebenso gut x als Function von y betrachten; doch ist es bei den Curven gewöhnlich, die Ordinate als Function der Abscisse zu betrachten und von den Veränderungen der letzteren auszugehen.

Falls wir nun von einem bestimmten Werth des x, dem ein bestimmter Werth des y entsprechen muß, ausgehen und x von da aus verändern, so ist unsere erste Frage darauf gerichtet, welchem Grenzwerth sich das Verhältniß zwischen den Veränderungen des y und x nähert, sobald wir wieder auf den zuerst bestimmten Werth zurückweichen.

Die Veränderung des y entspricht jener Ordinatendifferenz, die des x der Abscissendifferenz obiger Beispiele und ihr Verhältniß dem Bruch $\frac{y''-y'}{x''-x'}$.

Wir wollen aber jetzt den Zuwachs des x mit k, die dadurch in y hervorgebrachte Veränderung mit h bezeichnen, so ist für die Gleichung $y^2 = ax$ nach eingetretener Veränderung:

$$\begin{aligned} (y+h)^2 &= a(x+k) \\ y^2+2yh+h^2 &= ax+ak. \\ \text{Da aber } y^2 &= ax \\ 2yh+h^2 &= ak \\ \frac{h}{k} &= \frac{a}{2y+h}. \end{aligned}$$

Je kleiner h und k wird, indem die Veränderung rückgängig wird, um so näher kommt der Werth $\frac{a}{2y+h}$ seiner Grenze $\frac{a}{2y}$, derselben, wie wir sie §. 2 auf andere Art gefunden haben.

Man giebt den Veränderungen des x und y, wenn man sie im Zustand des Wiederverschwindens auffassen will, die Bezeichnungen dx und dy und nennt sie Differentiale. Begreiflicher Weise kann man diesen blosen Zeichen keine faßbare Größe beilegen, obschon, wie wir gesehen haben, ihr Verhältniß eine fest bestimmte Größe ist. Dieß Verhältniß der Differentiale (oder der Veränderungen im Moment des Verschwindens beider) heißt Differentialquotient und wird mit $\frac{dy}{dx}$ bezeichnet. Er ist dasselbe, was wir bisher Grenzwerth genannt haben, und seine Aufsuchung die Hauptaufgabe der ganzen Rechnungsart.

§. 10. Die allgemeine Form der Gleichung ersten Grads ist $y = ax \pm b$ (x wachse um k, y um h)

$$\begin{aligned} y+h &= ax+ak \pm b \\ \text{Da } y &= ax \quad \pm b, \\ \frac{h}{k} &= a. \end{aligned}$$

Die Grenze $\frac{dy}{dx}$ bleibt = a, weil nichts in diesem Werth war, das verschwinden konnte. Durch die Gleichung ersten Grads wird die gerade Linie dargestellt (Fig. V.). Bei ihr steht jeder Zuwachs der Ordinate zu dem der zugehörigen Abscisse in demselben Verhältnisse, also bleibt dieß auch für die verschwindenden Veränderungen in Kraft.

§. 11. Quadratische Gleichung: $y = x^2$.

Wachsen beide, so wird $y+h = (x+k)^2 = x^2+2xk+k^2$.

Davon die erste Gleichung $y = x^2$ subtrahirt,

giebt $h = 2xk+k^2$ und $\frac{h}{k} = 2x+k$.

Kommt dieß zur Grenze, indem h und k verschwinden, so ist $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Es giebt übrigens noch eine kürzere Methode, zu diesem Resultate zu gelangen. Sieht man nämlich gleich anfangs den Zuwachs von x und y als sehr klein an oder betrachtet man die Gleichung, welche dy und dx enthält, als Näherungsgleichung, die um so richtiger ist, je kleiner dy und dx gedacht wird, so darf man schon während der Rechnung nach Regel 6 des §. 1 jede höhere Potenz dieser nun als wirkliche Größen geltenden Zeichen gegen ihre erste Potenz vernachlässigen, sowie man dieß auch thun dürfte, wo ein Product aus diesen beiden kleinen Werthen aufträte. Am Schlusse der Rechnung aber, wo der Differentialquotient erscheint, ist dann immer wieder der oben erklärte Begriff dieser Zeichen nicht für kleine, sondern für verschwundene Werthe aufzunehmen. Diese Betrachtungsweise ist zwar der erwähnten Doppeldeutigkeit wegen nicht so einleuchtend, aber für das Folgende so bequem und kurz, daß wir sie zur Entwickelung der folgenden Regeln benützen und uns begnügen werden, zu einigen Fällen die Begründung auch auf die Weise zu setzen, daß wir die Differenzen der Veränderlichen wie früher bis zum Schlusse beliebig groß lassen und erst nach Bildung des Quotienten vernichten. Eine solche Begründung ist übrigens in allen nachstehenden Fällen leicht und sie bleibt nur der Raumersparniß wegen hier im Allgemeinen weg.

Obige Gleichung $y = x^2$ würde nun so behandelt:

$$\begin{array}{rcll} y + dy & = & x^2 + 2x\,dx + (dx)^2 & \\ y & = & x^2 & \text{und } (dx)^2 \text{ weggelassen,} \\ \hline dy & = & 2x\,dx & \text{und } \frac{dy}{dx} = 2x. \end{array}$$

$2x\,dx$ heißt das Differential der Function x^2 oder $d(x^2)$ *).

§. 12. Kubische Gleichung: $y = x^3$.

$$\begin{array}{rcl} y + dy & = & x^3 + 3x^2dx + (3x\,dx^2 + dx^3) \\ y & = & x^3 \\ \hline dy & = & 3x^2dx \text{ und } \frac{dy}{dx} = 3x^2. \end{array}$$

$3x^2dx$ ist das Differential von x^3 oder $d(x^3)$.

Höhere Gleichung allgemeinen Grads: $y = x^n$.

$$y + dy = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}dx^2 \ldots\ldots$$

Davon $y = x^n$ weg, ebenso die Glieder, welche mit höheren Potenzen von dx multiplicirt sind,

giebt $dy = nx^{n-1}dx$ und $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

$nx^{n-1}dx$ ist das Differential von x^n oder $d(x^n)$.

Es folgt daraus die Regel: Das Differential einer Potenz wird gefunden, indem man ihren Exponenten um 1 vermindert und sie mit dem unverminderten Exponenten und mit dem Differential ihrer Basis (hier dx) multiplicirt.

§. 13. Wurzeln. $y = \sqrt[n]{x}$ läßt sich auch schreiben $y^n = x$.

Nach dem Vorigen $dx = ny^{n-1}dy$,

oder $dy = \frac{dx}{ny^{n-1}}$ und der Werth von y eingesetzt:

$$dy = \frac{dx}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{dx}{n}x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx.$$

Also $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

*) $d(x^2)$ unterscheide man wohl von $(dx)^2$, gewöhnlich nur dx^2. Das erstere $d(x^2)$ drückt aus, daß von x^2 das Differentiale gesucht werden soll, das letztere dx^2, daß der klein gedachte Werth dx auf das Quadrat zu erheben ist.

Regel: Das Differential einer Wurzel, d. h. einer Potenz mit gebrochnem Exponenten, wird ganz nach der Regel der Potenzen gesucht.

Begründung der beiden letzten Regeln.

1) $y = x^n$. Durch Wachsen des y und x entsteht

$$y + h = (x+k)^n = x^n + nx^{n-1}k + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}k^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}k^3 \ldots.$$

$y = x^n$ davon ab und durch k dividirt, entsteht:

$$\frac{h}{k} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}k + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}k^2 \ldots.$$

Da jedes folgende Glied der rechten Seite k enthalten muß, so bleibt für das Verschwinden des h und k die Grenze $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$.

2) $y = \sqrt[n]{x}$ oder $y^n = x$, also nach dem Vorigen:

$$\frac{k}{h} = ny^{n-1} + \frac{n.(n-1)}{1.2}y^{n-2}h \ldots, \text{ oder}$$

$$\frac{h}{k} = \frac{1}{ny^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}y^{n-2}h \ldots} \text{ hat zur Grenze: } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{ny^{n-1}}.$$

Nun statt y sein Werth $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ eingesetzt, giebt: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, wie oben.

§. 14. Ist der Exponent ein Bruchproduct, so findet noch dieselbe Regel statt.

Z. B. $y = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, so setze man $y^n = x^m$.

Nach §. 12 ist also $ny^{n-1}dy = mx^{m-1}dx$,

$$dy = \frac{mx^{m-1}dx}{ny^{n-1}}. \text{ Statt y setze man seinen Werth:}$$

$$dy = \frac{mx^{m-1}dx}{nx^{\frac{m(n-1)}{n}}} = \frac{m}{n}x^{(m-1)-\frac{m(n-1)}{n}}dx = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx.$$

Z. B. für den speciellen Fall $y = \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$:

$$dy = \tfrac{3}{5}x^{\frac{3}{5}-1}dx = \tfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}dx \text{ und } \frac{dy}{dx} = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}.$$

§. 15. Summen und Differenzen.

$$\begin{aligned} y &= x^2 \pm x \pm c. \text{ Wenn y und x wächst:} \\ y + dy &= x^2 + 2xdx + dx^2 \pm x \pm dx \pm c \\ y &= x^2 \quad \pm x \quad \pm c \text{ davon weg} \\ \hline dy &= 2xdx \pm dx (+ dx^2) \text{ und } \frac{dy}{dx} = 2x \pm 1. \end{aligned}$$

Regel: Das Differential einer Summe oder Differenz ist gleich der Summe oder Differenz der Differentialen der einzelnen Glieder. Constante Größen haben 0 zum Differential, weil sie keines Zuwachses fähig sind.

§. 16. Producte.

$$\begin{aligned} a &= xy \text{ wird durch Wachsen} \\ a &= (x+dx)(y+dy) = xy + xdy + ydx + dxdy \\ a &= \quad xy \text{ (letzteres Glied nach §. 11 auszulassen)} \\ \hline 0 &= xdy + ydx \text{ und } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Regel: Das Differential eines Productes von Veränderlichen bildet man, indem man jede mit dem Differential der andern multiplicirt und die Producte addirt.

Begründung: $a = (x+k)(y+h) = xy + xh + yk + hk$

$$a = xy$$

$$0 = xh + yk + hk \text{ und } \frac{h}{k} = -\frac{y+k}{x}.$$

Grenze $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ wie oben.

Es gilt diese Regel auch für mehr als 2 Factoren und solche, die selbst zusammengesetzte Functionen sind.

Z. B. $(x+b)y^2x = c$

$$(x+dx+b)(y^2+2ydy+dy^2)(x+dx) = c$$

giebt mit Weglassung höherer Potenzen der dx und dy:

$$(x+b)y^2x + 2x^2ydy + 2y^2xdx + by^2dx + 2bxydy = c$$
$$(x+b)y^2x = c$$
$$2x^2ydy + 2bxydy + 2y^2xdx + by^2dx = 0$$

oder $\quad 2y.(x+b)xdy + (x+b)y^2dx + y^2xdx = 0.$

Das erste Glied enthält nämlich das Differential von y^2, mit den Factoren $x+b$ und x multiplicirt, das zweite das Differential von x mit den Factoren $x+b$ und y^2, das dritte endlich das Differential von $x+b$ (welches nur dx ist) mit den Factoren y^2 und x multiplicirt.

Also: das Differential jedes Factors wird mit den andern Factoren multiplicirt und alle Producte sind zu addiren. Die Bildung des Differentialquotienten ist dann leicht:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x+b)y^2 + y^2x}{2y(x+b)x}.$$

§. 17. Was constante Factoren einer Veränderlichen betrifft, so sieht man an dem Beispiel von §. 10 $y = ax$ schon, welches sich in $y + dy = ax + adx$ und nach Abzug der ersten Gleichung in $dy = adx$ verwandelt, daß statt des Differentials eines Products aus constantem und veränderlichem Factor das Product aus dem constanten Factor und dem Differential der Veränderlichen gesetzt werden muß.

§. 18. Brüche. Um das Differential eines Bruches zu finden, setzen wir den Fall, daß $\frac{x}{y} = v$, wo v auch eine Veränderliche ist, so werden wir statt dv das Differential des Bruches setzen können.

$\frac{x}{y} = v$ oder $x = yv$ giebt nach §. 16 $dx = ydv + vdy$, also $dv = \frac{dx - vdy}{y}$, oder für v wieder seinen Werth gesetzt $= \frac{x}{y}$, giebt es $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{dx - \frac{x}{y}\cdot dy}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$, woraus die Regel zu ziehen ist:

Das Differential eines Bruches findet man, indem man den Nenner mit dem Differential des Zählers und den Zähler mit dem Differential des Nenners multiplicirt, letzteres Product von ersterem subtrahirt und diese Differenz durch den auf das Quadrat erhobenen Nenner dividirt.

Beispiel: $y = \frac{ax^2}{b+x}$, $dy = \frac{2a(b+x)xdx - ax^2dx}{(b+x)^2}$. Also $\frac{dy}{dx} = \frac{2ax(b+x) - ax^2}{(b+x)^2}$.

§. 19. Ist Nenner oder Zähler constant, so vereinfacht sich diese Regel, indem das Differential der Constanten selbst $= 0$ das eine Glied der Differenz zum Wegfallen bringt.

Beispiele:
$$y = \frac{a}{bx^2}.$$

$$dy = -\frac{abdx}{b^2x^2} = -\frac{adx}{bx^2}, \text{ was auch nach §. 16 zu finden war.}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{bx^2}.$$

§. 20. Es ist nur noch übrig, zu zeigen, wie sich das Differential einer Potenz oder Wurzel finden läßt, deren Basis selbst noch zusammengesetzte Functionen, entweder Summen, Differenzen, Producte, Quotienten, Potenzen oder Wurzeln enthält. Es läßt sich das an einem Beispiel zeigen:

$y = \left(ax^2 + \frac{b}{y} - c\sqrt{x+y}\right)^5$. Setzt man zuerst den ganzen Werth der Parenthese $= v$, so ist

$$y = v^5$$
$$dy = 5v^4 dv. \quad \text{§. 12.}$$

dv ist aber $d\left(ax^2 + \frac{b}{y} - c\sqrt{x+y}\right) = d(ax^2) + d\left(\frac{b}{y}\right) - d(c\sqrt{x+y})$. §. 15.

$$d(ax^2) = 2axdx. \quad \text{§. 12. und §. 17.}$$

$$d\left(\frac{b}{y}\right) = -\frac{bdy}{y^2}. \quad \text{§. 18. und §. 19.}$$

$d(c\sqrt{x+y})$ setzen wir $= dc\sqrt{w} = cd\sqrt{w} = \frac{cdw}{2\sqrt{w}}$. §. 13.

Aber $\quad dw = d(x+y) = dx + dy$. §. 15.

Also $d(c\sqrt{x+y}) = \frac{cdx + cdy}{2\sqrt{x+y}}$

Und $dv = 2axdx - \frac{bdy}{y^2} + \frac{cdx + cdy}{2\sqrt{x+y}}$.

Also $dy = 5\left(ax^2 + \frac{b}{y} - c\sqrt{x+y}\right)^4 \cdot \left[2axdx - \frac{bdy}{y^2} + \frac{cdx + cdy}{2\sqrt{x+y}}\right]$.

Hier läßt sich dy zum gemeinschaftlichen Factor der einen Gleichungsseite, dx zu dem der andern machen und so endlich der Differentialquotient finden.

§. 21. Der Differentialquotient hatte in den meisten der genannten Beispiele einen Werth, welcher selbst noch die veränderlichen Größen enthielt, nämlich in allen den Fällen, wo die gegebene Gleichung den ersten Grad in Bezug auf die Veränderlichen überstieg. Es entsprach das der Erfahrung an den Curven, daß wir für die trigonometrische Tangente des Winkels, den die geometrische Tangente mit der Axe des x machte (denn diese $\operatorname{Tang} \alpha$ bezeichnete ja das $\frac{dy}{dx}$), einen noch allgemeinen Werth fanden, der erst für jeden besondern Punkt (also für ein bestimmtes x) ein besonderer wurde.

Demnach läßt sich in solchem Falle der Differentialquotient selbst noch als eine Function von x ansehen und sein Werth aufs Neue differenziren. Es wird dann ein Quotient von der Form $\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$ gefunden werden können, den man den zweiten Differentialquotienten nennt. Man bezeichnet ihn $\frac{d^2y}{dx^2}$, wobei das d^2 nicht als Potenz mit dem Exponenten 2, sondern als das blose Zeichen wiederholter Differenzirung betrachtet werden muß.

Ein Beispiel erläutere die Sache:

$y^2 = ax$ gab $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$. Also $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{a}{2y}\right)}{dx}$. Aber $d\frac{a}{2y} = -\frac{a \cdot 2dy}{4y^2}$; für y^2 seinen Werth ax und für dy seinen Werth $\frac{adx}{2y}$ eingesetzt, wird dieß $= -\frac{\frac{aadx}{2y}}{2ax} = -\frac{a^2dx}{4axy} = -\frac{a^2dx}{4ax\sqrt{ax}} = -\frac{a^2dx}{4\sqrt{(ax)^3}}$.

Wenn aber $d\frac{dy}{dx} = -\frac{a^2dx}{4\sqrt{(ax)^3}}$, so mußte $\frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ oder $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{4\sqrt{(ax)^3}} = -\frac{a^2}{4y^3}$ sein.

Das Einzige also, was von dem Bisherigen abweichend hier auf den ersten Blick Schwierigkeiten machen könnte, war, daß sich in die Entwickelung noch dy einzudrängen pflegt, das wir zur Bildung des zweiten Differentialquotienten nicht unterbringen können. Man hat aber nur dann, wie das Beispiel zeigte, den Werth für dy aus dem ersten Differentialquotienten zu entnehmen und an seine Stellen zu setzen, so kann sich nur noch dx vorfinden, welches bei der Bildung des zweiten Differentialquotienten durch Wegdividiren verwendet wird.

§. 22. Um die Bedeutung des zweiten Differentialquotienten zu fassen, rufen wir uns zurück, daß der erste Differentialquotient, ehe die Veränderungen des y und x zu Differentialen eingeschrumpft waren, das Verhältniß der Differenz zweier Ordinaten zu der Differenz der zugehörigen Abscissen bezeichnete oder allgemein das Verhältniß einer Veränderung des y zu der zugehörigen Veränderung des x. Nehmen wir nun eine dritte Ordinate hinzu, oder allgemein: eine nochmalige Veränderung des y, entstanden durch eine nochmalige (aber der ersten gleiche) Veränderung des x, so lassen sich nicht nur 2 Differenzen (zwischen der ersten und zweiten und zwischen der zweiten und dritten Ordinate oder den entsprechenden Veränderungen des y), sondern es läßt sich auch noch eine Differenz dieser Differenzen unterscheiden. Wie das Verhältniß dieser Differenzendifferenz zum Quadrat der Abscissendifferenz dem zweiten Differentialquotienten als fester Grenze zudrängt, soll noch das folgende Beispiel darthun:

$y = ax^3 + bx$ (k ist der Zuwachs des x, welcher das y um h wachsen macht).

$y + h = ax^3 + 3ax^2k + 3axk^2 + ak^3 + bx + bk.$ Abermals der Zuwachs k zu x, so daß statt x wieder $x + k$ stehe, mache nun das $y + h$ noch um q wachsen:

$$y + h + q = ax^3 + 3ax^2k + 3axk^2 + ak^3 + 3ax^2k + 6axk^2 + 3ak^3 + 3axk^2 + 3ak^3 + ak^3 + bx + bk + bk.$$

Ziehe ich $y + h$ davon ab, so bleibt

$$\begin{aligned} q &= 3ax^2k + 6axk^2 + 3ak^3 + 3axk^2 + 3ak^3 + ak^3 + bk. \\ h &= 3ax^2k + 3axk^2 + \qquad\qquad\qquad\qquad ak^3 + bk \\ \hline q - h &= 3axk^2 + 3axk^2 + 3ak^3 + 3ak^3 = 6axk^2 + 6ak^3. \\ q - h &= 6axk^2 + 6ak^3 \\ \hline \frac{q-h}{k^2} &= 6ax + 6ak. \end{aligned}$$

Wird durch das Zusammenrücken oder Rückverschwinden aller dieser Veränderungen $q = 0$, $h = 0$ und $k = 0$, so ist die Grenze $\frac{d^2y}{dx^2} = 6ax$.

Dasselbe erscheint sogleich durch zweimaliges Differenziren:

$$\begin{aligned} y &= ax^3 + bx \\ dy &= 3ax^2dx + bdx \\ \frac{dy}{dx} &= 3ax^2 + b \\ d\,\frac{dy}{dx} &= 6axdx \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 6ax, \text{ wie oben.} \end{aligned}$$

Einige geometrische Anwendungen.

§. 23. Steigen und Sinken der Curve. Der erste Differentialquotient bezeichnet die trigonometrische Tangente des Winkels der Tangente mit der Abscissenaxe, und zwar haben wir diesen Winkel als nach der positiven Seite der Abscissenaxe hin geöffnet angenommen. Demnach gilt die Regel: Die Tangente und mit ihr die Curve steigt nach der positiven Seite der Abscissenaxe hin, wenn der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für positives y einen positiven Werth hat. Hat die Curve auch einen Zweig mit negativen Ordinaten, so muß derselbe Differentialquotient für negatives y negativ werden, also für diesen Zweig die Tangente sinken.

Allgemein ausgedrückt, *entfernt sich also die Curve von der Abscissenaxe nach ihrer positiven Seite hin, wenn der Differentialquotient dasselbe Zeichen als die Ordinate hat, im umgekehrten Falle nähert sie sich.* — Beispiele später!

§. 24. *Concavität und Convexität der Curve.* Der Zähler des zweiten Differentialquotienten bezeichnet die Grenze des Stückes, um welches die Differenz der dritten und zweiten Ordinate größer ist, als die Differenz der zweiten und ersten. Wenn also dieser Zähler (oder auch der ganze Bruch $\frac{d^2y}{dx^2}$, denn der Nenner als Quadrat ist immer positiv) einen positiven Werth für positive Ordinaten hat, ist dieß ein Zeichen, daß auch für die kleinste Strecke die Ordinaten nach der positiven Seite der Abscissenaxe hin einander um *wachsende* Stücke übertreffen. Dabei muß die Krümmung gegen die Axe convex erscheinen. Daß für die negativen Ordinaten dasselbe gilt, wenn der zweite Differentialquotient negativ ist, wird leicht eingesehen. Also allgemein: *Hat der zweite Differentialquotient gleiches Zeichen mit der Ordinate, so ist die Curve convex, im umgekehrten Falle concav gegen die Abscissenaxe*).*

§. 25. *Maxima und Minima.* In der Regel wird bei einer Curve, die irgendwo eine größte oder eine kleinste Ordinate, also einen höchsten oder einen niedrigsten Punkt über der Abscissenaxe hat, der Lauf der Tangentenrichtung über die Krümmung hin der Art sein, daß sie einmal parallel mit der Abscissenaxe zu liegen kommt. In diesem Augenblick muß der Werth der trigonometrischen Tangente ihres Winkels vom Positiven zum Negativen übergehen, also durch 0 gehen. (Den selteneren Fall, wo dieser Uebergang durch ∞, d. h. die Richtung senkrecht gegen die Abscissenaxe, geschieht, müssen wir hier aus Mangel an Raum übergehen.) Wir haben also ein Mittel in Händen, den Ort dieser größten oder kleinsten Ordinate zu finden. Wir setzen nämlich den Werth des $\frac{dy}{dx} = 0$ und beobachten, welchem x dieser entspricht.

Zur Entscheidung, ob der gefundene Fall nun ein Maximum oder Minimum sei, dient der zweite Differentialquotient. Denn bei dem Maximum ist, wie ein Blick auf die Figur zeigt, an dieser Stelle die Curve concav, bei dem Minimum convex.

Also Regel: *Man setze $\frac{dy}{dx} = 0$ und substituire den daraus gewonnenen Werth von x in den Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$. Zeigt sich der letztere dann von gleichem Zeichen mit der zugehörigen Ordinate, so ist das gefundene x Abscisse des tiefsten Curvenpunktes, im umgekehrten Falle des höchsten.*

Giebt es keinen Werth von x, für den $\frac{dy}{dx} = 0$ ist, so existirt weder Maximum noch Minimum (den, wie gesagt, übergangenen Fall abgerechnet, daß $\frac{dy}{dx} = \infty$ oder $\frac{dx}{dy} = 0$ ist).

§. 26. *Asymptoten.* Die gradlinige Asymptote an einer Curve kann man als die Tangente am unendlich entfernten Punkte bezeichnen, wenn man den Begriff unendlich nach der Erläuterung des §. 1 versteht. Es heißt dann: Eine Tangente nähert sich in Bezug auf ihre Lage um so mehr der Asymptote, je entfernter man den Curvenpunkt annimmt. Es ist also die Asymptote die äußerste Grenze der Tangenten für $x = \infty$

*) Daß wir im Widerspruch hiermit in §. 4 und 5 für concave Curven, wie Parabel und Kreis, einen zweiten Differentialquotienten mit gleichem Zeichen als y fanden, rührte daher, daß wir bei der Entwickelung desselben, wie es für jene Figuren natürlicher war, $(y''-y')-(y'''-y'')$ statt wie nun: $(y'''-y'')-(y''-y')$ geschrieben hatten.

und man könnte kurz auf ihr Dasein schließen, wenn man bemerkte, daß der Ausdruck des Tangentenwinkels $\frac{dy}{dx}$ einer Grenze fähig wäre.

Genaueres erfährt man durch folgende Betrachtung: 0 sei Coordinatenanfang, ew sei Tangente (Fig. VII.), im sei Asymptote. Es wird die Tangente mit dem Hinausrücken des Punktes e die Ordinaten- und Abscissenaxe in immer andern Punkten schneiden; aber sobald sie Asymptote geworden, wird der Punkt v in n, der Punkt w in m angekommen, also vo = no und wo = mo geworden sein; dieß für die Bedingung $x = \infty$.

Nun ist $vo : wo = y : wo + x$ oder $vo . wo + vo . x = wo . y$, giebt durch wo dividirt: $vo + \frac{vo}{wo}x = y$ oder $vo = y - \frac{vo}{wo}x$. Ebenso durch vo dividirt: $wo + x = \frac{wo}{vo}y$ oder $wo = -\left(x - \frac{wo}{vo}y\right)$. Die Ausdrücke $\frac{vo}{wo}$ und $\frac{wo}{vo}$ sind aber gleichbedeutend mit $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dx}{dy}$, indem sie die trigonometrische Tangente und ihre factorische Umkehr für den Tangentenwinkel darstellen. Nennen wir also die Linien vo und wo kurz p und q, so ist $p = y - \frac{dy}{dx}x$ und $q = -\left(x - \frac{dx}{dy}y\right)$.

Setzen wir in die Werthe dieser Ausdrücke $x = \infty$, so zeigt es sich, ob sie bestimmte Größen annehmen. In diesem Fall giebt es Asymptoten, deren Lagen aus ihren Werthen zu erkennen sind. Wird für $x = \infty$ das $p = 0$ und $q = 0$, so geht die Asymptote durch den Coordinatenanfang. $\frac{dy}{dx}$ zeigt uns dann für $x = \infty$ den Steigungswinkel der Asymptote.

Wird für $x = \infty$ entweder p oder $q = \infty$, während das andere endlich bestimmt wird, so liegt die Asymptote im ersten Fall mit der Ordinatenaxe, im letzteren mit der Abscissenaxe parallel. Sind p und q beide zugleich ∞, so sind keine Asymptoten da. In gewissen, leicht zu findenden Fällen wird man zur Aufsuchung der Asymptote statt x das $y = \infty$ zu setzen haben.

§. 27. Krümmungskreise. Nach §. 7 ist der Krümmungskreis die Grenze der Kreise, welche 3 Punkte mit der Curve gemeinschaftlich haben, für den Fall, daß diese 3 Punkte gegen einen zusammenrücken. Es wurde dort schon gezeigt, daß er mit der Curve den ersten und zweiten Differentialquotient gemein haben müsse, wenn auch dort dieser Ausdruck noch nicht gebraucht wurde.

Die allgemeine Gleichung des Kreises ist

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \varrho^2,$$

wenn α und β die Coordinaten des Centrums sind. Also ist $\frac{dy}{dx}$ für den Kreis $= -\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dx^2+dy^2}{(y-\beta)dx^2}$. Diesen Werthen nun die Differentialquotienten der Curve gleichgesetzt: 1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ und 2) $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dx^2+dy^2}{(y-\beta)dx^2}$, ergiebt sich aus 2): $y - \beta = -\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$, und dieß in 1) gesetzt:

$$x - \alpha = \frac{dy}{dx}\left(\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}\right).$$

Endlich aus der Kreisgleichung durch Einsetzen dieser Werthe: $\varrho^2 = \frac{(dx^2+dy^2)^3}{dx^2(d^2y)^2}$

und $\varrho = \frac{\sqrt{(dx^2+dy^2)^3}}{dx\, d^2y} = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\, d^2y}$.

Die Art der Berechnung dieser Formeln durch Einsetzen der Werthe mögen die angehängten Beispiele noch mehr verdeutlichen.

§. 28. Die Evolute. Wenn man aus den im vorigen §. entwickelten Werthen für α und β, welche die Coordinaten des Krümmungscentrums ausdrücken, mit Hülfe der Curvengleichung selbst x und y beseitigt hat (denn 3 Gleichungen genügen zur Elimination zweier Werthe), so bleibt eine Gleichung übrig, welche nur die Veränderlichen α und β enthält (veränderlich sind sie, insofern man sie als Functionen der Veränderlichen x und y ansehen kann). Diese Gleichung gilt für den geometrischen Ort des Krümmungscentrums (so nennt man den Spielraum, welcher einem Punkt nach irgend einem Gesetze eingeräumt ist). Die Curve, deren Coordinaten α und β sind, ist, wie oben gezeigt, Evolute der Curve, aus deren Coordinaten x und y das α und β abgeleitet ist.

Beispiele.

§. 29. Die Parabel. Scheitelgleichung: $y^2 = ax$, daraus $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y}$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{4y^3}$.

1) y positiv genommen, macht den ersten Differentialquotienten positiv und umgekehrt. — Die Curve breitet sich nach der Seite der positiven Abscissen aus (§. 23).

2) y positiv, giebt den zweiten Differentialquotienten negativ und umgekehrt. — Beide Curvenzweige sind gegen die Abscissenaxe concav (§. 24).

3) $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{2y} = 0$, giebt $y = \infty$. Es giebt kein Maximum oder Minimum, als für ∞ Abscissen, d. h. je weiter die x wachsen, um so ähnlicher liegt die Tangente einer der Axe parallelen (§. 25).

4) $$\left.\begin{aligned} p &= y - x\frac{dy}{dx} = y - \frac{ax}{2y} = \frac{y}{2}. \\ q &= x - y\frac{dx}{dy} = x - \frac{2y^2}{a} = -x. \end{aligned}\right\}$$ x oder $y = \infty$ gesetzt, werden p und $q = \infty$. Es sind keine Asymptoten da (§. 26).

5) Der Krümmungskreis, dessen $\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y} = \sqrt{\frac{\left(\left(\frac{dx^2}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2}\right)dx^2\right)^3}{dx^2(d^2y)^2}} = \sqrt{\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 dx^6}{dx^2(d^2y)^2}}$

$$= \sqrt{\frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Nun ist $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{a^2}{4y^2}$ und $\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3 = \frac{(a^2 + 4y^2)^3}{(4y^2)^3}$, die Wurzel daraus $= \pm\frac{\sqrt{(a^2 + 4ax)^3}}{8y^3}$ und dieß durch den zweiten Differentialquotienten dividirt, wird $= \mp\frac{\sqrt{(a^2 + 4ax)^3} \cdot 4y^3}{8y^3 \cdot a^2}$, $\varrho = \mp\frac{\sqrt{(a^2 + 4ax)^3}}{2a^2}$. Das $\mp$-Zeichen deutet darauf, daß für den positiven Parabelzweig das Krümmungscentrum auf die negative Seite fällt und umgekehrt. Für den Scheitel $(x = 0)$ wird $\varrho = \frac{a}{2}$.

6) Die Evolute, deren Gleichung $\beta^2 = \frac{16}{27a}\left(\alpha - \frac{a}{2}\right)^3$ ist schon in §. 8 entwickelt.

§. 30. Die Ellipse. Mittelpunktsgleichung: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

1) Beide Zweige nähern sich der Axe (§. 23).

2) $+y$ giebt einen negativen zweiten Differentialquotienten und umgekehrt. — Die Curve ist concav.

3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} = \mp\frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} = 0$ giebt $x = 0$, also parallele Tangente. Für $x = 0$ wird aber

$y = \pm b$, also $\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{b}{a^2}$, d. h. für die positive Ordinate negativ, für die negative positiv. Dieß ist das Zeichen für ein Maximum an beiden Zweigen.

4) Asymptoten fehlen.

5) Krümmungskreis $\varrho = \mp \frac{\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)^3}}{a^4b^4}$.

6) Die Evolute soll noch einmal einzeln entwickelt werden:

$$y - \beta = -\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y} \ (\S.\ 27) = -\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \text{ hier} = \left(1 + \frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right)\frac{a^2y^3}{b^4} = \frac{y^3(a^2 - b^2)}{b^4} + y.$$

$$x - \alpha = \left(\frac{dx^2 + dy^2}{d^2y}\right)\frac{dy}{dx} \ (\S.\ 27) = -(y - \beta)\frac{dy}{dx}, \text{ hier} = -\frac{(y^3(a^2 - b^2) + yb^4)b^2x}{b^4 \cdot a^2y} = -\frac{x^3(a^2 - b^2)}{a^4} + x.$$

Aus dem ersten: $\beta = -\frac{y^3}{b^4}(a^2 - b^2)$

und dem zweiten: $\alpha = \frac{x^3}{a^4}(a^2 - b^2)$.

$$\text{Daraus: } \alpha a = \frac{x^3}{a^3}(a^2 - b^2) \quad \text{und} \quad \beta b = \frac{y^3}{b^3}(a^2 - b^2)$$

$$(\alpha a)^{\frac{2}{3}} = \frac{x^2}{a^2}(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} \qquad (\beta b)^{\frac{2}{3}} = \frac{y^2}{b^2}(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

$$(\alpha a)^{\frac{2}{3}} + (\beta b)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

Nun läßt sich die Mittelpunktsgleichung der Ellipse auch schreiben:

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1, \text{ also } (\alpha a)^{\frac{2}{3}} + (\beta b)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Daraus die Evolutengleichung: $\beta = \pm \frac{\left[(a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}} - (\alpha a)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{b}$.

Diese interessante Curve kann hier nur der genaueren Betrachtung empfohlen werden. Sie enthält den in §. 25 angedeuteten Fall einer senkrechten Tangente im Maximum, denn ihr Differentialquotient $\frac{d\beta}{d\alpha}$ wird für $\alpha = 0$ unendlich. Für $\alpha = \pm \frac{a^2 - b^2}{a}$ wird er $= 0$, also dort (am Krümmungscentrum der Scheitel der großen Ellipsenaxe) wird die Tangente wagrecht, umgekehrt wie bei der Ellipse selbst.

Wird $a = b$, so wird die Evolutengleichung $\beta = \alpha = 0$, d. h. die Evolute des Kreises ist ein Punkt, sein Mittelpunkt.

§. 31. Die Hyperbel. Mittelpunktsgleichung: $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

1) Die Curve breitet sich mit dem wachsenden x aus.

2) Sie ist ebenfalls concav.

3) Asymptoten sind da, denn $p = y - x\frac{dy}{dx} = \frac{a^2y^2 - b^2x^2}{a^2y} = -\frac{b^2}{y}$

$$\text{und } q = x - y\frac{dx}{dy} = \frac{b^2x^2 - a^2y^2}{b^2x} = \frac{a^2}{x}.$$

Setzt man x und also auch $y = \infty$, so werden p und $q = 0$, also gehen die Asymptoten beide durch den

Coordinatenanfang. $\frac{p}{q} = -\frac{b^2x}{a^2y} = -\frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$ *). Wenn darin $x = \infty$ gesetzt wird, so erhält es den Werth $= -\frac{b}{a}$ als trigonometrische Tangente des Asymptotenwinkels. Für $a = b$, die gleichseitige Hyperbel, ist sie $= 1$, also der Winkel $= 45^\circ$.

4) Maxima und Minima fehlen, da $\frac{dy}{dx}$ durch kein x zu 0 werden kann. Am Scheitel ist die Tangente senkrecht, weil für $x = a$ das $\frac{dy}{dx} = \infty$ wird.

5) Der Krümmungsradius $\varrho = \mp\frac{\sqrt{a^4y^2+b^4x^2}}{a^4b^4}$ hat dieselbe Formel wie der der Ellipse, nur daß ihm das andere Verhältniß des y zum x andere Werthe giebt.

6) Die Evolute entspricht ebenfalls der der Ellipse:

$$\beta = \pm\frac{\left[(a\alpha)^{\frac{2}{3}} - (a^2+b^2)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}}{b}.$$

Für $a = b$, die gleichseitige Hyperbel, ist die Evolutengleichung:

$$\beta = \pm\left[\alpha^{\frac{2}{3}} - (2a)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}},$$

auch eine merkwürdige Curve mit Asymptoten.

§. 32. Die Curve des Cassini, auch Lemniskate genannt. Ihr Gesetz ist, daß das Product der Entfernungen jedes Curvenpunktes von 2 befestigten Punkten (wie bei der Ellipse die Summe und bei der Hyperbel die Differenz derselben) eine Constante sei (Fig. X.).

Gleichung: $[(a+x)^2+y^2][(a-x)^2+y^2] = c^4 = (y^2+a^2+x^2)^2 - 4a^2x^2$

oder auch $y^2 = \pm\sqrt{c^4+4a^2x^2} - (a^2+x^2)$

und $\frac{dy}{dx} = \frac{x(a^2-(x^2+y^2))}{y(a^2+(x^2+y^2))}$.

An dieser Curve sind vorerst mehrere charakteristische Fälle zu unterscheiden, je nach der speciellen Annahme der Constanten.

1) $c = 0$ gesetzt, wird $y = \pm\sqrt{\pm 2ax - (a^2+x^2)}$.

Dieß wird für $x = \pm a$ zu 0, in jedem andern Fall imaginär. Es deutet auf zwei Einzelpunkte (Fig. X.) m und n, welche um a zu beiden Seiten vom Coordinatenanfang liegen.

2) c größer als 0, aber kleiner als a, z. B. $c = \frac{a}{2}$, so wird $y = \pm\sqrt{\sqrt{\frac{a^4}{16}+4a^2x^2} - (a^2+x^2)}$.

Man sieht schon, daß hier für $x = 0$ der Werth für y wieder imaginär wird, da $\sqrt{\frac{a^4}{16}} < a^2$, ebenso für kleine Werthe des x, aber für $x = \pm a$ wird $\sqrt{\frac{a^4}{16}+4a^4} = a^2\sqrt{\frac{65}{16}} > 2a^2$, also y reell $\pm$, für größere x, z. B. $x = \pm 2a$, wird $\sqrt{\frac{a^4}{16}+16a^4} = a^2\sqrt{\frac{257}{16}} < 5a^2$, also y wieder imaginär. Die Curve zeigt 2 getrennte Ovale sz und vw.

*) Ehe man hier und in ähnlichen Fällen $x = 0$ oder $= \infty$ setzt, suche man dem Werthe immer eine Form zu geben, die nicht das vieldeutige Resultat $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ zur Folge hat.

3) $c = a$. Die Gleichung wird $y = \pm\sqrt{\pm a\sqrt{a^2 + 4x^2} - (a^2 + x^2)}$.

$x = 0$ macht nun $y = 0$, auch $x = \pm a\sqrt{2}$ macht $y = 0$. Die Curve bildet (odgoeh) eine in Form der Zahl 8 verschlungene Schleife. Dieser Fall führt den Namen der Bernoulli'schen Lemniskate.

4) $c > a$, doch $< \sqrt{2a^2}$, wird besser aus dem Differentialquotienten erkannt.

5) $c = \sqrt{2a^2}$ giebt die Gleichung $y = \pm\sqrt{\pm 2a\sqrt{a^2 + x^2} - (a^2 + x^2)}$.

Für $x = 0$ wird $y = \pm a$, für $x = \pm a\sqrt{3}$ wird $y = 0$, für größere $\pm x$ wird y imaginär, entspricht der ellipsenähnlichen Curve iklh.

Den sechsten und letzten Fall eines noch größeren c wollen wir hier nicht berücksichtigen. Die Curve würde mit dem wachsenden c immer kreisartiger, indem die Grenze für $c = \infty$ allerdings einen Kreis von ∞ Radius zeigte.

Der Differentialquotient $\frac{x}{y}\left(\frac{a^2 - (x^2 + y^2)}{a^2 + (x^2 + y^2)}\right)$ wird im Allgemeinen $= 0$, wenn $a^2 = x^2 + y^2$. Daß das c dabei nicht vorkommt, zeigt, daß diese Regel für alle Formen der Cassini'schen Curve gilt. $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ bedeutet aber die Hypotenuse eines Dreiecks, dessen Katheten die beiden Coordinaten eines beliebigen Punktes im Kreise sind. Die Hypotenuse ist sein Radius. Also ist a (die halbe Excentricität unserer Curve) der constante Radius eines Kreises, welcher an den verschiedenen Formen (Ausnahmen sogleich!) die Punkte trifft, wo die Tangente parallel der Axe läuft; wir fänden, daß es die Maxima sind. Also verbindet ein Kreis aus dem Coordinatenanfang mit dem Radius $= a$ alle Maxima der verschiedenen Curvenformen.

Die Gleichung des Falles 5) wird aber durch diese Annahme $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ nur befriedigt, wenn $y = \pm a$ ist; in diesem Fall aber ist $x = 0$. Also hat Fall 5) sein Maximum und den Berührungspunkt mit jenem Kreis auf der Ordinatenaxe. Bei noch weiteren Curven des Falles 6) streitet die Annahme $a^2 = x^2 + y^2$ begreiflicher Weise mit der Gleichung der Curve. Sie werden von jenem Radius nicht mehr erreicht.

Die Curve des Falles 4) fordert zu ihrem Verständniß die Ableitung eines Differentialquotienten, in welchem c wirklich vorkommt (in dem obigen war c durch die andern Größen vertreten). Dieser Differentialquotient wird geradezu aus der allgemeinen Formel: $y = \pm\sqrt{\sqrt{c^4 + 4a^2x^2} - (a^2 + x^2)}$ abgeleitet und lautet dann, freilich minder einfach als der obige:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{4a^2x}{\sqrt{c^4 + 4a^2x^2}} - 2x}{2\sqrt{\pm\sqrt{c^4 + 4a^2x^2} - (a^2 + x^2)}}.$$

Für $c > a$, wie es der Fall 4) fordert, zeigt sich dieser Differentialquotient durchweg $= 0$, wenn $x = 0$ gesetzt wird, ein Beweis, daß für diesen Fall auch auf der Ordinatenaxe noch Punkte wagrechter Tangenten liegen. Die hier zu weitläufige Aufsuchung des zweiten Differentialquotienten würde uns zeigen, daß alle solche Punkte Minima sind. Fall 4) stellt die Gestalt lpqrtuφv dar. Die ganze Curve mit allen Modificationen findet eine schöne Anwendung in der Theorie der optischen Erscheinungen für zweiaxige Krystalle im polarisirten Lichte *).

Zur leichten Anwendung der in diesem Aufsatze enthaltenen Regeln ist besonders noch die Conchoide und Cissoide, auch die Evolute der Parabel und die der gleichseitigen Hyperbel zu empfehlen. Die Conchoide hat die Gleichung $y^2x^2 = (b + y)^2(a^2 - y^2)$ und die Cissoide die Gleichung $y = \pm\sqrt{\frac{x^3}{2a - x}}$. Ueber Construction und

*) Pouillet, Lehrbuch der Physik, übersetzt von J. Müller, §. 444.

Eigenschaften derselben giebt unter Andern K l ü g e l's alphabetisches Wörterbuch der reinen Mathematik bei den betreffenden Artikeln genügende Auskunft.

Die Gleichung der Parabelevolute oder Neil'schen Parabel wird noch einfacher, wenn man ihren Coordinatenanfang verlegt und statt $\alpha - \frac{a}{2}$, wie in §. 29, 6), jetzt α' schreibt. Sie heißt dann: $\beta^2 = \frac{16\,\alpha'^3}{27\,a}$ und hat ihren Scheitel zum Coordinatenanfang.

§. 33. Es folgen hier noch einige Beispiele, welche zeigen sollen, wie auch außer der Curvenlehre die Differentialrechnung zur Lösung von allerlei Aufgaben geeignet ist.

Welches ist das größte Rechteck, das aus einem Kreis, dessen Radius r gegeben ist, geschnitten werden kann?

Die Basis des Rechtecks sei $= x$, sein Inhalt $= y$, so ist nach einem bekannten geometrischen Satz die Höhe $= \sqrt{4r^2 - x^2}$, also der Inhalt $y = x\sqrt{4r^2 - x^2}$. y ist Function von x. Jede Aenderung der Basis hat eine Aenderung des Inhalts zur Folge. Bis zu einer gewissen Grenze wird z. B. durch das Wachsen der ersteren auch der letztere wachsen, dann aber abnehmen. Sobald also der Zuwachs von y anfängt, negativ zu werden, wird auch der Bruch $\frac{dy}{dx}$ (Zuwachs des Inhalts durch Zuwachs der Basis) negativ, vorher wird er durch 0 gegangen sein und $\frac{dy}{dx} = 0$ giebt uns den Moment vor dem Wiederabnehmen des y oder das Maximum des Inhalts. (Es könnte auch, wenn wir im Dargestellten die Ausdrücke „Wachsen" und „Abnehmen" vertauschen, von einem Minimum die Rede sein. Welches von beiden der Fall ist, läßt sich entweder aus der Natur der Aufgabe erkennen oder führt wiederum das Zeichen des zweiten Differentialquotienten darauf. Denn dieses zeigt uns, indem es angiebt, ob von zwei diesem Momente folgenden Veränderungen die zweite größer ist, als die erste, durch das mit y übereinstimmende Zeichen ein Minimum, im andern Fall ein Maximum an.)

In diesem Fall ist $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} + \sqrt{4r^2 - x^2} = \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$. Dieß wird $= 0$ für ein $x^2 = 2r^2$ oder $x = r\sqrt{2}$. Da nun $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4x\sqrt{4r^2 - x^2} + \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}x}{4r^2 - x^2}$ und der Werth $x^2 = 2r^2$, so verwandelt sich $\frac{d^2y}{dx^2}$ in -4 und wir haben hier ein Maximum, und zwar für $x = r\sqrt{2}$ die Quadratseite. Das größte verlangte Rechteck ist also das Quadrat.

§. 34. Nach angestellten Versuchen verhält sich die Haltbarkeit zweier gleichlangen Balken, d. h. der Widerstand, den beide dem Zerbrochenwerden entgegensetzen, wie das Product aus der Breite und dem Quadrat der Dicke bei beiden. Der stärkste Balken wird also aus einem cylindrischen Baumstamm geschnitten, wenn für das Rechteck, welches den Durchschnitt bildet, die Basis, multiplicirt mit dem Quadrat der Höhe, ein Maximum bildet. x sei die Basis, so ist wie in der vorigen Aufgabe $\sqrt{4r^2 - x^2}$ die Höhe. Die Function $x(4r^2 - x^2)$, die wir wieder y nennen wollen, soll ein Maximum werden: $\frac{dy}{dx} = 4r^2 - 3x^2$. Dieß wird $= 0$ für $x = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. Wird im ersten Drittheil des Durchmessers in n (Fig. VIII.) ein Perpendikel no errichtet und mo gezogen, so ist $mo = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ die verlangte Breite.

§. 35. In welcher Entfernung wird eine kleine senkrechte Fläche am reichlichsten von einem in der Höhe $ln = b$ (Fig. IX.) angebrachten Lichte beleuchtet?

Die Lichtstärke steht in dem umgekehrten Verhältniß zum Quadrat der Entfernung. Andererseits wird eine Fläche um so schlechter beleuchtet, je schiefer die Strahlen auffallen, und zwar wächst die Beleuchtung direct mit dem Cosinus des Einfallswinkels, also mit dem $\sin \alpha$ (Fig. IX.).

Der Beleuchtungsquotient ist also $\frac{\sin\alpha}{\mathrm{H}^2} = \frac{\sin\alpha}{e^2}$. Aber $\alpha = v$ und $\sin v = \frac{x}{e}$. Also der Beleuchtungsquotient $y = \frac{x}{e^3}$. Nun ist $e = \sqrt{b^2 + x^2}$. Also $y = \frac{x}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$. Dieß soll Maximum werden.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}[b^2 - 2x^2]}{(x^2 + b^2)^3}.$$

Für $\frac{dy}{dx} = 0$ wird $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$ *).

§. 36. Wo ist zwischen zwei Lichtern, deren Entfernung $= e$ ist und deren Lichtstärke sich wie a zu b verhält, das Minimum der Beleuchtung? **)

In der Entfernung x wirkt das eine $\frac{a}{x^2}$, das andere $\frac{b}{(e-x)^2}$. Beide $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{(e-x)^2} = y$. Dieß werde Minimum. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2a(e-x)^3 - 2bx^3}{x^3(e-x)^3}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6b(e-x)^2}{(e-x)^6} + \frac{6ax^2}{x^6}$. $\frac{dy}{dx}$ wird 0 für $bx^3 = a(e-x)^3$. Das Zeichen des zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6b}{(e-x)^4} + \frac{6a}{x^4}$ zeigt auf das Minimum, woraus zu sehen, daß der Punkt so liegt, daß sich die Cuben der Abstände verhalten wie die Leuchtkraft der Lichter. Es gewährt dieß ein Mittel, aus der Lage eines solchen Punktes auf das Verhältniß zweier Leuchtkräfte zurückzuschließen.

Wird $a = b$, so ist $x^3 = (e-x)^3$ oder $x = e - x$, d. h. der Punkt der schwächsten Beleuchtung liegt in der Mitte.

---

*) Die beiden letzten Aufgaben werden in Dr. B. Witzschel's Physik, 1854, S. 32 und S. 409, berührt.

**) Aehnliche Aufgaben, besonders auch mehrere aus der Lehre von der Körperberechnung, finden sich in A. Burg's Compendium der höheren Mathematik.

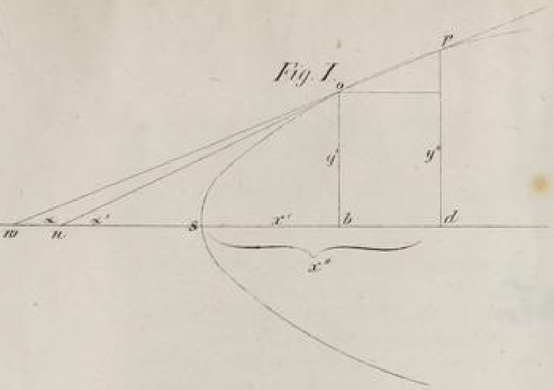

Fig. I.

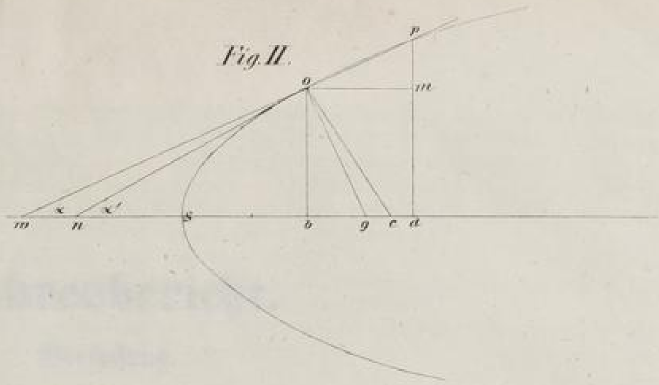

Fig. II.

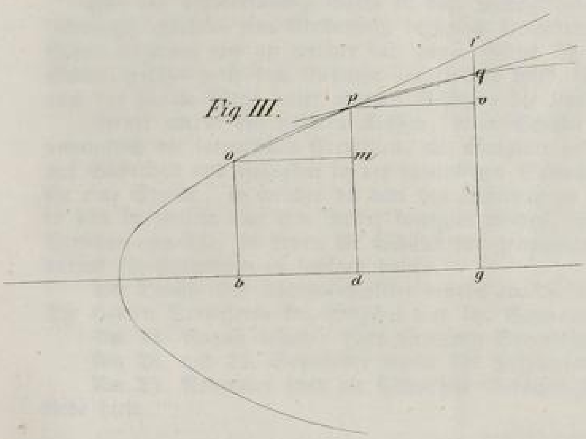

Fig. III.

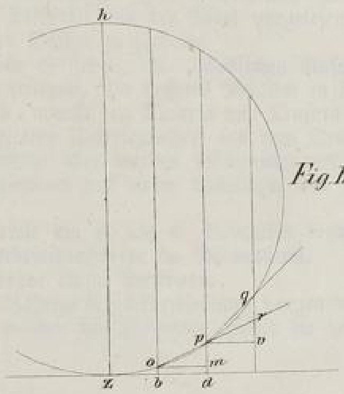

Fig. IV.

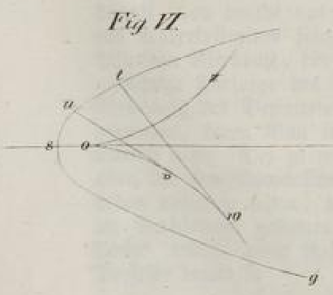

Fig. VI.

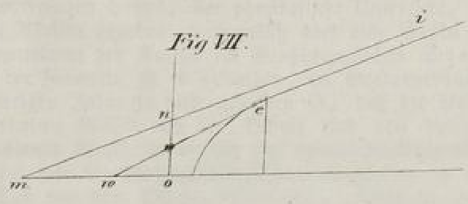

Fig. VII.

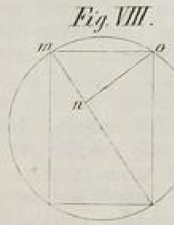

Fig. VIII.

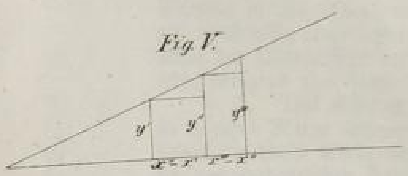

Fig. V.

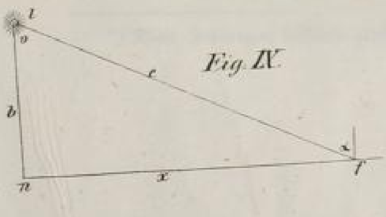

Fig. IX.

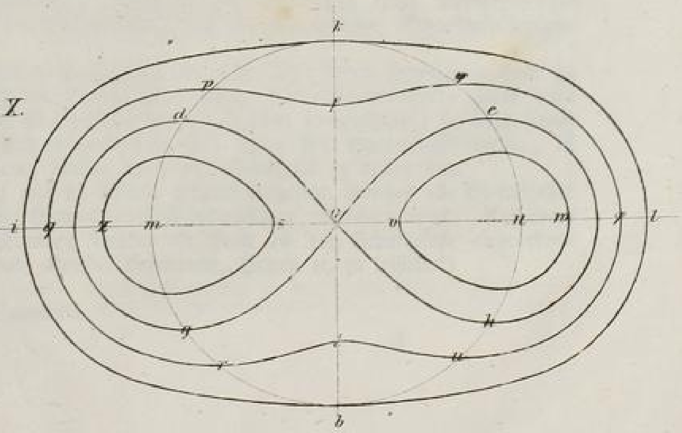

Fig. X.

Jahresbericht.

Verfassung.

In der Lehrverfassung wurde in dem zurückgelegten Schuljahre nichts verändert, nur zwei bestehende Einrichtungen erfuhren eine Aenderung, bezüglich Erweiterung. Bei der Erbauung, mit welcher wir wöchentlich die Schule beginnen und an welcher der ganze Cötus Theil nimmt, wird seit einiger Zeit abwechselnd mit dem Gebete, welches nach dem Gesange vorgetragen wird, ein ausgewählter Abschnitt aus der Bibel vorgelesen, um auch auf diesem Wege unter unseren Schülern die Kenntniß der heiligen Bücher zu fördern.

Ferner um in den unteren Klassen, deren Schüler es am wenigsten verstehen, die häuslichen Aufgaben, namentlich die lateinischen Exercitien, mit Sorgfalt und Nachdenken zu fertigen, ein besseres Resultat in Bezug auf Sicherheit und Festigkeit in der lateinischen Grammatik zu gewinnen, wurde in Quarta und Quinta zwar die eine Stunde, in welcher die von den Schülern zu Hause ausgearbeiteten Uebersetzungen aus dem Deutschen in das Lateinische von dem Lehrer korrigirt werden, beibehalten, außerdem aber wurden wöchentlich noch zwei Stunden angesetzt, in denen die Schüler der genannten Klassen in Gegenwart und unter Anleitung des Ordinarius ein Exercitium zu fertigen haben.

Die Beicht- und Abendmahlsfeier wurde am 28. und 29. Mai, sowie am 8. und 9. November begangen. Die Herren Professoren Dr. Witzschel und Dr. Schwanitz hielten die Vorbereitungsrede im Gymnasium.

Am 14. August besuchte Herr Geheimer Staatsrath von Wintzingerode einige Lectionen.

Am 28. und 29. September wurde das Privatexamen und die halbjährige Censurvertheilung vorgenommen.

Am 25. November fand die Elmpt'sche Gedächtnißfeier Statt, bei welcher der Primaner Heller die deutsche Rede hielt.

Einer wesentlichen Verbesserung steht das Gymnasium mit dem Beginne des nächsten Schuljahres entgegen. Längst schon wurde das Bedürfniß nach einigen Lokalitäten im Gymnasialgebäude lebhaft empfunden, in denen das Lehrerkollegium seine Konferenzen halten, der physikalische Unterricht, unterstützt von dem daselbst aufzustellenden Apparate, für alle Klassen gegeben, namentlich aber eine Sexta errichtet werden könnte. Durch die umsichtige Fürsorge des Departement des Kultus im Großherzoglichen Staatsministerium und die wohlwollende Förderung des Departement der Finanzen ist es gelungen, im Vordergebäude drei trefflich gelegene Räume zu gewinnen, deren Bau im vorigen Jahre so weit gediehen ist, daß die Vollendung in der nächsten Zeit zu erwarten steht. Der zu wiederholten Malen von der Schule und von hiesigen Aeltern ausgesprochene Wunsch aber, die dem Gymnasium fehlende Klasse, in welcher der lateinische Unterricht begonnen werden könnte, in das Leben treten zu sehen, hat bei dem Großherzoglichen Staatsministerium so weit Berücksichtigung gefunden, als die Verhältnisse gestatten. Der von dem Direktor eingereichte „Entwurf zur Errichtung einer Vorbereitungsklasse" erhielt durch Rescript vom 4. Januar d. J. die Genehmigung des Großherzoglichen Staatsministerium. Derselbe lautet so:

> §. 1. Zu Ostern 1855 tritt eine Vorbereitungsklasse für das Karl Friedrichs-Gymnasium zu Eisenach in das Leben, welche Knaben für die Quinta vorbereitet. Die Staatsbehörde giebt dazu ein vollständig eingerichtetes Lehrzimmer im Gymnasialgebäude und Holz zur Heizung; sie steht ferner unter der Oberaufsicht des Großherzogl. Staatsministerium und unter der Gymnasialdirektion, ist aber übrigens eine bloße Privatanstalt, deren Kosten durch das Schulgeld zu decken sind.
>
> §. 2. Das Schulgeld wird vorläufig auf 15 Thaler jährlich angesetzt, welches alle Vierteljahre in gleichen Raten praenumerando an die Gymnasial-Kasseverwaltung entrichtet wird. Außerdem haben die dieser Vorbereitungsklasse angehörenden Knaben die Seite 16 der Schulgesetze angeordneten außerordentlichen Zahlungen für Kehren, Kreide, Schwamm, Heizen 2c. zu leisten.*)

*) Diese Zahlungen bestehen gewöhnlich in 1 Neugroschen monatlich.

§. 3. Die Anmeldungen zur Aufnahme erfolgen bei der Gymnasialdirektion an einem von dieser durch öffentliche Bekanntmachung festzusetzenden Termine. Da der Lehrkursus einjährig ist, so können diese Ameldungen in der Regel nur zu Ostern geschehen.

§. 4. Die angemeldeten Knaben haben vor ihrer schriftlichen und mündlichen Prüfung einen Impfschein und ein schriftliches Zeugniß über folgende Leistungen beizubringen:

1) geläufiges Lesen deutscher Druckschrift,
2) einige Fertigkeit, etwas Dictirtes leserlich und reinlich nachzuschreiben, sowie einige Uebung in der Orthographie,
3) Lesen und Schreiben der Zahlen im Umfange von 1 bis 1000, und schriftliche Lösung von Divisionsaufgaben in unbenannten Zahlen mit einem einstelligen Divisor.

Endlich darf der Aufzunehmende in der Regel nicht unter dem achten Lebensjahre stehen.

§. 5. Bei der Aufnahme erhalten die Knaben zwei Exemplare der Schulgesetze und ein Censurbuch, wofür sie die durch die Schulgesetze Seite 15 angeordnete Gebühr zahlen.*) Sie sind daher den Gesetzen und Anordnungen des Gymnasiums eben so unterworfen, wie die Schüler der eigentlichen Gymnasialklassen.

§. 6. Die Aeltern oder Vormünder der aufgenommenen Knaben verpflichten sich zur Leistung des festgestellten Schulgeldes auf das ganze Jahr des Lehr-Kursus.

§. 7. Dieser einjährige Lehr-Kursus steht im organischen Zusammenhange mit dem Lehrplane des Gymnasiums. Die Lehrgegenstände sind folgende:

1) Lateinisch, wöchentlich 8 Stunden,
2) Deutsch, „ 4 „
3) Biblische Geschichte zunächst nur des alten Testamentes, verbunden mit einzelnen Liederversen aus dem Gesangbuche und einzelnen ausgewählten Bibelstellen, dabei geeignete Erläuterung des „Vater unser" und der vier ersten Gebote, Alles zur Belebung des sittlich-religiösen Gefühls ohne eigentlichen positiven Religionsunterricht, wöchentlich 2 Stunden,
4) Naturkunde durch Anschauung begründet und hinleitend zu der im Winterhalbjahre vorzunehmenden Elementargeographie, wöchentlich 2 Stunden,
5) Rechnen, wöchentlich 4 Stunden,
6) Schönschreiben, dgl.
7) Gesangunterricht, wöchentlich 1 Stunde.

§. 8. Die nach Vollendung des einjährigen Lehrkursus zum Eintritte in die Quinta reif befundenen Knaben zahlen bei dem Uebergange in die Quinta die Seite 15 der Schulgesetze festgesetzten Gebühren für die Aufnahme und für die Bibliothek.

Bereits ist der Hauptlehrer dieser Vorbereitungsklasse gewonnen. Es ist Herr Dr. Meister von hier, ein Zögling des Gymnasiums, der in Jena und Leipzig Philologie studirt hat und längere Zeit am Stoy'schen Institut als Lehrer thätig gewesen ist.

Das Großherzogliche Staatsministerium hat unter dem 23. Januar d. J. in Nr. 29 des Eisenacher Kreis-Blattes bekannt gemacht, daß mit Ostern d. J. diese Vorbereitungsklasse ins Leben treten wird.

Rescripte des Großherzoglichen Staatsministerium, Departement der Justiz und des Kultus.

Vom 31. Mai 1854: Nachdem die Direktion die gutachtlichen Anträge des Lehrer-Kollegium über Vertheilung der Calmberg'schen Stipendien berichtlich vorgelegt hatte, daß nämlich das Stiftungskapital auf 3000 Thaler und dadurch der Betrag der Zinsen jährlich auf 120 Thaler erhöht, diese Summe zu gleichen Theilen für Prima und Sekunda verwendet und dem Lehrer-Kollegium gestattet werden möge, je nach dem Bedürfnisse in jeder der beiden Klassen entweder drei Stipendien zu 20 Thaler oder zwei zu 30 Thaler vorzuschlagen, endlich daß jährlich als Termin der Vertheilung der 18. Oktober als der Stiftungstag der Schule festgesetzt werde, genehmigt das Staatsministerium die gethanen Vorschläge mit dem Bemerken, daß eine Beschränkung des Stipendiengenusses auf Schüler, die studiren wollen, nach der Stiftung nicht vorliege und daß es nicht statthaft erscheine, den hälftigen Stipendienbetrag zu Gunsten des Stipendiaten bis zu dessen Abgang bei der Sparkasse zinstragend anzulegen. — **Vom 21. Juni:** Die Direktion wird davon in Kenntniß gesetzt, daß, um die Stif-

*) Diese Verpflichtung trifft alle Schüler. Das eine Exemplar der Gesetze ist für das älterliche Haus, das andere für den Schüler selbst bestimmt. Die Gebühr für diese zwei Exemplare und das Censurbuch beträgt 8 Neugroschen.

tungszinsen jährlich auf 120 Thaler zu erhöhen, die Kassenverwaltung angewiesen worden sei, von den zunächst eingehenden Zinsen vorläufig 26 Thaler gegen dreiprocentige Zinsen bei der Sparkasse anzulegen, so daß zu Michaelis des laufenden Jahres nur der Rest der inzwischen fällig werdenden Zinsen zu vertheilen ist.

Vom 9. Juli: Die Direktion wird angewiesen, diejenigen Schüler, die Medicin studiren wollen, auf die in Abschrift beigelegte und Nr. 24 des Regierungs-Blattes in Druck gegebene Ministerial-Bekanntmachung, namentlich auf §. 3 aufmerksam zu machen.

Vom 19. Juli: Der Direktion wird auf ihre Anfrage eröffnet, daß an der Vorschrift, wonach die der Medicin sich widmen wollenden Abiturienten aus dem Großherzogthum das Maturitäts-Examen bei einem der humanistischen Gymnasien des Landes zu bestehen haben, nichts geändert worden ist.

Vom 12. und 18. August, 12. und 25. September: Die von der Direktion aufgesetzte Dienstvorschrift und Zusammenstellung des Einkommens des Einheizers bei dem Karl Friedrichs-Gymnasium erhält Bestätigung und die Direktion wird angewiesen, die eidliche Verpflichtung in der gesetzlichen Form vorzunehmen und hierauf das Verpflichtungsprotokoll vorzulegen.

Vom 28. September: Die Direktion wird benachrichtigt, daß Diejenigen, welche bei einem der beiden Landes-Gymnasien die Abgangsprüfung zu bestehen haben und angewiesen werden, wegen einzelner Lehrgegenstände, z. B. des Hebräischen, später einer besondern Nachprüfung sich zu unterwerfen, an die eine solche Prüfung abhaltenden Lehrer zusammen 1 Thlr. 16 Sgr. zu entrichten haben.

Vom 18. Januar 1855: Unter Beifügung einer Abschrift eines an die Gymnasialdirektion in Weimar erlassenen Rescriptes über Erhöhung des Schulgeldes mit Beginn des nächsten Schuljahres wird die Direktion angewiesen, sich berichtlich vernehmen zu lassen, ob, da es im Allgemeinen angemessen erscheine, das Schulgeld für alle Klassen gleichmäßig zu bestimmen, besondere Gründe vorhanden seien, von dem angedeuteten Grundsatze abzuweichen und eine Abstufung des Schulgeldes nach Klassen oder Klassengruppen zu befürworten.

Vom 8. Februar: In Betreff der Vorbildung der dem Baufache sich Widmenden bleibt es bei der in der Ministerial-Bekanntmachung vom 6. Mai 1853 (s. Regierungs-Blatt Nr. 15. 1853) getroffenen Bestimmung.

Vom 6. März: Vom Beginne des nächsten Schuljahres an (also von Ostern dieses Jahres an) beträgt das jährliche Schulgeld für Prima und Secunda je 16 thlr., für Tertia uns Quarta je 12 thlr., für Quinta vorläufig 10 thlr.

Turnübungen.

Da es seit 2 Jahren nicht möglich war, einen geeigneten Turnlehrer zu gewinnen, wurden Geldbeiträge von den Schülern nicht erhoben. Freiwillige Geschenke von je einem Thaler gaben im Sommer 1853 die Primaner von Bielke und Wer, so daß der Kassevorrath auf 12 Thlr. 18 Sgr. 6 Pf. stieg. Für Reparaturen und Instandhaltung des Platzes wurden im Jahre 1853 und 1854 zusammen 2 Thlr. 20 Sgr. ausgegeben, so daß noch 9 Thlr. 18 Sgr. 6 Pf. in Kasse sind.

Wenn nun gleich die regelmäßigen Turnübungen in den beiden genannten Jahren ausfallen mußten, so benutzten doch mehrere Schüler den Platz und die Geräthschaften recht fleißig, um unter sich angemessene Körperübungen vorzunehmen.

Unterstützung einzelner Schüler.

Das Uber'sche Stipendium wurde durch Ministerialrescript vom 6. April 1854 dem Quartaner Hermann Handschuhmacher zuertheilt.

Der Rest der halbjährigen Zinsen des Calmberg'schen Stipendium im Betrag von 23 Thlr. 19 Sgr. wurde nach Rescript vom 17. Oktober zu gleichen Theilen unter Arno Siefert in Prima und August Rink in Sekunda vertheilt.

Die Elmpt'schen Stiftungsgelder erhielten nach Rescript vom 6. Nov. August Heller in Prima, Christian Hoffommer in Sekunda, Otto Heym in Tertia.

Die kalligraphischen Prämien bekamen die Quartaner August Weihrich und Tankmar Krause und die Quintaner Karl Harnisch und Max Menneken nach erfolgter Genehmigung durch Resc. v. 13. Febr. 1855.

Das Brotstipendium genossen auch in diesem Jahre die Gymnasiasten Heller, Hoffommer, Leinhos und Sesemann.

Schulgelderlaß wurde gewährt: dem Tertianer Louis Kleinicke, der durch Krankheit häufig vom Schulbesuche abgehalten worden war, für die beiden letzten Quartale des Jahres, durch Rescript vom 28. November 1854, und dem Oberprimaner Heller für das ganze Schuljahr durch Rescript vom 28. Februar 1855.

Anmerkung. Die Fürstlichen Stipendien und die Zinsen des Görwitz'schen Legates kommen am 1. April dieses Jahres zur Vertheilung.

Lehrapparat.

Der Gnade Ihrer Kaiserlichen Hoheit, der Frau Großherzogin Großfürstin verdankt das Gymnasium: Plinii hist. nat. ed. Sillig vol. IV., 25. 32 bis 34. Publikation des liter. Vereins zu Stuttgart, Joh. Seb. Bach's Werke 4. Jahrg., und der Nibelungen Ende, Kupferstich nach Schnorr.

Durch die Großherzogl. Sächs. geheime Staatskanzlei wurde zu Folge hohen Befehls übersendet: Monumenta German. histor. ed. Pertz. tom. XIII.

Andere Geschenke waren: Abhandlungen der philosoph.-philolog. Classe der Königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften Bd. VII., Abth. 2.; durch die Brockhaus'sche Buchhandlung von dem (ungenannten) Herausgeber: aus dem Leben von Johann Dieterich Gries; vom Herrn Professor Dr. Weißenborn: der zweite und dritte Band seiner in der Weidmann'schen Buchhandlung erschienenen Ausgabe des Livius, und Horatii Epistolae ed. Obbar. et Schmid. Fasc. 1 bis 4; vom Herrn Professor Dr. Rein: Wer zur Geschichte der Schweriner Gelehrtenschule; durch denselben aus der Bibliothek des verstorbenen Herrn Vice-Präsident Dr. Nebe: Horatius ed. Baxter.-Gesner.-Zeune, Horat. ed. Iani tom. I., Creuzer Symbolik und Mythologie Bd. 1. 3. 4., Suhm symbolae ad literaturam teutonicam antiquiorem, Edda rhythmica seu antiquior, vulgo Saemundina dicta, Hafn. 1787, Paullini rerum et antiquit. Germanic. syntagma, Olearii rerum Thuring. syntagma, Sächs. Merkwürdigkeiten, Casp. Sagittarii antiquitates Ducatus Thuring., Laurentii origines Doring., monimenta Hassiaca von Schmincke, Sachsen-Coburgische Historia vom Jahre 1700, die von Juncker herausgegebenen auf die Wartburg, Stadt und Fürstenthum Eisenach sich beziehenden Schriften, Limberg's lebendes und schwebendes Eisenach, Schumacher's Merkwürdigkeiten der Stadt Eisenach und ihres Bezirks, Ioh. Mich. Heusingeri opuscula minora ed. Töpfer, und noch einige kleinere deutsche, sächsische und besonders thüring. Geschichte enthaltende Bücher, endlich fünf große Mappen mit einer bedeutenden Anzahl größtentheils sehr werthvoller und interessanter Portraits von Fürsten, Feldherren, Staatsmännern Gelehrten, Dichtern 2c.

Endlich schenkten mehrere Primaner bei ihrem Abgange Bücher an die Bibliothek: nämlich Albert Göring: freundliche Erinnerung an Holland und seine Bewohner von Dethmar in drei Theilen, Karl Döbner: Napoleon in der Verbannung von O'meara, zwei Bände, Ferdinand v. Helldorff: Byrons sämmtliche Werke von Adolf Böttger in zwölf Bänden.

Aus dem Etat der Bibliothek wurde Folgendes angeschafft: Ciceronis opera ed. Orell. II, 1, Mommsen röm. Geschichte 1. Bd., Preller griech. Mythologie zwei Bände, Becker Charikles neue Bearbeitung drei Bände, Gräfenhan Geschichte der klassischen Philologie drei Bände, Stier Gesch. von Pompeji, J. und W. Grimm deutsches Wörterbuch I, 8, II, 1 und 2, Holtzmann Untersuchungen über das Nibelungenlied, Raumer Geschichte der Pädagogik 4. Bd., Graul Reise nach Ostindien drei Bände, Gfrörer Gustav Adolph von Schweden, Hagen des Landgrafen Ludwig des Frommen Kreuzfahrt, Wegele Annales Reinhardsbr., Zeitschrift für thüring. Geschichte 1. Bd., Simon Ludwig der Heilige 2c., Möller Reinhardsbrunn, Lepsius kleine Schriften 1 Bd., Schlönbach der letzte König von Thüringen, Fichte Reden an die deutsche Nation, Gutzkow dramat. Werke VIII., 1. Abtheil., v. Aufseß Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit 1853 und 1854, Berliner Zeitschrift für das Gymnasialwesen 1854, Rhein. Museum für Philologie 9. Bd., Jahn's Jahrb. der Philologie und Pädagogik, litter. Centralblatt und Zeitschrift für d. Alterthumsw. Jahrg. 1854, (die letzten drei Zeitschriften von einem Leseverein angekauft).

Für die Schülerbibliothek: Anderson Weltumsegelung, Falkenstein Geschichte der geograph. Entdeckungsreisen, Walter von Aquitanien, Körner unser Vaterland I. Bd., Meyer Volksbibliothek 3. 4. 5. 6. 7. 9. 15. Bändch.

Für den Gesangunterricht: 50 zweistimmige Chor-Solfeggien von Bertalotti, Partitur und Stimmen (gedruckte Noten).

Für die mathematisch-physikalische Bibliothek: Schlömilch Geometrie, zwei Bände, Naumann Lehrbuch der Geognosie Bd. 2. Abth. 3.

Von dem Reste des Görwitz'schen Legates (s. Programm v. J. 1854 Seite 19) wurde angeschafft: eine galvanische Batterie von zwölf Bunsen'schen Zinkkohlenelementen nebst dem Zubehör zur Versinnlichung der hauptsächlichsten galvanischen und electro-magnetischen Erscheinungen. Daraus hat der Lehrer der Mathematik und Physik bis jetzt hergestellt: Modell eines Zeigertelegraphen, eines Rotationsapparates und einer Vorrichtung zur Wasserzersetzung.

An Geschenken erhielt die mathematisch-physikalische Bibliothek: vom Herrn Dr. Witzschel in Dresden sein Buch: die Physik faßlich dargestellt nach ihrem neuesten Standpunkte; von der Mittler'schen Verlagsbuchhandlung in Posen: Spiller Grundriß der Physik.

Ferner für die naturhistorischen Sammlungen vom Herrn Eisenbahn-Ingenieur Kleinicke ein schönes Exemplar eines Fischabdruckes in Kohlenschiefer. Endlich schenkten mehrere Quintaner Schädel einiger Säugethiere und der Quartaner v. Egloffstein ein kleines Wiesel (mustela vulgaris).

Statistisches.*)

Wie am Schlusse des Osterprogrammes von 1853 bemerkt worden ist, wurde das Schuljahr 18$\frac{53}{54}$ mit 83 Schülern begonnen. Davon gingen während des Sommerhalbjahres ab: 1) Hermann Wer aus Prima, auf die Thomasschule in Leipzig, Anfang Juli; 2) Ferdinand Weitemeyer aus Secunda, zu derselben Zeit; 3) Arthur Glock, der versuchsweise in die Secunda aufgenommen worden war, zu Michaelis; 4) Oskar Göring aus Tertia, Ende Mai; 5) Armin Brückner aus Tertia, Anfang August, um sein vaterländisches Gymnasium in Meiningen zu besuchen; 6) Friedrich Schmidt aus Quarta, im September, um sich einem technischen Fache zu widmen; 7) Cäsar Kästner aus Quinta, um eine Bürgerschule zu besuchen. Endlich hat der Quartaner Karl Habbicht das Gymnasium auf unbestimmte Zeit verlassen, um sich einer orthopädischen Kur zu unterwerfen.

Am 8. Oktober traten ein: Albert Göring in die obere, Guido Thon in die untere Secunda, Thankmar Krause in Quinta.

So bestand der Cötus bei dem Beginne des Winterhalbjahres aus 78 Schülern, wovon 8 der Prima, 16 der Secunda, 21 der Tertia, 19 der Quarta, 14 der Quinta angehörten.

Davon schieden aus: 1) Eduard Zappe aus Quinta im November bei dem Umzuge der Seinigen nach Hannover; 2) Wilhelm Salzmann aus Tertia zu Weihnachten, um Gärtner zu werden; 3) Christoph Trautvetter aus Quarta Anfang März, um sich der Landwirthschaft zu widmen; 4) Louis Victor aus Tertia Ende März, um als Kurhesse auf ein vaterländisches Gymnasium überzugehen; 5) Karl Schmidt aus der unteren Prima; 6) Friedrich Schmidt aus Tertia bei dem Umzuge der Ihrigen nach Weimar; 7) Victor Liebe, bei der Oster-Translokation eben nach Prima versetzt, nach Berlin zu den Seinigen, um auf einem dortigen Gymnasium seine Vorstudien zu vollenden; 8) Hugo Schultze aus der unteren Secunda auf das hiesige Realgymnasium.

Auf die Universität wurden zu Ostern 1854 drei Oberprimaner entlassen, nämlich:

Karl von Bielke aus Weimar, ein Jüngling von großem Fleiße und wissenschaftlichem Interesse, dessen Studium noch ungewiß war, Censur der Sitten und wissenschaftliche I.

Robert Völker aus Geisa, um die Rechte zu studiren, Censur der Sitten und wissenschaftliche III.

Julius Weber aus Völkershausen, um Medicin zu studiren, Censur der Sitten III., wissenschaftliche etwas mehr als III.

So blieben am Schlusse des Schuljahres 67 Schüler.

Dagegen wurden am 22. April 1854 wieder 14 Schüler aufgenommen, nämlich Edmund Deussing in Secunda, Franz Höber, Ferdinand Anhalt und Konstantin Friderici in Tertia, August Weihrich in Quarta, Karl Harnisch, Max Menneken, Karl Scheidemantel, Max Mihm, Theodor Schorcht, Julius Schmidt, Paul Trautvetter und Wilhelm Schmidt in Quinta.

Demnach wurde das Schuljahr 18$\frac{54}{55}$ mit 81 Schülern eröffnet, von denen 12 der Prima, 15 der Secunda, 21 der Tertia, 18 der Quarta, 15 der Quinta angehörten.

Dazu kam noch zu Johannis Berthold Meier Kaiser, der in Quinta eintrat, dagegen ging zu derselben Zeit aus Tertia Heinrich Schüler ab. Während der großen Ferien am 20. Juli ertrank beim Baden der Oberprimaner Christian Brannau von hier, ein ernster, fleißiger und strebsamer Jüngling, der sich gut zu entwickeln begonnen hatte und dem Abgange auf die Universität, wo er Theologie studiren wollte, so nahe war. Möge eine so furchtbar ernste Mahnung für unsere Schüler nicht verloren sein!

Ferner verließen die Schule: Albert Göring aus Prima, Karl Göring aus Quarta, im August, wo sie mit den Ihrigen nach Berlin zurückkehrten; zu Michaelis August Briegleb und Oskar Müller aus Tertia, ersterer, um auf das Realgymnasium überzugehen, letzterer, um Pharmaceut zu werden; Karl Döbner aus Unter-Prima, um sich zum Postfache vorzubereiten, Richard Grebner aus Ober-Secunda, um sich dem Rechnungswesen zu widmen; zu Anfang des Februar 1855 der Oberprimaner Ferdinand v. Helldorff, um als Preuße das Maturitätsexamen an einem vaterländischen Gymnasium zu bestehen; Anfang März Julius Zipfel aus Tertia, welcher ebenfalls zum Rechnungswesen sich vorbereiten will.

Bis jetzt ist endlich noch angemeldet der Abgang Gustav Gerlach's aus Tertia, welcher Oekonom werden will.

Auf die Universität werden jetzt nach vollendetem Schul-Kursus entlassen:

August Friedrich Heller, um Theologie } zu studiren.
Fritz Liborius v. Steuben, um die Rechte }

Beide erhielten die wissenschaftliche Censur: noch nicht 2, und die erste sittliche.

Anmerkung: Außerdem bestand vor dem Lehrer-Kollegium die Maturitätsprüfung: Anton Kiel aus Geisa, welcher das Gymnasium in Fulda besucht hatte. Er erhielt die dritte wissenschaftliche Censur: zureichend vorbereitet.

*) Durch ein Versehen sind im vorjährigen Programme diese Notizen nicht abgedruckt worden.

Schulfeierlichkeiten.

Oeffentliche Hauptprüfung aller Klassen verbunden mit Recitation und Gesangprobe.

Mittwoch, am 28. März

Vormittags von 8 bis um 11 Uhr:

in Prima u. Secunda: Neutestamentliche Exegese,
in Prima: Horatius,
Französisch.
in Secunda: Homeri Ilias,
Alte Geschichte.

Nachmittags um 2 Uhr:

Der Abiturient Heller trägt sein lateinisches Gedicht vor über die Worte: marcet sine adversario virtus,
der Abiturient von Steuben sein deutsches Gedicht: Der Scheideweg,

aus Secunda: Thon aus Cicero's Rede für Milo §. 53 bis zum Schlusse des 31. Kapitels,
Otto Schmidt: mort de Jeanne d'Arc von Casimir Delavigne,
aus Tertia: Degenring: Ovid. Metamorph. VII., 100—148,
Trunk: l'histoire von Victor Hugo,
aus Quarta: Weihrich: die Eichensaat von Simrock,
Kohl: das Almosen von Hagenbach,
aus Quinta: Harnisch: der Wittwe Haus zu Eisenach von Hagenbach,
Menneken: die zwei Tannen von Lamey.

Dazwischen wird der Gesanglehrer von den Schülern mehrere Lieder unter Begleitung des Pianoforte vortragen lassen.

Donnerstag, den 29. März

Vormittags von 8 bis um 11 Uhr:

in Quarta: Religion,
Geographie.
in Tertia: Xenoph. Anabasis,
Curtius,
Geschichte.

Nachmittags von 2 bis 5 Uhr:

in Quarta: Griechisch,
Rechnen.
in Quinta: Lateinisch,
Geographie,
Naturkunde.

Schluß des Schuljahres am 31. März nach erfolgter Censurvertheilung.

Die Prüfung der zur Aufnahme Angemeldeten beginnt am 13. April um 8 Uhr des Morgens. Der neue Lehr-Kursus nimmt am 16. April seinen Anfang.

Eisenach am 21. März 1855.

Dr. Funkhänel.