25.—

I

Prolegomena
zu einer Philosophie der
Mathematik.
Der Streit um die Grundlagen
der Analysis

von

E. Study.

S349
MATHEMATISCHES INSTITUT
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT
GIESSEN

... So wird schließlich Alles in das Bereich der Psychologie hineingezogen; die Grenze zwischen Objektivem und Subjektiven verschwindet mehr und mehr, und selbst wirkliche Gegenstände werden als Vorstellungen psychologisch behandelt. ... So mündet denn Alles in den Idealismus und bei größter Folgerichtigkeit in den Solipsismus ein. Wenn jeder mit dem Namen "Mond" etwas Anderes bezeichnete, nämlich eine seiner Vorstellungen, etwa so, wie er mit dem Ausrufe "au!" seinen Schmerz äußerte, so wäre freilich die psychologische Betrachtungsweise gerechtfertigt; aber ein Streit über die Eigenschaften des Mondes wäre gegenstandslos.

(F r e g e)

Die Mathematik besteht aus lauter absoluten Wahrheiten. Nichts davon haben wir in der Gewalt ... Unsere Kenntnis davon ist etwas ganz anderes.

(Aus einer Rezension des Verfassers.)

Erworben aus dem Nachlass von
Dr. Egon Ullrich

Inhalt.

Erster Teil:

Philosophie und Mathematik.

MATHEMATISCHES INSTITUT
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT
GIESSEN

I. Einleitung 1

II. Der Psychologismus und die Verfälschung des Wahrheitsbegriffs in der idealistischen Philosophie 10

III. Intuitionismus und Phänomenologie 28

IV. Der Existenzbegriff der Mathematik 39

V. Weitere Erläuterung des mathematischen Existenzbegriffs.
Der Intuitionismus K a n t's 57

VI. Das Erkennen mathematischer Wahrheiten 75

VII. Der psychologistische Einwand.
Willkürliches in der Mathematik 82

VIII. Das Nichts und die Null.
Die rationalen, negativen und G a u s s'schen Zahlen 92

IX. Die reellen irrationalen Zahlen und die gemeinen komplexen Zahlen 111

X. Das natürliche Kontinuum und seine einfachsten Erweiterungen 121

XI. Das Kontinuum einer komplexen Veränderlichen 137

XII. Die natürlichen Zahlen als Wurzel und letzthin einziger Gegenstand der Mathematik 159

XIII. Erläuterungen von Einzelheiten 176

XIV. Die systematische Stellung der Elementargeometrie und der Nicht-Euklidischen Geometrie. Schluß.

III

Inhalt.

Erster Teil.

Philosophie und Mathematik.

I. Einleitung 1

II. Der Psychologismus und die Verflechtung der Mathematik mit der Philosophie in der idealistischen Philosophie 10

III. Definitionismus und Phänomenologie 18

IV. Der Existenzbegriff der Mathematik 34

V. Letztes Aufdecken der mathematischen Existenzbegriffe.

Der intuitionistische Standpunkt 52

VI. Das Schaffen mathematischer Wahrheiten 75

VII. Der psychologistische Standpunkt.

Willkürlichkeit in der Mathematik 81

VIII. Das Dichte und die Zahl.

Die rationalen, negativen und irrationalen Zahlen 95

IX. Die reellen transfiniten Zahlen und die Gesetzen derselben Folgen 111

X. Die metrische Kontinuum und seine einfachsten Erweiterungen 121

XI. Das Kontinuum als komplexen Verbindungen 132

XII. Die natürlichen Zahlen als Zweck und letztlich einziger Gegenstand der Mathematik 154

XIII. Erläuterungen von Einzelheiten 170

XIV. Die systematische Teilung der Elementargebiete und der Nicht-Euklidischen Geometrie.

Zweiter Teil:

Die Mathematik der Gespensterfurcht und der Polizeiverbote

Eine Erinnerung als Vorwort .....

XV. Der mathematische Intuitionismus (B r o u w e r und W e y l) 1

XVI. Das werdende Kontinuum und andere Entgleisungen 12

XVII. Der Finitismus und die konstruktive Mathematik K r o n e c k e r's 19

XVIII. Die mengentheoretischen Paradoxien ..... 28.

XIX. Das sogenannte Entscheidungsproblem und das indirekte Beweisverfahren 46

XX. Die angebliche Sinnlosigkeit von Existentialsätzen .....

Zusammenfassung. 58

~~XXI. Die angebliche Sinnlosigkeit von Existentialsätzen ..... 66~~

XXI. Die Mathematik H i l b e r t s 66

XXII. Die ontologische Mathematik O. B e c k e r s 77

Auswahl aus der Literatur, besonders - von A - K - paginiert .....

Namenverzeichnis .....

Sachverzeichnis .....

Anhang: Ungeordnete Manuscriptblätter.

Zweiter Teil:

Die Mathematik der Gegenwartkunst und der

Folgeverfolgte.....

Eine Erinnerung als Vorwort .....

XV. Der mathematische Intuitionismus

(B r o u w e r und H e y t).....

XVI. Der werdende Kontinuum und andere Betrachtungen .....

XVII. Der Finitismus und die konstruktive Mathematik

H i l b e r t's .....

XVIII. Die zeitgenössischen Paradoxien .....

XIX. Das Entscheidungsproblem und das Individuelle

Gesetzmäßigkeiten .....

XX. Die eingeschränkte Einfachheit von Existential-

sätzen .....

Zusammenfassung.

~~XXI. Die eingeschränkte Einfachheit von Existential-~~

~~sätzen~~.....

XXII. Die Mathematik H i l b e r t s .....

XXIII. Die ontologische Mathematik C. B o o k e r s .....

Anhang: Ungereimtes Manuscriptblättern.

Dr. Egon Ullrich

I.

Einleitung.

(Zugleich als Vorwort.)

Der grimme Streit um die Grundlagen der Mathematik, der schon einmal aufzuflackern drohte und nun wirklich entbrannt ist, wird endgültig wohl nicht als ein Titanenkampf betrachtet werden - eher wohl als ein Froschmausekrieg. Indessen ist das eigentliche Streitobjekt nichts Geringeres als der Wahrheitsbegriff, mit dem man es ganz gewiss nicht leicht nehmen darf.

Schon seit dem Altertum ist der Begriff der Wahrheit, wie ihn der Gebrauch des täglichen Lebens kennt, ohne den kein sinnvolles Denken und keine vernünftige Handlung möglich ist, immer wieder Angriffen ausgesetzt gewesen, die im Namen dieser oder jener sogenannten Philosophie erfolgt sind. Πάντων χρημάτων μέτρον ὁ ἄνθρωπος. Ins Moderne übertragen etwa: Aller Dinge Maass ist der Zeitungsschreiber. Die anthropozentrische Weltansicht, die man längst für überwunden halten durfte, erhebt in der Gegenwart wiederum ihr Haupt, vielfach tritt sie sogar als ausgesprochene Mystik auf den Plan und so soll nun auch dem Wahrheitsbegriff, der objektivsten aller Wissenschaften, dem Wahrheitsbegriff der Mathematik, der durch mehr als zweitausend Jahre unerschüttert gestanden hatte, der Garaus gemacht werden.

Die Mathematiker freilich sind über derartiges schon einmal zur Tagesordnung übergegangen, und wenn nicht alles trügt, werden sie es schließlich auch diesmal tun. Immerhin sieht es so aus, als ob eine ziemliche Verwirrung zu entstehen im Begriff, ja schon entstanden wäre. Wie ich mich leider habe überzeugen müssen, finden unüberlegte Zerstörungspläne, wenigstens in

MATHEMATISCHES INSTITUT
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT
GIESSEN

I.

Einleitung.

(Zugleich als Vorwort.)

Deutschland, bei der jüngeren Generation vielen Beifall. Die Jugend ist eben, was sie immer war, novarum rerum cupida. Dazu hat die offizielle Kritik, die sich auch sonst nicht immer mit Ruhm bedeckt, nach meiner Kenntnis der Sachlage diesmal völlig versagt. Ja so weit ist es schon gekommen, dass ein Handbuch der Philosophie dem schlimmsten Hitzkopf seine Spalten geöffnet hat. Nicht gewarnt durch die Streitigkeiten um die "Affentheorie" und die Selektionstheorie hat man auch schon das große Publikum dahin zu belehren gesucht, dass die heutige Analysis ein Chaos widersinniger Behauptungen ist. Man wird wohl verstehen, dass ich gegenüber dieser Tonart und dem lächerlichen Selbstbewusstsein eines der Angreifer nicht gerade zur Milde gestimmt bin.

Als, um das Jahr 1872 die damalige Analysis von W e i e r s t r a s s und M é r a y, D e d e k i n d und G. C a n t o r einer Revision unterzogen wurde, handelte es sich ausschließlich um Mathematisches, und die Kritiker durften sich des Beifalls so gut wie aller Sachverständigen erfreuen. Jetzt aber werden philosophische Argumente gegen mathematische ausgespielt, und dazu sind diese Angriffe nicht von Fachphilosophen ausgegangen, sondern von einigen unter den Mathematikern selbst. Die Mathematik (und überhaupt alle Wissenschaft) soll auf Psychologie gegründet werden. Ein Mathematiker ersten Ranges, H. P o i n c a r é, hat das mit nackten Worten ausgesprochen [1]. Andere sagen das nicht so deutlich, verfahren aber in gleicher Weise. Und noch Niemand hat in der neueren Literatur - seit diese Angriffe gegen den Bestand der heutigen Mathematik mit Applomb in Szene gesetzt worden sind - grundsätzlich widersprochen. Im Gegenteil, der einzige Mathematiker, der nachdrücklich Einwendungen erhoben hat, nicht ohne Äußerung einer beträchtlichen Entrüstung, stimmt ge-

1) La Logique de l'Infini. Revue de Méthaphysique et de Morale, Bd 17,1906.

rade in diesem Hauptpunkt mit den Angreifern überein. Zwar geht er nicht so weit, die gesamte Analysis über den Haufen zu werfen. Aber ihre Begründung hält auch er für unwissenschaftlich und also einer Reform bedürftig. Nur auf einem verschlungenen Umweg sollen die Hauptergebnisse gerettet werden können.

So haben wir denn zur Zeit einen merkwürdigen Zustand: Da ist einmal die überwiegende Mehrheit der Mathematiker, die sich in vielsagendes Schweigen hüllt. Da sind ferner Häretiker, verteilt auf einige zum Glück noch kleine Sekten, für die es auch schon mehr oder minder passende Namen gibt: Finitisten, Intuitionisten, Formalisten. Und wie bei religiösen Sekten stimmen die mathematischen Häretiker darin überein, dass jede Partei ihre eigene Sache für etwas Heiliges hält. Nicht mit Gründen, sondern mit Dogmen wird gearbeitet, und zwar auf allen Seiten.

So verfährt man ungeachtet des Umstandes, dass es schon eine ganze Literatur gibt, aus der man sich besser hätte unterrichten können. Ich nenne vor anderen die Namen B o l z a n o und F r e g e. Zum Beispiel finden wir bei dem zweiten dieser verdienten Autoren (1884) die Erklärung:

> "Die Psychologie soll sich nur nicht einbilden, zur Mathematik irgend etwas beitragen zu können."

Und in einer neueren Abhandlung desselben Autors (1918) liest man:

> Nicht Alles ist Vorstellung. Sonst enthielte die Psychologie alle Wissenschaften in sich oder wäre wenigstens die oberste Richterin über alle Wissenschaften. Sonst beherrschte die Psychologie auch die Logik und die Mathematik. Nichts heisst aber die Mathematik mehr verkennen als ihre Unterordnung unter die Psychologie.

Weder die Logik noch die Mathematik hat als Aufgabe, die Seelen und den Bewusstseinsinhalt zu erforschen, dessen Träger der einzelne Mensch ist.

Ähnliches steht auch in einem vielgelesenen Buche von H u s s e r l (1900), auf den sich sogar zwei der Kritiker berufen, und auch sonst noch findet man die gleiche Ansicht in der philosophischen Literatur verbreitet.

Aber gesetzt auch, man hätte von dieser Literatur nichts gewusst: Wie geht es doch zu, dass die beteiligten Autoren die Frage, ob die Mathematik mit Psychologie etwas zu tun hat, nicht von sich aus erörtert haben? Diesen Einwand hätten sie sich doch, nach der ganzen historischen Entwickelung der mathematischen Wissenschaft, von vorne herein machen müssen! Man ist also sehr oberflächlich zuwerke gegangen. Man segelt im Fahrwasser des Psychologismus dahin (worunter die Verwendung psychologischer Begriffe an ungehöriger Stelle zu verstehen ist).

Eine Hauptquelle hat der heutige Psychologismus, mehr oder minder unmittelbar auch der mathematische, wenn ich nicht irre, in der Philosophie K a n t's.

Mit diesem Urteil werden viele Verehrer K a n t's sehr unzufrieden sein. Der Tendenz nach war K a n t unzweifelhaft Gegener des Psychologismus. Insbesondere hat er die Vermengung der Logik mit Psychologie ausdrücklich abgelehnt. Es kommt aber meines Erachtens weniger auf das an, was einer will und zu tun glaubt, als auf das, was er wirklich tut.

Übrigens ist der Psychologismus viel älter. Die griechischen Sophisten waren Psychologisten, und unter unmittelbaren Vorgängern K a n t's waren es die englischen Empiristen L o c k e und H u m e. Neuere Psychologisten behaupten gewöhnlich, missverstanden worden zu sein. Sie erkennen also die gegen den Psychologismus sprechenden Argumente an.

Vgl. W. M o o g, Die Kritik des Psychologismus durch die moderne Logik und Erkenntnistheorie. Archiv für die gesamte Psychologie, Bd. XXXVII, 1918.

In dem Artikel Erkenntnistheorie des erwähnten Handbuchs der Philosophie, der den Kantianer F r. K u n t z e zum Ver-

fasser hat, heisst es:

Das non prius auditum an K a n t ist dies, dass an Stelle des Seins ein Akt unseres Geistes gesetzt wird.

Ähnlich andere, die von einer "kopernikanischen Tat" gesprochen haben.

Die unendliche Vernunft soll den Erscheinungen Gesetze (Naturgesetze) vorschreiben.

> Wie ist Natur möglich? (!) ... Die allgemeinen Naturgesetze können und müssen a priori ... erkannt ... werden. (Prolegomena, § 36. Ebenso Kritik der reinen Vernunft, zweite Auflage, S.263). Natur ist "bloss eine Menge von Vorstellungen des Gemüthes" (Kr.d.r.V., erste Auflage, S.118).

Eine reine Anschauung genannte Fähigkeit des Menschengeistes soll die Geometrie liefern und damit die Form, in der sich alle Naturvorgänge abspielen.

In den Prolegomena, § 38, ist meist von willkürlichen (!!) Bestimmungen (?) "des Raumes" die Rede. Weiterhin heisst es unter anderem: "Was den Raum (!) zur Zirkelgestalt, der Figur des Kegels und der Kugel bestimmt (!) (ist) der Verstand ..." Die blosse allgemeine Form der Anschauung heisst Raum!

Zeit und Raum aber gehören, als nur "sinnliche" Formen unserer Anschauung" durchweg zur Philosophie des "transzendentalen Idealismus". (Kr.d.r.V., erste Auflage, S.369).

Der Grundfehler ist überall, dass zwischen Natur, Naturgesetzlichkeit und unserer Kenntnis davon nicht unterschieden wird.

Diese Begriffsverwirrung geht durch einen großen Teil auch noch der neuesten Literatur. Z.B. liest man bei M. S c h l i c k, der selbst gegen K a n t polemisiert, und geometrische Sätze ganz richtig für apriorische Erkenntnisse hält, gleichwohl, der Raum der Geometer "entstehe" aus den Daten der einzelnen Sinne (Erkenntnistheorie, 1918, S.301).

So wurde, keineswegs der Absicht nach [1], aber tatsächlich, Menschliches in das Naturgeschehen hineingetragen und zugleich ein erheblicher Teil der Mathematik subjektiviert, psychologisiert

---

1) Siehe, in der Kr.d.r.V., den Abschnitt, der überschrieben ist "Widerlegung des Idealismus".(Zweite Ausgabe, S.274).

Dieselbe Lehre bildet, in mehr oder minder veränderter Gestalt, den Ausgangspunkt aller nachkantischen, heute sogenannten idealistischen Philosophie, mit deren Lebensäußerungen wir uns daher eingehender zu beschäftigen haben werden.

Ausser schweren Missgriffen, die allgemeine Fragen des Denkens betreffen, haben sich die would - be - Reformatoren der Mathematik auch noch anderes zuschulden kommen lassen: Denkfehler in ihren mathematischen Darlegungen. Ich bin daher im Zweifel gewesen, ob es nicht genügen würde, in einer Zeitschrift und in aller Kürze das Thema der Umsturzmathematik nur aus diesem Gesichtspunkt zu behandeln und den Rückschluss auf die Beschaffenheit der zugehörigen Philosophie dem Leser zu überlassen. Aber dann würde unfehlbar der Einwand kommen, dass die Hauptsache gar nicht berührt worden sei. Ja ich höre schon, wie dieselben Mathematiker, die noch vor kurzem mit tiefster Verachtung auf alles hinabsahen, was nur Philosophie heisst, nun, da sie mit einem Male ihr philosophisches Herz entdeckt haben, mich der greulichsten Oberflächlichkeit bezichtigen würden.

Das Übel musste mithin an der Wurzel angegriffen werden. Das Ganze der Kritik musste in einen weiteren Rahmen gestellt werden, den der Erkenntnistheorie.

Unter diesem Namen werden heute zwei sehr verschiedene Problemkreise zusammengefasst. Einmal die Frage nach der Legitimität, Gültigkeit von Erkenntnissen, dann die nach ihrem Zustandekommen. Die Beantwortung der zweiten Art von Fragen hat die der ersten zur Voraussetzung. Fragen der zweiten Art, die wirklich ind die Psychologie gehören, werden hier nur in Bezug auf Mathematik und nur so weit behandelt werden, als es zum Abschneiden von Einwänden erforderlich scheint.

Der herkömmliche Begriff der Existenz mathematischer Gebilde ist nicht nur von den Intuitionisten, sondern auch von Philosophen anderer Richtung kritisiert worden, freilich in aller Stille. Man hat ihn einfach begraben und hat ihm nicht einmal eine Leichenrede gegönnt. Ich glaube, die meisten Mathematiker haben gar nichts davon gemerkt.

Ich finde es unerträglich, dass einem und demselben Sachverhalt, je nachdem er von Mathematikern oder Philosophen betrachtet wird, ein "Dasein" zu- und abgesprochen werden soll. Dies hat mich zur Änderung einer gebräuchlichen Terminologie veranlasst. Ich schreibe dem Mathematischen (und Logischen) Wirklichkeit, Realität zu.

Zur Kunstsprache der Wissenschaft pflegen sich Philosphen und Mathematiker verschieden einzustellen. Zwar machen sich beide gewöhnlich nichts daraus, neue Kunstausdrücke einzuführen, aber während die ersten auf die ihrigen grossen Wert zu legen pflegen, ja manchmal überhaupt nichts anderes ~~xxxxxx~~ hervorbringen als Änderungen der Terminologie, wird von Mathematikern die Kunstsprache meistens als eine ziemlich gleichgültige Sache angesehen. Man kann mit recht verschiedenen Worten denselben Gedanken ausdrücken.

Abgesehen von dem einen genannten Punkt, der natürlich einer ausführlichen Rechtfertigung bedarf, habe ich mich, in Bezug auf Neuerungen, der grössten Zurückhaltung befleissigt. Schwerlich darf die Kunstsprache der Wissenschaft als etwas Untergeordnetes angesehen werden. Wir brauchen sie ja, um uns zu verständigen. Von der Art der Erklärung von Worten und sonstigen Zeichen hängt die logische Struktur des Vortrages und somit die Lesbarkeit der Darstellung ab.

Übrigens ist nicht einmal eine wirkliche Neuerung eingeführt, sondern nur eine ältere rückgängig gemacht worden. Für die Scholastiker galt noch der Satz:

Verum et ens convertuntur.

So kam ich dazu, die Wirklichkeitsform der Mathematik mit anderen Arten des "Wirklichen" zu vergleichen, ihre Ähnlichkeiten und Unterschiede festzustellen. Hat das Vorzutragende irgend einen dauernden Wert, so wird er hier zu suchen sein, im ersten Teile dieses Buches, der schliesslich der umfangreichere geworden ist. Die gesamte neuere sogenannte Grundlagenforschung kann ich nur als eine ephemere Erscheinung, als eine Art von geistiger Infektionskrankheit auffassen. Wenn sie, wie zu hoffen steht, bald eines sanftseligen Todes versterben wird, kann die an ihr zu übende Kritik ebenfalls begraben werden.

Der Stoff der Abschnitte IV - XIV gehört größtenteils zu denen, die in einer umfassenderen "Philosophie der Mathematik" zu behandeln sein würden (worunter ich etwas gans anderes verstehe, als das Handbuch der Philosophie). Man hat zum Beispiel gefragt, was Zahlen verschiedener Art "sind" und was sie "sollen". Meine Antwort darauf ist, dass diese Fragen für natürliche und abgeleitete Zahlen in sehr verschiedener Weise beantwortet werden und zum Teil auch abgelehnt werden müssen.

Die natürlichen Zahlen werden im akademischen Unterricht ganz allgemein als etwas Gegebenes und einfach Hinzunehmendes behandelt, und das scheint mir das Richtige zu sein. Dass aber das schon die Ansicht der griechischen Mathematiker gewesen sein musste, ist neuerdings von verschiedenen Seiten dargelegt worden (P. B o u t r o u x, H a s s e und S c h o l z).

Wer, in Geltungsfragen, alle Einmischungen von Psycholo-

gisten in die Mathematik ablehnt, braucht darum noch nicht "philosophischen" Überlegungen jeden Einfluss auf die Gestaltung mathematischer Lehren abzusprechen. Sicher gehört in eine Philosophie der Mathematik eine Erörterung der anzuwendenden Darstellungsform, ein Gegenstand, dem von Herrn M. P a s c h wie von mir besondere Schriften gewidmet worden sind [1], und der darum hier ausser Betracht bleibt. Ferner möchte ich hierher gewisse methodische Fragen rechnen. Vieles, das sehr wohl eine "philosophische" Erörterung verdient, ist zur Seite geblieben, und nur auf die systematische Stellung der Geometrie ist etwas näher eingegangen worden.

Was ist Geometrie? Welches ist ihr Verhältnis zur Algebra und Analysis? Was ist z.B. die Bedeutung des sogenannten Imaginären in der Geometrie? Ist die Zersplitterung der Mathematik in Teildisziplinen, wobei in der Mentalität nicht weniger Mathematiker die bis jetzt vielseitigste von allen, nämlich eben die Geometrie, ganz ausfällt, nicht vielleicht eine Krankheitserscheinung? Ich bringe auch hier nichts Erschöpfendes, habe aber Fragen dieser Art nicht ganz mit Stillschweigen übergehen mögen, um so weniger, als eine gegenwärtig in Deutschland vorherrschende Art der Urteilsbildung mir sozusagen an die Leber geht. Aus diesem letzten Grunde wird man es wohl verzeihen, dass ich auf eigene Schriften Bezug genommen habe, die eben im Zusammenhang mit solchen Überlegungen entstanden sind. Ich wende mich mit den

---

1) M. P a s c h, Mathematik und Logik, Zweite Auflage 1924. (Vier Abhandlungen: 1. Über innere Folgerichtigkeit. 2. Über den Bildungswert der Mathematik. 3. Forschen und Darstellen. 4. Der Aufbau der Geometrie.)
E. St u d y, Denken und Darstellung. 2.Auflage, 1928.

in den Abschnitten XI - XIV behandelten Beispielen, die übrigens so einfach als möglich gestaltet sind, an meine Fachgenossen, Philosophen, denen da des spezifisch Mathematischen zuviel sein wird, mögen darüber hinweggehen.

Schliesslich darf wohl noch darauf hingewiesen werden, dass ich da, wo ich anderen widersprechen muss, sie habe zum Worte kommen lassen, und dass überall, wo ich zu einem abfälligen Gesamturteil komme, die Gründe angegeben sind.

II.

Der Psychologismus und die Verfälschung des Wahrheitsbegriffs in der idealistischen Philosophie.

(Erkenntnistheoretischer) Idealismus ist der Standpunkt, nach welchem die Aussenwelt (des Subjekts) "ideal" ("ideell"), d.h. nicht unabhängig von allem Bewusstsein existiert, sondern nur als Gegenstand möglicher Erfahrung, als Inhalt objektiver, allgemeingültiger Erfahrung, oder nur als Inhalt eines erkennenden Bewusstseins, als etwas dem Bewusstsein "Immanentes": So lesen wir in dem Handwörterbuch der Philosophie von Eisler und Müller-Freyenfels (1922)[1].

Denn, was hier, ich glaube mit Recht, als gemeinsamer Zug

---

1) Von anderen Umgrenzungen des Begriffs "Idealismus" (deren es eine Menge gibt) erwähne ich nur die sehr viel engere von Zisler (1914), der unter Idealismus nur Immanenzphilosophie verstehen will. Was im Texte von Idealismus überhaupt gesagt ist, gilt a ~~posteriori~~ fortiori von aller Immanenzphilosophie.

II.

Der Idealismus und die Verfälschung der Wahrheit begriffe in der idealistischen Philosophie.

(Axiomatisierung)

Idealismus ist der Standpunkt, nach welchem die Annahme (des Subjekts) "Ideal" ("Ideell"), d.h. nicht unabhängig von allem Bewusstsein existiert, sondern nur als Gegenstand möglicher Erfahrung, als Inhalt objektiver, allgemeingültiger Erfahrung, oder nur als Inhalt eines erkannten Bewusstseins, als etwas dem Bewusstsein "Immanentes". So lesen wir in dem Handwörterbuch der Philosophie von Klinkor und Müller-Freyenfels (1929)[1].

Dem, was hier, ich glaube mit Recht, als gemeinsamer Zug

---

1) Von anderen Übersetzungen der Begriffe "Idealismus" (deren es eine Menge gibt) erwähne ich nur die sehr viel engere von Kiesewetter (1918), der unter Idealismus nur Immanenzphilosophie verstehen will. Die in Texte von Idealismus überhaupt gesagt ist gilt a fortiori von aller Immanenzphilosophie.

aller idealistisch genannten Erkenntnistheorien hingestellt wird, liegt eine Auffassung des Wahrheitsbegriffs zugrunde, die unvereinbar ist mit der offenkundigen Absicht aller, die unbeirrt durch philosophische Schulmeinungen ~~die~~ von Wahrheit reden. Wer sagt, zweimal zwei sei gleich vier, oder Julius Caesar habe die Gallier besiegt, oder die Sonne ~~xxxxx~~ sei grösser als der Mond, will etwas Objektives feststellen - er spricht, wie er überzeugt ist, eine Wahrheit aus, die mit seinem Ich nicht das Geringste zu tun hat. Unzählige Dinge gibt es, in dieser meiner Aussenwelt, von deren Dasein ich gar nichts weiß, und mit denen mich dann vielleicht das Schicksal bekannt macht, nie gesehene Sterne, fremde Länder und Menschen, Tiere, Pflanzen, aber auch schon Gesetze des Staates, in dem ich lebe, und anderes. Wie soll das alles ein Stück meiner Vorstellung sein? Muss ich nicht, mit solchen Ideen im Kopfe zu einer völlig verkehrten Ansicht vom Weltverlauf gelangen? Die angebliche Abhängigkeit der Aussenwelt des Subjekts von dessen Bewusstsein ist nichts als eine philosophische Künstelei! Sie verwischt den klaren Unterschied von Objektivem und Subjektivem, von Wahrheit und Wahrhaftigkeit, den Unterschied von Erkenntnis und Irrtum, von Richtig und Falsch! [1]

Der Begriff der absoluten Wahrheit gehört, soviel ich sehe, zu denen, die einer Definition weder bedürftig noch fähig sind.

Auf die unermessliche Literatur über den Wahrheitsbegriff, die sich seit dem Altertum angehäuft hat, kann hier nicht eingegangen werden. Doch soll gewürdigt werden, was einer der gewiss

---

1) B o l z a n o hat, schwerlich mit Unrecht, Wissenschaftlichkeit geradezu mit Objektivität identifiziert (1910, II, § 5, Anmerkung. Ausgabe von F e l s, S.35). Auch er war ein Gegner aller idealistischen Philosophie.

tiefsten und scharfsinnigsten Denker aller Zeiten, B e r n a r d B o l z a n o darüber gesagt hat.

B. hält in § 24 seines Hauptwerkes zunächst die verschiedenen Bedeutungen auseinander, die mit den Worten wahr und Wahrheit verbunden zu werden pflegen. Er bemerkt aber dazu, dass trotz der Mehrdeutigkeit, die gleich anderen Wörtern aller Sprachen auch diesen anhaftet, Missdeutungen nicht leicht entstehen können, da der Zusammenhang, in dem sie vorkommen, kaum je einen Zweifel lässt. Nur einige Wortbedeutungen, die von Gelehrten vorgeschlagen worden sind, aber sich glücklicherweise (auch heute noch) nicht herrschend gemacht haben, bilden davon, nach B., eine Ausnahme.

Die Wortbedeutung, für die sodann B. selbst sich entscheidet, und die er, um ganz klar zu sein, noch genauer durch Zusätze bestimmt (Wahrheit "an sich" = "objektive" Wahrheit) ist: Wahr heisst ein Satz, der etwas so aussagt, wie es ist; wobei es unbestimmt bleibt, ob dieser Satz von irgend Jemand wirklich ausgesprochen oder auch nur gedacht worden ist oder nicht.

Dass nun mit solchen Worten eine Definition des Wahrheitsbegriffs gegeben sein sollte, würde ein Missverständnis sein. Denn wie etwas ist, ein So-Sein, können wir auch nur mit Worten und in einem Satz zum Ausdruck bringen (Zweimal zwei ist gleich vier) oder mit konventionellen Zeichen, die einen Satz vertreten (2.2 = 4), und das wäre wiederum ein wahrer Satz. Wir hätten idem per idem definiert [1].

Die Sätze, von denen B. spricht, können sich auf ein Wirkliches, Existierendes beziehen (dessen Begriff ebenfalls nicht

---

1) Siehe auch F r e g e, 1918, S.60.

zu erklären ist) oder auch nicht. Die Sätze "Es gibt Engel" und "Es gibt keine Engel" können beide nicht auf ein Wirkliches bezogen werden, wenn es keine Engel gibt. Das eben ausgesprochene Urteil aber bezieht sich auf ein Wirkliches: Die angeführten Sätze sind, als ausgesprochene Sätze, wirklich, und jeder von ihnen enthält ein Urteil. Das eben scheint der Punkt zu sein, auf den es ankommt.

Überhaupt scheint es für die Wissenschaft immer nur auf Urteile, und ihre Beziehung zu irgend einer Art von Wirklichkeit anzukommen, nicht auf die Sätze, in denen sie ausgesprochen werden. Das war die Meinung von P l a t o n und A r i s t o t e l e s, dann von vielen anderen, und im Grunde auch die von B o l z a n o (Vgl. § 311). Wir werden also, statt von Sätzen, von wahren und irrigen Urteilen reden.
Ein Urteil kann Wahres und Irriges in den verschiedensten Mischungen enthalten. Wahr, oder richtig im präzisen Sinne dürfen wir es aber nur dann nennen, wenn es von jeder Beimischung von Falschem frei ist. Zum Beispiel enthält jeder "mathematische" Satz, das heisst hier, ein Satz, der eine Aussage über Gegenstände der Mathematik macht, ein Urteil. Und dieses Urteil, z.B. "$2^{61}-1$, oder $2^{1024}+1$, ist eine Primzahl", ist richtig oder falsch. Tertium non datur.

Die Begriffe richtig und falsch, wahr, irrig, lassen keine Steigerung oder Abschwächung zu. An dieser Stelle kommt der Mathematiker, wenigstens der, dem es ernst um seine Sache ist, bereits mit vielen anderen in Kollision. Viele Leute, besonders unter Philosophen, halten nämlich für geistreich die sogenannten Halbwahrheiten, die in einer teils absichtlichen teils gedankenlosen Vermischung von für wahr gehaltenem mit Falschem bestehen und

kennzeichnend sind für den sogenannten Feuilletonstil. Zum Beispiel lautet gleich der erste Satz der im Jahre 1925 neu gegründeten philosophischen Zeitschrift Sympo$ion: "Die Mathematik ist die Wissenschaft vom Unendlichen". Der Urheber dieses Ausspruchs ist ein namhafter Mathematiker, H. W e y l, mit dem wir uns noch viel zu beschäftigen haben werden. Natürlich weiss er recht gut, dass, was er sagt, unzutreffend ist. Es ist nicht Pedanterie, sondern ein oberster Grundsatz für den Betrieb aller Wissenschaft, dass der Forscher sich bemühen soll, das zu sagen, was er meint, es sei denn, dass er gelegentlich einmal in den"trockenen Ton" einen Scherz einfliessen lassen will. Ohnehin ist es schwer genug, sich genau auszudrücken und wo möglich noch kurz dazu. Keine Sprache ist wissenschaftlich, die es nicht verträgt, wörtlich genommen zu werden. Für Paradoxien hat die Wissenschaft keinen Raum. Und wer für ein Laienpublikum schreibt, hat noch weiteren Anlass, sich seine Worte und ihre voraussichtliche Wirkung sorgfältig zu überlegen. Auch Philosophen sind vielfach sorgfältigen Denkens entwöhnt und nehmen es nicht genau mit den Worten. Auch ihnen gegenüber ist also doppelte Vorsicht am Platze.

So wenig als eine Definition der Wahrheit, so wenig kann es ein allgemeingültiges Kriterium der Wahrheit geben. Wir haben nur ein Kriterium des Irrtums, das enthalten ist in dem sogenannten Satz vom Widerspruch. Indessen kann es sein, dass Urteile von anderen abhängig (logisch-abhängig) sind. "Wenn dieses, dann jenes". Auch solche konditionale oder hypothetische Urteile erheben, als Urteile, den Anspruch auf absolute Wahrheit, einerlei ob die Prämisse wahr ist oder nicht. Sie sind unentbehrlich und enthalten keinerlei Abschwächung des Wahrheitsbegriffs. Ebenso steht es bei Alternativen, A oder B oder C.

Dass Folgerichtigkeit nicht an sich schon den Besitz einer Wahrheit verbirgt, versteht sich wohl von selbst. Sie ist nur eine Bedingung der Wahrheit abgeleiteter Urteile. Ist die richtig gezogene Folgerung nicht richtig, so ist es auch nicht der Grund. Dies wird unglaublich oft übersehen. Autoren machen dort halt, wo sich widerspruchsvolle oder doch bedenkliche Schlussfolgerungen einstellen würden, und Kritiker haben oft genug nichts dagegen einzuwenden.

Ganz anders als um die Wahrheit steht es um unsere Erkenntnis; nämlich um die Erfassung des Wahren oder Richtigen, sowie des Irrigen oder Falschen - des Falschen als solchen. Das Erkennen ist ein Urteilen, ein psychischer Prozess, und im Psychischen gibt es alle erdenklichen Mischungen und Abstufungen. Unter Umständen können wir in Urteilen Richtiges und Falsches erkennen und sondern Lehrsätze, die von Mathematikern ausgesprochen werden,können auch dann Richtiges enthalten, wenn sie falsch sind; was sogar sehr häufig zutrifft.

Ob ein Urteil richtig oder falsch ist, hat mit dem erkennenden Subjekt nichts zu tun. Ein Sachverhalt, auf den sich das Urteil bezieht, kann weiter bestehen, wenn das Subjekt mit seinem Bewusstsein vernichtet wird. Ein solcher Sachverhalt kann auch bestehen, wenn gar keine urteilenden Subjekte da sind. Blei ist gewiss schwerer als Eisen, einerlei, ob es Lebewesen gibt, die diesen Gedanken fassen können oder nicht. Nur meine Erkenntnis geht mit mir zu Grunde.

Wegen des Wahrheitsbegriffs siehe ferner die treffliche Auseinandersetzung in P f ä n d e r's Logik. (1921, S.209 -223, 383 - 390.)

So grossen Scharfsinn auch B o l z a n o auf seine (richtige und falsche, ausgesprochene und vielleicht nie gedachte Urteile umfassenden) "Sätze an sich" verwendet hat, so habe ich mich doch nicht davon überzeugen können, dass diese Lehre für unser Erkennen einen wirklichen Nutzen bringt. Alle Wissenschaften haben es nur mit Sätzen zu tun, die ausgesprochen worden sind. Der Stand einer jeden Wissenschaft, auch der Erkenntnistheorie, hängt nur von Urteilen ab, die tatsächlich in sie eingetreten sind.

Ein Gleiches ist, wie mir scheint, zu sagen in Bezug auf B.'s "Vorstellungen an sich". Für die Wissenschaften dürften nur Vorstellungen in Betracht kommen, die eine Beziehung auf Wirkliches enthalten oder von denen wir das wenigstens glauben. Sie können dann (mehr oder minder) "zutreffend" oder "unzutreffend" sein. In den meisten Fällen wohl sind unsere Vorstellungen nicht frei von einer Beimischung von Urteilen, und diese können Richtiges und Falsches enthalten. Die Vorstellung von Kentauren oder geflügelten Pferden hat keine Beziehung auf ein Wirkliches, und braucht daher, wenn man überhaupt auf sie Rücksicht nehmen will, nur als Psychisches Gebilde betrachtet zu werden.

In ähnlichem Sinne, ja noch schärfer, hat sich B. R u s s e l ausgesprochen, mit dem ich mich hier (leider nicht auch in vielen anderen Dingen) in Übereinstimmung befinde:

> "Ich möchte behaupten, dass die Logik ebenso wenig ein Einhorn zulassen darf, wie die Zoologie; denn die Logik befasst sich geradesogut mit der realen Welt wie die Zoologie, wenn auch mit ihren abstrakteren und allgemeineren Eigenschaften".... "Es gibt nur eine Welt, die wirkliche Welt: Shakespeares Phantasie gehört dazu und die Gedanken, die er beim Verfassen von Hamlet hatte, sind wirklich" (1923, S.170).

Blosse Phantasiegebilde, die als solche erkannt sind, gehen also, auch nach R u s s e l, nicht die Logik, sondern die Psychologie an. Jedenfalls aber hat eine Logik, die sich mit Wirklichkeiten abgibt, überhaupt das Denken von Menschen mit Wirklichkeitssinn, mit runden Quadraten und dergleichen "Vorstellungen an sich" gar nichts zu tun 1).

Das von den "Sätzen an sich" Gesagte erstreckt sich auch auf den Begriff, den G. F r e g e (1918), unter Einschränkung des gewöhnlichen Sprachgebrauches, durch das Wort Gedanke bezeichnet. Dieser "Gedanke" ist, in der Sprache B o l z a n o's, eben der Inhalt eines "Satzes an sich".

In weitgehender Übereinstimmung mit B. und F r. befindet sich A. P f ä n d e r (Logik, 1921), der übrigens keinen von Beiden nennt 2). Der Gedanke, insbesondere der behauptende

---

1) In einer Bonner Dissertation, von der ich nach Niederschrift dieser Zeilen Kunde erlangt habe, polemisiert dieser Verfasser ebenfalls gegen die "Sätze an sich". (S. T h e o b a l d, Die Bedeutung der Mathematik für die logischen Untersuchungen Bernard Bolzanos. 1928). Auch er hält sie für erkenntnistheoretisch wertlos. Vgl. auch H u s s e r l, 1900, S.227.

2) Auch F r e g e nennt B o l z a n o nicht, ebensowenig aber K a n t, zu dessen Philosophie die seinige in diametralem Gegensatz steht.

MATHEMATISCHES INSTITUT
JUSTUS-LIEBIG-UNIVERSITÄT
GIESSEN

Gedanke, löst sich los von dem Subjekt, das ihn hervorgebracht hat. Er ist "zeitlos" und mitteilbar, während das Denken in der Zeit verläuft und immanent, nicht mitteilbar ist. Der behauptende Gedanke, das Urteil, ist wiederum der Inhalt eines "Satzes an sich".

Meines Erachtens sind in Bezug auf die "Zeitlosigkeit" Unterschiede zu machen. Als die Bibliothek von Alexandria verbrannte, sind viele, und gewiss auch viele richtige, Gedanken für immer verschwunden. Der Inhalt von richtigen mathematischen Gedanken (von Lehrsätzen der Mathematik) ist dagegen keiner Möglichkeit des Untergangs ausgesetzt. Von der Mathematik (und Logik) wird weiterhin noch ausführlicher zu reden sein.

Der (erkenntnistheoretische) Idealismus leugnet nun, nach der mitgeteilten Definition, dass es eine absolute Wahrheit, eine Wahrheit "an sich" gibt. Er leugnet es allerdings zunächst nur in Bezug auf die Aussenwelt des Subjekts. Dann aber muss er es, wie leicht zu sehen, überhaupt leugnen. Zum Beispiel können wir, in unserem Denken, einigen (beliebig vielen) der Zahlen 1, 2, 3,... Körperdinge zuordnen. Gibt es in Bezug auf diese keine vom Subjekt unabhängige Wahrheit, so kann es auch in Bezug auf die Zahlen keine geben. Wenn der einzelne Idealist diesen Schluss nicht zieht, so denkt er nicht an die Zahlen. Er fällt in eine Inkonsequenz.

Der Idealismus behauptet also, wenn er folgerichtig zu sein versucht, ganz allgemein, dass die Wahrheit ein Relativbegriff ist, der sich immer auf ein Subjekt, ein Bewusstsein bezieht - von dessen Struktur sie demnach abhängig sein muss.

Tatsächlich finden sich viele Äusserungen dieses Inhalts in der Literatur. So zum Beispiel in der Logik von B. E r d m a n n (1892, S.375 ff), die schon F r e g e aus diesem Gesichtspunkt kritisiert hat (1893, S.XVI).

> Wie ..., wenn ... Wesen gefunden würden, deren Denkgesetze den unseren geradezu widersprächen und also auch in der Anwendung vielfach zu entgegengesetzten Ergebnissen führten? Der psychologische Logiker könnte das nun einfach anerkennen und sagen: Bei dener

gelten jene Gesetze, bei uns diese. Ich (F r e g e) würde sagen: Da haben wir eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit.

Nicht ein Grund des Wahrseins wird angegeben, sondern ein Grund des Fürwahrhaltens. .... Diese Unmöglichkeit, die für uns besteht, das Gesetz (ein logisches) zu verwerfen, hindert uns zwar nicht, Wesen anzunehmen, die es verwerfen; aber sie hindert uns, anzunehmen, dass jene Wesen Recht haben .... Wenigstens gilt das von mir.

Die von F r e g e bekämpfte Auffassung der Wahrheit, die als relativistisch oder subjektivistisch oder psychologistisch bezeichnet wird, ist schlechthin absurd. Und da nicht zugleich auch der Sprachgebrauch geändert wird, der überall auf den gewöhnlichen Wahrheitsbegriff hinweist, da also der Meinung Vorschub geleistet wird, dass es sich auch bei denen, die das Wort Wahrheit im üblichen Sinne brauchen, "in Wahrheit" um den idealistischen Wahrheitsbegriff handele, so muss, wie auch schon F r e g e gesagt hat, von einer Verfälschung des Wahrheitsbegriffs die Rede sein.

Die uns den Begriff einer nur relativen Wahrheit auf- und einreden wollen, sehen nicht den Widerspruch, in den sie sich verstricken, da dann doch wenigstens das Urteil, dass es keine (absolute) Wahrheit gibt, absolut-Wahr sein müsste [1]. Und was soll man sich überhaupt bei einer relativen Wahrheit denken? Man möchte sich dann doch wohl auch eine relative Wirklichkeit,

---

1) Diesen Denkfehler hat schon A r i s t o t e l e s gerügt. Siehe B o l z a n o, 1837, § 30 und § 31.

eine relative Existenz denken können. Ein Schmarotzertier kann nicht leben ohne seinen Wirt, meine Wahrnehmung ist nicht vorhanden ohne mein Dasein, aber damit werden das Tier und die Wahrnehmung selbst keineswegs relativiert. Wir werden fernerhin verschiedene Arten von Existenz zu unterscheiden haben. Aber ein Mittelding zwischen Sein und Nichts ist eine Absurdität [1]. Auch mein Irrtum, mein Traum, meine Halluzination, ist, als Irrtum, Traum oder Halluzination, eine Wirklichkeit. Man hat also eine falsche Münze in Umlauf gesetzt, wenn auch gewiss nicht mit Bewusstsein und Absicht der Täuschung.

Mit dem Wort Subjekt werden nun in Unterarten der idealistischen Philosophie verschiedene Bedeutungen verbunden. Zunächst die des individuellen erkennenden Subjekts, Vor allem sind das Subjekte, die für menschliche Wissenschaft in Betracht kommen können, einzelne Kulturmenschen, insbesondere Philosophen. Es ergeben sich denn sofort die tollsten Folgerungen. Das Ich, das spricht, hat ein anderes Bewusstsein als ein anderes Ich. Es gibt so viele Wahrheiten, als es Iche gibt. Diese"Wahrheiten"sind allesamt mit einander verträglich, so viele ihrer und so verschieden sie auch sein mögen. Die anderen Iche aber sind für mich nur Bewusstseinsinhalte. Verliert mein Ich den Verstand, so ändern sich diese Inhalte, also die Iche, und es ändert sich überhaupt die ganze Welt. Wird mein eigenes Bewusstsein ausgelöscht, so hört alles auf.

Hieran wird nichts geändert, wenn man auch noch andere Subjekte als nur Menschen in Betracht ziehen will. Nur kommen dann noch weitere "Wahrheiten" hinzu, vielleicht (warum nicht?)

---

1) Ganz so absurd, wie die unendlich kleinen Grössen der älteren Analysis - Geister abgeschiedener Grössen, wie B e r k e l a y sie witzig nannte.

Wahrheiten für Maikäfer oder Regenwürmer.

Um solchen Widersinn zu entgehen, sind verschiedene Auswege ersonnen worden.

Zunächst der, dass doch den vernünftigeren Subjekten (Menschen) vieles gemeinsam sei; was bis zu einem gewissen Grade auch zutrifft. Dann aber ergibt sich die Folgerung, dass Wissenschaft nur auf Grund einer wechselseitigen Verständigung der Subjekte möglich ist. Es würden etwa "Sachverständige" über das zu entscheiden haben, was als wahr oder nicht, als richtig oder falsch gelten soll; oder es würde auf Kongressen von Gelehrten abzustimmen sein, wie es auf kirchlichen Konzilen üblich war. Die Pariser Akademie hat eines Tages beschlossen, dass keine Steine vom Himmel fallen. "Der Himmel" aber hat sich nicht darum gekümmert!

Wir haben es hier mit der These des sogenannten Konventionalismus zu tun, zu dem sich bedauerlicherweise unter anderen auch ein Mathematiker vom Range P o i n c a r é's bekannt hat[1].

Der Wahrheitsbegriff wird von Zeitströmungen abhängig gemacht. Die Wahrheit - die Wahrheit selbst, nicht etwa nur unser Wissen um sie - wird, wie ein anderer Bekenner dieser Lehre sich ausgedrückt hat, als etwas Lebendiges betrachtet[2]. Früher war die Erde flach, jetzt ist sie rund. Einst war jede stetige Funktion differentiierbar, jetzt gilt das nicht mehr. Wenn man so etwas Wahrheit nennt, so kann das nur als Unfug bezeichnet werden. Als Erreger des gelben Fiebers gilt ein ultramikroskopischer Organismus, der durch Stechmücken übertragen wird. Man hat auf Grund dieser Hypothese ganze Landstriche von einer furchtbaren

---

1) Näheres R. W., Abschnitt V.

2) H. W e y l, Mathematische Analyse des Raumproblems, 1923, S.45.

Plage gesäubert. Wie hätte das geschehen können, wenn es sich um weiter nichts als eine Übereinkunft zwischen Medizinern handelte? Die gesamte Vergangenheit, die Geschichte der Erde wie die der Menschen, ist etwas Gegebenes, Unveränderliches. Wie sollte unser Meinen darauf Einfluss haben können?

Nicht gerade absurd, aber völlig phantastisch ist ein anderer Ausweg. Es wird ein gattungsmäßiges Denken angenommen, das in der idealistischen Philosophie unter allerlei Namen eine grosse Rolle spielt. Es heisst bei K a n t "reine Vernunft", auch "Bewusstsein überhaupt", ebenso bei S c h u p p e und R a h m k e, bei H e g e l heisst es "reines Denken", bei F i c h t e "reines Ich", bei S c h e l l i n g "absolutes Ich"; bei C o h e n, N a t o r p, R i c k e r t gibt es ein "absolutes Denken", das über dem Denken der einzelnen Subjekte (lies: Philosophen) schweben und sich in ihnen verkörpern soll; auch gibt es noch andere Namen dafür, wie "überindividuelles Ich": Im Grunde ist das alles dasselbe.

Als eine blosse Fiktion, behufs Gebrauchs bestimmter Ausdrucksformen, könnte man dergleichen ja zulassen, wenn auch ein Nutzen davon kaum einzusehen ist. Der eigentliche Daseinsgrund solcher Redeformen scheint jedoch zu sein, dass man sich und andere damit über Inkonsequenzen der idealistischen Denkweise hinwegtäuschen will. Man kann sich dem Eindruck der Wirklichkeit doch nicht ganz verschliessen, und so verlegt man im "kritischen" oder "transzendentalen" Idealismus die Objektivität in ein eigens dazu erfundenes Gedankending [1] So ist denn alle diese Philoso-

---

1) Siehe M ü l l e r - F r e y e n f e l s, Artikel Idealismus. Andere dort aufgezählte Schattierungen des Idealismus, auf die einzugehen ich keinen Anlass sehe, leiden an demselben Mangel.

phie eine Inkonsequenz grossen Stiles, und nur diesem Umstand ist es zu verdanken, dass auf ihrem Boden nicht lauter Absurditäten erwachsen sind. Anstatt die Folgerung zu ziehen, dass die Relativierung des Wahrheitsbegriffs mit dessen Vernichtung gleichbedeutend ist, glaubt man einen Kompromiss möglich zwischen dem Immanenzgedanken B e r k e l e y's, dem esse est percipi, der wegen seiner Kühnheit imponieren mochte, und der nüchternen Lehre eines unverbildeten Verstandes, die zu einfach ist, um tiefer angelegte Geister befriedigen zu können. Es liegt ein Widerspruch darin, wenn man z.B. der Aussenwelt des Ich nur eine auf eben dieses Ich bezogene Existenz zuerkennt, und gleichzeitig den Anspruch erhebt, dass aus dieser Annahme gezogene Folgerungen, anderen einleuchten sollen. Man durchbricht die Schranken, die man sich selbst gezogen hat, und zwar auch dann, wenn man den anderen Ichen erlaubt, nun ihre Aussenwelten zu substituieren. Man stellt sich in der Praxis der Forschung auf den Boden desselben Realismus, den man in der Theorie glaubt ablehnen zu können.

Und wie steht es denn schliesslich um die Gleichartigkeit des Denkens der Menschen? Ist auch nur soviel richtig, dass unter gleichen äusseren Umständen gleiche Urteile gebildet werden? Zeigt nicht die tägliche Erfahrung, dass wirkliches Denken in unzähligen Fällen mit Fehlern durchsetzt ist? Dass es auch Geisteskrankheitenund insbesondere Idiotismus gibt? Wie in ihre Theorien verrannt und wie wirklichkeitsfremd müssen doch Philosophen sein, die an den geläufigsten Tatsachen einfach vorübergehen!

Überall werden diese Philosophen in spitzfindige Überlegungen hineingedrängt, solche wie sie leider einen grossen Teil der philosophischen Literatur erfüllen und in den Augen vieler alle Philosophen in Missachtung gebracht haben [1]. Und eine "eigene

1) Diese Missachtung ist übrigens ganz neuen Ursprungs. Die unmittel-

dazu erfundene" Terminologie, oder vielmehr ein Dutzend oder mehr solcher Terminologien, dient dazu, den Autoren selbst und ihren Lesern den wirklichen Sachverhalt zu verschleiern.

Am krassesten tritt die Fehlerhaftigkeit des idealistischen Grundgedankens in seiner Anwendung auf Mathematik hervor. Hiervon, insbesondere von K a n t's "reiner Anschauung" wird in folgenden Abschnitten die Rede sein.

Eine meines Erachtens vernichtende Kritik des Subjektivismus, Relativismus, Psychologismus und somit aller idealistischen Philosophie ist bereits von B o l z a n o geübt worden, der namentlich die Lehre K a n t's an vielen Stellen kritisiert hat (1815 und 1837). Im gleichen Sinne,und öfter fast wörtlich übereinstimmend, hat sich F r e g e geäussert (1884, 1893, 1918), auch im Hinblick auf Mathematik. Eine Stelle ist schon in der Einleitung angeführt worden. An einer anderen sagt F r.:

> Die geschichtliche (genetische) Betrachtungsweise, die das Werden der Dinge zu belauschen und aus dem Werden ihr Wesen zu erkennen sucht, hat ihre Grenzen. Wenn in dem beständigen Fluss der Dinge nichts Festes, Ewiges beharrte, so würde die Erkennbarkeit der Welt aufhören und alles in Verwirrung stürzen. Eine Auffassung, die alles in's Subjektive zieht, hebt, bis an's Ende verfolgt, die Wahrheit auf. Das Psychologische ist vom Logischen, das Subjektive vom Objektiven scharf zu trennen.

---

bare Schuld tragen K a n t' s Nachfolger: F i c h t e, S c h e l l i n g, H e g e l, S c h o p e n h a u e r, C o h e n, N a t o r p u.s.w. Das πρῶτον ψεῦδος liegt gleichwohl bei K a n t.

Im Vorwort zu seinem Werke von 1893 hat F r e g e an dem Beispiel der Logik von B. E r d m a n n eingehend gezeigt, wie vergeblich das Bemühen ist, von der idealistischen Voraussetzung aus zu wirklicher Objektivität zu gelangen.

Viel weiter bekannt gworden als die Schriften von B. und Fr. sind H u s s e r l's Logische Untersuchungen, deren erster Band (1900 und 1913) eine eingehende Widerlegung des Psychologismus enthält. Kürzer und nicht minder treffend behandelt denselben Stoff, im Hinblick auf die Logik, A. P f ä n d e r (1921, S.159-164 und an anderen Stellen).

Leider muss ich hier auch sagen, dass H u s s e r l seine Ansichten nochmals geändert hat, und zwar im entgegengesetzten Sinne: In dem gleichen Jahre 1913, in dem die Logischen Untersuchungen in zweiter Auflage erschienen sind, sind nämlich auch die "Ideen zu einer allgemeinen Phänomenalogie" herausgekommen, die als H.'s Hauptwerk gelten. Darin finden sich, unter anderem (auf den Seiten 92, 93), die folgenden Sätze, und zwar, was das Allerbefremdlichste ist, ohne jeden Versuch zur Entkräftung des in dem anderen Buch Vorgetragenen:

> Die Welt des transzendenten "res" ist durchaus auf Bewusstsein, und zwar nicht auf logisch (?) erdachtes, sondern aktuelles angewiesen.
>
> Die ganze räumlich-zeitliche Welt ... ist ihrem Sinne nach blosses intentionales Sein, also ein solches, das den blossen sekundären, relativen (!!) Sinn eines Seins für ein Bewusstsein hat... darüber hinaus .... ein Nichts.

Für eine unbefangene Beurteilung ist es klar, dass das in diametralem Widerspruch steht zu dem, was man in den Logischen

Untersuchungen liest (namentlich in § 36). H. bekennt sich nunmehr, anscheinend endgiltig, zum "tranzendentalen Idealismus". Dadurch wird die Übereinstimmung verständlich, die wir weiterhin bei den Häuptern der mathematischen Intuitionisten, B r o u w e r und W e y l finden werden (von denen der erste an K a n t, der zweite an H u s s e r l anknüpft).

In den "Ideen" findet sich aber doch auch (auf Seite 42) der folgende, nun wieder antipsychologistische Satz:

> Zahlenvorstellung (Begriff von der Zahl?) ist nicht Zahl selbst ... Sie als psychisches Gebilde zu bezeichnen, ist also Widersinn, ein Verstoss gegen den völlig klaren, jederzeit als gültig einsehbaren, also vor allen Theorien liegenden Sinn der arithmetischen Rede.

(Die Hervorhebungen rühren vom Autor selbst her.)

Ich vermag, wie gesagt, nicht zu begreifen, wieso, wenn die Aussenwelt des Subjekts ein "intentionales", also psychisches Gebilde ist, die Zahlen es nicht sein sollen.

Jüngere Autoren, wie H. W e y l und O. B e c k e r, die sich auf H. berufen, nehmen weder von diesem Widerspruch, noch überhaupt von den Einwänden gegen den Psychologismus Notiz. Sie selbst sind ausgesprochene Idealisten und Psychologisten [1].

Ich weiss nicht, was ich von dem allem denken soll.

Wenn es um die idealistische Philosophie, in allen ihren Schattierungen, so steht, wie es darzulegen versucht worden ist, - woher rührt dann ihre unzweifelhafte Lebenskraft?

Es scheint, dass der Erkenntnistrieb in der Menschengeschichte ziemlich jungen Datums ist, gleich Kunsttrieben Nebenprodukt einer ~~einer~~ Selektionswirkung, und daher wenig gefestigt [2].

---

1) B e c k e r muss wenigstens stutzig geworden sein, denn er behauptet, es sei keinerlei Widerspruch ~~widar~~ vorhanden. Begründung fehlt.

2) In diesem Zusammenhang verdient Erwähnung, dass es schon in der

Dem primitiven Menschen und größtenteils auch noch dem Kulturmenschen, diesem selbst dann, wenn er die Erkenntnis nicht nur als Mittel ~~als Mittel~~ zu praktischen Zwecken schätzt, ist die anthropozentrische Weltansicht natürlich, zumal sie auch von den höchstentwickelten Religionen systematisch gestützt wird. Ein Rest davon ist die idealistische Philosophie, die eben diese Ansicht, mit vorgeschriebener Marschroute, zu rechtfertigen sucht, einerlei, ob sie sich kritisch oder transzendental oder objektiv oder sonstwie nennt.

So finden wir im Handwörterbuch der Philosophie, das im Erscheinen begriffen ist, in dem Artikel über Mathematik und Naturwissenschaft, bei W e y l (einem der Hauptvertreter der sogenannten Relativitätstheorie!) nicht nur (auf Seite 89) "das absolute Subjekt", sondern daneben (auf Seite 68) auch ein Glaubensbekenntnis (!), und die (wohl auch für manchen Theologen verwunderliche) Behauptung, eine Lehre sei "Religiös-bedenklich", die die "Erde aus dem Mittelpunkt der Welt verdrängt". Ja sogar von Blasphemie ist dort die Rede (!), wohl mit Bezug auf N i e t z s c h e's ewige Wiederkehr. Der Zusammenhang der idealistischen Philosophie mit stark-subjektiven Einstellungen liegt in diesem Falle offen zu Tage. Durch den fliessenden Wahrheitsbegriff (den wir bei demselben Autor schon gefunden hatten (S.00), wird alles in ein falsches Licht gerückt. Das Subjekt will sich nicht darein schicken, dass es ein Stäubchen im Weltganzen ist.

K ü l p e hat sich darüber wie folgt geäussert:

> "Wenn wir selbst die wissenschaftliche Erkenntnis schaffen, den Gegenständen ihre Gesetze vorschreiben (K a n t!) und unsere Begriffe und Grundsätze als ordnende Gesichtspunkte in das Chaos der Erfahrungen (Erscheinungen) hineintragen, dann erhalten wir eine Superiorität über die Gegenstände, dann geht ein idealer Zug eigenen Findens (Erfindens), Gestaltens und Wirkens durch unsere Forschung und Erkenntnis."
>
> "Die Stimmung, welche die grossen Metaphysiker des 17.Jahrhunderts und die grossen Naturforscher jener Zeit erfüllte, wird sicherlich besser getroffen, wenn wir sie uns als Wesen denken, die das vor ihnen aufgeschlagene Buch der Natur mit ganz dem Inhalt zugewandten Sinn und Geist zu lesen und zu verstehen suchen und sich mit Andacht in die Geheimnisse, die sie erschliessen wollen, vertiefen, als wenn wir in ihnen Forscher erblicken, die mit selbstgeschaffenen Gegenständen in selbstgenügsamer Produktivität schalten und walten."
>
> (Realisierung I, 1912, S.37, 39.)

älteren Steinzeit einen Petrefaktensammler gegeben hat. Man hatte ihm seinen Schatz ins Grab gelegt.

Gewissen Indianerstämmen fehlt, wie H. W. B a t e s berichtet, jede Spur objektiven Interesses. Von ihnen unterscheiden sich gelegentlich sogar Vögel zu ihrem Vorteil. E. v. D r y g a l s k i erzählt von seiner Reise, dass eines Tages ein Königspinguin auf das Schiff gewatschelt kam, sich alles genau ansah, und dann wieder abmarschierte. Einen Kunsttrieb haben bekanntlich die australischen Laubenvögel.

Natürlich sind anthropozentrische Einstellungen nicht die einzige Ursache für die Erhaltung der idealistischen Philosophie. Philosophie ist Unterrichts - und Prüfungsgegenstand an unseren Universitäten. Diese aber sind ganz allgemein konservativ. Bei uns ist, seit K a n t, die herrschende Schule die des Idealismus.

Auffallend ist, dass - so viel mir bekannt - nicht einer der neueren idealistischen Philosophen sich mit B o l z a n o auseinandergesetzt hat, dessen Schriften, namentlich seit H u s s e r l auf sie verwiesen hatte, gerade in diesen Kreisen hätte Beachtung finden sollen. Es gibt im Idealismus kaum weniger "Standpunkte" als Philosophen, ja noch einige mehr, und viel Familienzwist. Aber gerade über das, was allen diesen Standpunkten den Boden zu entziehen scheint, schweigt man sich aus. Auch H u s s e r l ist so verfahren.

Auf die sogenannten positivistischen Erkenntnistheorien - die Philosophie der reinen Erfahrung - einzugehen, finde ich im Ganzen keine Veranlassung. Eine Verweisung auf den im Literaturanhang zitierten Artikel von A. R i e h l (1907) darf wohl genügen. (S.92 - 94). Doch dürfte es angemessen sein, einer neueren Erscheinung zu gedenken, nämlich der Erkenntnistheorie von T h. Z i e h e n (1913), und zwar darum, weil die darin vorgetragenen Ansichten zu den hier entwickelten im denkbar schärfsten Widerspruch stehen.

Diese Erkenntnistheorie ist ganz und gar auf Psychologie gestellt. Alles wird in ihr hinwegphilosophiert, was den Ausgangspunkt und die Grundlage der vorausgehenden Erörterungen bildet. "Materielles (gemeint ist Physisches) und Psychisches " bedeutet einen falschen Dualismus. Ebenso Subjekt und Objekt. Ich und Bewusstsein sind verkehrt gebildete Begriffe; ganz überflüssig ist der Begriff des Seins oder der Existenz: Das sind leere Worte 1). Worte, die man nicht durch andere Worte erklären kann, sind nicht notwendig leer!

Z. weist unter anderem darauf hin, dass kleine Kinder den Ich-Begriff noch nicht haben. Aber daraus folgt doch wohl nicht, dass erwachsene Menschen, besonders wenn sie Erkenntnistheorie treiben wollen, ihn entbehren können 2). Sogar der Begriff der Naturgesetzlichkeit scheint mangelhaft zu sein. Die bisher kausal-bedingt genannten Änderungen von Empfindungen und Vorstellungen werden gespalten; nur auf die einen wird das Wort kausal angewendet (!), die anderen heissen parallele Änderungen.

Das genannte Werk eines verdienten Forschers enthält viel Gutes, besonders in historischer Hinsicht. Beherzigenswertes habe ich auch in einer kleineren Schrift desselben Verfassers gefunden (Zum gegenwärtigen Stand der Erkenntnistheorie, 1914).

---

1) § 19 und an vielen anderen Stellen.
Ich denke mir, dass Herr Z i e h e n, wenn er(vielleicht den blauen Dunst einer guten Zigarre schlürfend) vom Liegestuhl aus seine Fußspitzen betrachtet - was irgendwo in seinem Buche vorkommt - seine Existenz doch nicht so abfällig beurteilen wird.

2) Primär ist es in der Tat nicht. "Das Ich" ist, wie K a n t bemerkt hat, Produkt, nicht Ursprung des Denkens.

Doch wird von unserem Autor der Wahrheitsbegriff bis zum Verschwinden verflüchtigt; jede Auseinandersetzung damit fehlt (ebenso wie der Name von B o l z a n o). Und was Z. über Mathematik sagt (nicht weniges) ist so beschaffen, dass ich auf Kritik ganz verzichten muss. Wie sich auch im Falle von W u n d t gezeigt hat, scheint ein Verständnis der Mathematik in vorgerückteren Jahren nicht mehr erreicht werden zu können.

III.

I n t u i t i o n i s m u s u n d P h ä n o m e n o l o g i e .

Eine gegenwärtig sehr beliebte Abart des Idealismus heisst der Intuitionismus. So wird eine Geistesrichtung genannt, die in ihrem extremsten Vertreter, dem französischen Philosophen H. B e r g s o n, das Verstandesmässige zur Seite schiebt und vermeint, alles Erdenkliche "intuitiv" erfassen zu können.

Unter Intuition ist hier ein unmittelbares, also nicht durch Schlüsse und Begriffe vermitteltes, Erfassen gewisser Einsichten zu verstehen.

Ein solches Denkverfahren ist möglich und auch unentbehrlich, da die Erkenntnistheorie so wenig als irgendeine andere Disziplin mit einem Nichts beginnen kann. Ich würde lieber nicht das Wort Intuition dafür brauchen, da dieses einen besonderen Akt des "Schauens" impliziert und auch eine verdächtige Nebenbedeutung hat [1]. Das berühmte Cogito, ergo sum ist ein klassisches Beispiel. Wir finden, als erwachsene denkende Menschen, Empfindungen und Vorstellungsinhalte vor. Wir bearbeiten sie mit unserem Verstande und formen daraus unser Weltbild.

---

1) V o l k e l t braucht dafür den Ausdruck Unmittelbare Gewissheit. Verwandt ist S t ö r r i n g's "nicht mehr steigerungsfähige Sicherheit", deren Begriff aber auch das aus unmittelbar-Gewissem Deduzierte umfasst.

Eine vorsichtige Erkenntnistheorie wird jedoch trachten, so weniges als nur möglich als unmittelbar gegeben hinzunehmen. Sie wird nicht darauf ausgehen, Einsichten, die sich auf einfachere zurückführen lassen, ebenfalls unmittelbar erfassen zu wollen. Sie wird mit den Selbsttäuschungen rechnen, die dabei nur allzuleicht vorkommen können. Sie wir der verstandesmässigen Bearbeitung des unmittelbar Gegebenen, Begriffsanalysen, Interpolationen, Hypothesen, Idealisierungen die gebührende Stellung einräumen.

Wenige Intuitionen und diese nur mit Vorsicht zu gebrauchen, ist die Meinung von D e s c a r t e s gewesen, den man demnach wohl als den ersten modernen Erkenntnistheoretiker wird betrachten dürfen. D. wollte, dass die Begriffe, die die Basis des wissenschaftlichen Gebäudes bilden, "einfache Naturen" seien, damit sie als Objekte der Kombination dienen könnten 1).

Bei dieser weisen Beschränkung hätte man es belassen sollen 2). Wäre es dabei geblieben, so wäre heute jeder vorsichtige und umsichtige Erkenntnistheoretiker, wie D e s c a r t e s, "Intuitionist", diese Bereicherung wäre nichtssagend. Ich halte mich an den gegenwärtig üblichen Sprachgebrauch, demzufolge Intuitionisten die heissen, die von Intuitionen viel weitere (nach meiner Meinung unzulässige) Anwendungen machen, wie B e r g s o n und Andere.

Was die Erkenntnistheorie als das Minimum des unmittelbar Gegebenen anzusehen hat, ist nicht leicht zu entscheiden. Zu dem Thema der vorliegenden Schrift gehört es nicht; um so mehr wird eine Verweisung am Platze sein.

Eine Liste der in Betracht kommenden Literatur möchte ich freilich nicht aufstellen. Sie müsste unvermeidlicher Weise lang und doch sehr lückenhaft ausfallen, und sie würde auch, wenn sie nicht von kritischen Auseinandersetzungen begleitet wäre, ja selbst dann, ebenso geeignet sein, den Leser zu verwirren als ihm zu helfen. Ohne anderen trefflichen Forschern zu nahe zu treten, darf ich daher wohl ein einziges Buch nennen:

J. V o l k e l t, Gewissheit und Wahrheit.

---

1) Nach P. B o u t r o u x, 1927, S.198.

2) B o u t r o u x findet daran auszusetzen, dass der Begriff des einfachen Begriffs nicht klar ist. Das ist richtig, kann aber m.E. doch nicht gegen D e s c a r t e s geltend gemacht werden, da sich so etwas nicht allgemein präzisieren lässt, sondern die Entscheidung darüber im einzelnen Falle getroffen werden muss.

Darin wird, nach meiner Meinuhg, der bezeichnete Stoff vielseitig und scharfsinnig, mit einem bei "geisteswissenschaftlichen" Philosophen seltenen Wirklichkeitssinn, dazu in geschmackvoller, nicht mit Kunstworten überladener Sprache, übrigens auch unter eingehender Würdigung abweichender Ansichten, überhaupt gründlich abgehandelt.

Ich weiche von V. in einigen Punkten ab, die mir aber nicht als sonderlich bedeutungsvoll erscheinen. Sie betreffen fast nur die Auffassung der Mathematik.

Im Gegensatz zu dem als notwendig bezeichneten vorsichtigen Verfahren steht die Philosophie von B e r g s o n, die den Hauptbestand aller Wissenschaft geradezu ablehnt. B. glaubt sogar, vermöge liebevoller "Einfühlung" die Triebkräfte der organischen Entwicklung auf unserem Planeten "erschauen" zu können, zu deren Beurteilung doch wahrlich ganz anderes gehört [1].

Die alte Lebenskraft feiert bei B. unter dem Namen élan vital, zu deutsch Lebensschwung, eine Auferstehung - eine unter mehreren in neuerer Zeit [2]. Ein Hang zur Mystik verbindet sich bei diesem Philosophen mit aesthetisierenden und popularisierenden Tendenzen. Es ist eine regelrechte Damenphilosophie entstanden, der es gewiss an Grösse nicht fehlt, die aber trotz interessanter Einzelheiten im Ganzen wohl nicht wissenschaftlich genannt werden kann.

Etwas Ähnliches finden wir auch in Deutschland, zum Teil schon früher (ausgeprägt z.B. bei D i l t e y), besonders in den sogenannten Geisteswissenschaften, als deren eigentliche Methode das intuitive Denkverfahren von einigen angesehen zu werden scheint 3). S p e n g l e r's Untergang des Abendlandes, das Hohe Lied des wissenschaftlichen Dilettantismus, ist allgemein bekannt 4). Aber auch Versuche, das mittelalterliche Denken unserer Zeit wieder aufzupropfen, und allerlei Seelenschnüffelei gehören in diesen Umkreis, eine bunte Gesellschaft.

---

1) L'Evolution créatrice, 1910.

2) E. B. P o u l t o n, D a r w i n and B e r g s o n on the Interpretation of Evolution. Zeitschrift B e d r o c k, 1912. (Eine Erwiderung ist nie erfolgt). Siehe ferner B. R u s s e l l, Our Knowledge of the external World, 1922, und, für den Intuitionismus überhaupt, die Dissertation von W. H a n r a t h s: Über Evidenz und Intuition (Bonn, 1927). Siehe auch die Literaturangaben in den Fortschritten der Mathematik, 1912, S.101.

3) Vgl. Ph. F u n k, Wege der Geschichtsrevision. Hochland, (Freikatholische Monatsschrift) 1927/28.

4) L. N e l s o n, Spuk ( ). G. H e s s e n b e r g, 1922. H. S c h o l z, 1928.

Der Geschichtswissenschaft und der Philologie mit ihren langweiligen Studien von Akten, Handschriften, Palimpsesten geht es überhaupt nicht gut. Die vergleichende Sprachwissenschaft hat eine verdächtige Ähnlichkeit mit der ungeheuer überschätzten Naturforschung. Mühelos erschaut der geniale Blick, was grübelndem Verstande ewig verschlossen bleibt. Immer hatten Laien in der Medizin ausser falschen auch richtige Diagnosen gestellt, also ist das einfache Schauen die wahre Methode. Und so haben wir denn nicht nur eine geisteswissenschaftliche Psychologie 1), sondern auch schon eine Psychiatrie derart, mit einer besonderen Zeitschrift: Der Nervenarzt. Auch der Schulunterricht soll intuitionistisch reformiert werden 2).

Mit der durchaus subjektivistischen Philosophie B e r g s o n's ist eng verwandt die von H u s s e r l, die bereits als "transzendentaler Idealismus" gekennzeichnet worden ist, aber gewöhnlich den spezifischen Namen Phänomenologie führt.

Die Intuition heisst jetzt auch Wesenserfassung oder Wesensschauung - wie in der zeitgenössischen schönen und historischen Literatur - nachdem sie vorher, bei F i c h t e und Anderen, intellektuale Anschauung gehiessen hatte.

Das Wesensschauen ist eine, wie H u s s e r l wenigstens glaubt, neue Forschungsmethode, die, unter anderem, auch auf Mathematik anwendbar sein soll, zum wenigsten auf Geometrie. Es gibt nach diesem Autor ein"reines Wesen des Raumes" 3).

---

1) Siehe darüber G. S t ö r r i n g: Die Frage der geisteswissenschaftlichen und verstehenden Psychologie. Eine Streitschrift. Archiv für die gesamte Psychologie, Bd. 58, 1927. (Auch als Sonderdruck.)

2) Nach Mitteilung einer meiner Kollegen wußte von vier Prüflingen, die diese Art von Unterricht bereits genossen hatten und gute Kenntnisse im Lateinischen hätten haben sollen, nicht einer das Wort votum zu übersetzen. Ein Wort dazu, das als Fremdwort auch unserer Sprache angehört!!

3) Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, Bd.I, 1913, S.133 - 135.
Eine alte Bekanntschaft: Bei K a n t hiess dasselbe reine Anschauung (des Raumes).

Die Phänomenologie ist (oder war bis vor kurzem) in der Hauptsache noch eine Wissenschaft der Zukunft. Die Ansprüche, die H. für sie, also für seinen Intuitionismus, erhebt, sind gleichwohl nicht gering.

Besonders schlimm hat es von jeher um die Philosophie gestanden. Sie hatte - was gewiss richtig ist - Raum für eine Menge "privater Meinungen", "Anschauungen", "Standpunkte". Hier ist nun die Phänomenologie berufen, endgültig Wandel zu schaffen. Alle bisherige Philosophie war von Grund auf verkehrt. An den wichtigsten Problemen ist sie vorbei gegangen. Es fehlt eine "Wesenserkenntnis des Bewusstseins". Ohne eine solche Phänomenologie des "reinen" Bewusstseins ist alle naturwissenschaftliche und psychologische Erkenntnistheorie geradezu widersinnig!!

Die neue Disziplin ist also nicht etwa ein Stück Psychologie. Sie ist vielmehr von dieser, ganz besonders aber von der experimentellen, durch eine tiefe Kluft getrennt. Sie verlangt eine ganz andere Einstellung und Methodik, nämlich (wie bei B e r g s o n) die Methode des Schauens - keine leichte Sache!! Wer aber diese Schwierigkeit einmal überwunden hat, der wird belohnt durch den Besitz einer neuen, beispiellos folgenreichen(!), apriorischen Grundwissenschaft, die erst die Voraussetzungen gibt für eine vollwissenschaftliche Psychologie und Erkenntnistheorie, ja für alle Wissenschaft (also auch für die Mathematik) 1).

Das sind grosse Worte - aber wie steht es nun um die Rechtfertigung der geübten ungeheuer abfälligen Kritik, und um die Einlösung der gemachten Versprechungen?

Worin der angebliche Widersinn der bisherigen Psychologie und Naturwissenschaft begründet sein soll, erfahren wir nicht. Jede sachliche Auseinandersetzung mit abweichenden Meinungen, die in solchem Falle doch wohl als unerlässlich betrachtet werden muss, fehlt. Insbesondere wird die gesamte realistische Literatur von H. (und ebenso von seinen Schülern) vollständig ignoriert 2). Wie die Grenzlinie von Phänomenologie und Psychologie gezogen werden soll, ruht in tiefem Dunkel. Nicht einmal die Grundbegriffe der neuen Disziplin werden erklärt, ja, es werden solche Erklärungen, als angeblich unmöglich, geradezu abgelehnt. Jede "Nachahmung des mathematischen Verfahrens" soll in der Philosophie nicht nur unfruchtbar, sondern verkehrt und von den schädlichsten Folgen sein! 3) Es wird dem Leser also zugemutet, zu erraten, was mit zahlreichen, zum Teil neuen, zum Teil in neuerem Sinne gebrauchten Worten gemeint ist. Und nicht einmal ein terminologisches Inhaltsverzeichnis hat H. seinen Büchern beigegeben, um dem Leser eine äusserst unangenehme, ja genau genommen unlösbare Aufgabe etwas zu erleichtern.

---

1) E. H u s s e r l, Philosophie als strenge Wissenschaft. Zeitschrift Logos, Bd.I. 1910/11, S.289 - 316. Ideen, S.1.

2) Hierüber hat schon V o l k e l t geklagt (1918, S.449 ff). "An den Ausführungen der Phänomenologie fällt vor allem der Ton unbedingter Sicherheit auf... So etwas wie Gegenbeweise oder anderslautende Erfahrungen kann es nicht geben. Für einen Phänomenologen lebt jeder Andersdenkende schlechtweg ausserhalb der Wahrheit".

3) Ideen, S.6.

Richtig ist ja, dass derartiges in der philosophischen Literatur keine Seltenheit ist. Aber das rechtfertigt nicht im mindesten ein solches Verfahren.1). Es hat doch wohl ein Jeder das Recht, alles, was in einer solchen Sprache geschrieben ist, einfach zur Seite zu schieben. Ich habe mich gleichwohl darum bemüht, um dem Vorwurf der Oberflächlichkeit zu entgehen, so wohlfeil es auch in diesem Falle sein würde. Aber das Ergebnis ist Null gewesen.

Am besten geht es wohl noch mit dem Worte Phänomen. Dieses ist jedenfalls nicht zu deuten als "Erscheinung" im Sinne von K a n t und namentlich H e l m h o l t z, als Erscheinung, hinter der notwendig "ein Ding" steht. Vielmehr bezeichnet es ein dem Subjekt vor allem Denken Gegebenes, einen unmittelbar aufzuweisenden Bewusstseinsinhalt, ohne notwendige Beziehung auf die Aussenwelt des Subjekts.

Der zweite Grundbegriff der Phänomenologie führt den Namen Wesen.

Der Sinn des Wortes Wesen ist schon im gemeinen Sprachgebrauch wenig klar. Abgesehen von Bedeutungen, die hier nicht in Betracht kommen (Lebewesen, Göttliches Wesen, Armenwesen u.s.W.) kann man jedoch zu Ausdrücken wie Wesen des Staates, der Religion, des Liberalismus, der Mathematik, bemerken, dass es einen Komplex von Eigenschaften bezeichnet, die an einem Gegenstand des Denkens bemerkt werden und für ihn "wesentlich", d.h., die Hauptsache daran sind oder wenigstens dafür gelten. Dies ist der Begriff des Aristotelischen,(nicht Platonischen)Eidos, und in der Tat heisst das "Wesen" bei H. auch Eidos. Wirklich meint ein Beurteiler, dass dies der Sinn des Wortes Wesen bei H. sei.2). Bei näherem Zusehen findet man indessen, dass das nicht ganz stimmen kann. Ein Gattungsbegriff scheint das Wesen immerhin zu sein.

Wir erfahren von dem Wesen, dass es verschiedene Eigenschaften hat und andere nicht. Es ist"ein neuartiger Gegenstand"3), also doch nicht identisch mit dem Aristotelischen Eidos. Mit individuellem Dasein hat es gar nichts zu tun 4). Es bezeichnet gleichwohl "zunächst" das "im selbsteigenen Sein des Individuum als sein Was Vorfindliche". Nachher kann es "in Idee gesetzt werden": Wesensschau ist auch "Ideation" 5).

Das Wesen macht also einen Entwickelungsprozess durch. Zuerst ist ein Was und dann eine Idee.

Ferner haben alle"Phänomene" ein durch unmittelbares Schauen und nur auf diese Art (wie bei B e r g s o n) adäquat

---

1) Man lese, was (in § 668) der sonst so milde B o l z a n o dazu sagt. Es heisst dort unter anderem: Ein solches Benehmen, mag es auch noch so gebräuchlich sein, ist und bleibt eine wahre Versündigung an den Lesern. Siehe auch § 644 und 661.

2) A l o y s M ü l l e r, Einleitung in die Philosophie, 1925, S.67.

3) Ideen, S.10.

4) Logos, S.314. Ideen, S.13.

5) Ideen, S.10.

(gelegentlich aber auch nicht-adäquat) fassbares Wesen 1). Diese Wesensschau ist ein "originär gebender Akt", der sich auf ihr "Gegebenes", das "reine Wesen" bezieht 2). Jede Tatsache schliesst einen "materialen Wesensbestand" ein, und jede zu diesem "reinen Wesen" gehörige "eidetische Wahrheit" muss ein Gesetz abgeben, an das die gegebene faktische Einzelheit, wie jede mögliche überhaupt, gebunden ist 3). Jede Tatsachenwissenschaft (Erfahrungswissenschaft) hat "wesentliche" theoretische Fundamente in "eidetischen Ontologien" 4).

Was auch immer nun das geheimnisvolle Wort bedeuten mag, zweierlei ist gewiss: Erstens, dass wir aus dem Psychologischen nicht hinausgekommen sind, und zweitens sogar, dass wir mitten im Psychologismus stehen. Was wir in dem hervorgehobenen Satz vor uns haben, ist ja die anthropozentrische These K a n t's, derzufolge die Dinge der Welt sich nach "unserem" Erkenntnisvermögen richten müssen (S.00). Insbesondere ist für die Geometrie (die der Alten) Wesensschauung der letztbegründende Akt 6). Sie ist die "auf ein Wesensmoment von Dinglichkeit", "die Raumform", bezogene "ontologische Disziplin" 6). Ich frage mich mit Erstaunen, wie der Verfasser der Logischen Untersuchungen, Bd.I es fertig bringt, den Inhalt der Geometrie aus menschlichem Erleben, "Akten", abzuleiten? Wird die Geometrie da nicht mit dem Erkennen des Geometrischen verwechselt?

Ausser Begriffen, die ein Wesen haben, gibt es ferner auch solche, die ein Wesen sind 7). Dahin gehören zum Beispiel: Wahrnehmung, Phantasie, Urteil, Gefühl, Wille, Farbe und Ton, aber auch Zahlen werden gelegentlich als solche "Wesen" bezeichnet 8), und einige der genannten gehören bald in diese, bald in jene Kategorie 9). Alle diese Wesen aber sind etwas im echten Wortsinn Apriorisches 10).

Das Wort Farbe bezeichnet einen Begriff, für den es in manchen primitiven Sprachen nicht einmal ein Wort gibt. Wir dürfen wohl annehmen, es seien konkrete Farben gemeint, etwa Rot oder Grün. Wie aber sollen diese Vorstellungen apriorisch sein, wenn der Blindgeborene sie gar nicht hat?! Werden da nicht die Begriffe apriorisch und nicht-definierbar verwechselt? Und ist es denn richtig, dass "Phantasie" nur erschaut werden kann, sich nicht erklären lässt?

Dieses alles ist offenbar sehr wenig durchdacht. Der darin hervortretende Missbrauch der Sprache aber wird noch weit übertroffen. Wir werden geradezu mit Kunstworten überschüttet, deren nicht eines ordnungsgemäß erklärt und noch weniger motiviert ist.

---

1) Logos, S.314, 316. Ideen S.10.
2) Ideen, S.11. In Band II der Logischen Untersuchungen (1913, S.18) vergleicht H. die Wesensschau mit K a n t's reiner Anschauung, von der wir sehen werden, dass sie gar nicht existiert.
3) Ideen, S.18.
4) Ideen, S.19. Auch über den Sinn, den H. mit dem Wort Ontologie verbindet, habe ich nicht in's Klare kommen können. Vielleicht Erlebnisstrom (eines Subjekts). Vgl. B e c k e r, 1927.
5) Ideen, S.17. 6) Ideen, S.20. 7) Logos, S.315.
8) Ideen, S.42. 9) Logos, S.315 ~~xxxxxxxx~~, 316 (Wahrnehmung) Logos, S.315 und Ideen, S.9 (Ton).
10) Logos, S.314, vgl. Ideen, S.6.

So finden wir auf einer einzigen Seite: Materiales Wesen, Oberste materiale Gattung, reines regionales Wesen, regionale eidetische Wissenschaft, regionale Ontologie, notwendige Materiale Form 1). Es gibt, um noch eine paar Beispiele anzuführen, "ein Reich der Positionalität, wo thetisches Bewusstsein jeder Gattung unter Namen steht" 2), und "In der formalen apoplantischen Noetik ist die Einstellung noetisch"3). Zu solchen terminologischen Orgien kommen schliesslich auch noch Vorstellungen greifbar mystischen Charakters. § 49 der "Ideen" ist überschrieben: Das absolute Bewusstsein als Residuum der Weltvernichtung!

In Summa: Die Phänomenologie ist eine"Standpunktphilosophie" gleich vielen anderen, und zwar die Philosophie eines schlecht motivierten, undeutlich bezeichneten und schwankenden Standpunktes. Eine Scheinwissenschaft, deren sogenanntes Verständnis nur durch Kontaktwirkungen und sonstige suggestive Einflüsse erreicht werden kann.

Nehmen wir indessen einmal an, wir wüßten, was Wesen ist oder sind, so würden auch dann noch Fragen zu stellen sein.

Welche sind die Regeln der Wesensschau, oder gibt es keine? Warum muss, was der eine erschaut hat, auch der andere erschauen können? Oder steht es vielleicht so wie mit religiösen Offenbarungen, die nicht jeder hat? Welche Sicherheit besteht, dass wir das Erschaute existiert, oder dass wenigstens nichts Nebensächliches erschaut und für wesentlich gehalten wird? U. s. w. 4)

Man bedenke: Es ist noch gar nicht lange her, dass alle Sachverständigen darin einig waren, dass die chemischen Eigenschaften eines Elementes durch sein Atomgewicht bestimmt sind. Nicht Wesensschauerei, sondern eine sehr ausgedehnte und ernsthafte Arbeit von Generationen von Forschern hatte diese Meinung entstehen lassen und gefestigt. Und doch hat sich schliesslich gefunden, dass sie nicht richtig ist, dass das für die Chemie "Wesentlichste" an einem Element zwar wirklich von einer Zahl, aber von einer anderen Zahl abhängt, die das Atomgewicht nicht immer eindeutig bestimmt. Wie können, angesichts eines derartigen Sachverhaltes, die Wesensschauer uns zumuten, dass wir das von ihnen angeblich Erschaute auf ihr ehrliches Gesicht hin glauben, dass wir Entdeckungen bewundern sollen, die sie selbst nicht einmal in einer wissenschaftlichen Sprache darzustellen vermögen?

Bis die von H, lediglich autoritativ abgegebenen Pauschalurteile begründet, die Widersprüche seiner Theorie weggeschafft und unvermeidliche Fragen beantwortet sein werden, bis also alles geklärt und in eine berechtigten Ansprüchen genügende Form gebracht sein wird, dürfen wir ~~nicht~~ wohl glauben, dass "das gemeine Pack der gewöhnlichen Begriffe" für die Wissenschaft ausreicht 5).

---

1) Ideen, S. 20.
2) Ideen, S. 299.
3) Ideen, S. 307.
4) Vgl. O. K ü l p e, Vorlesungen über ~~Logik~~ Logik, herausgegeben von O. S e l z, 1923, S.149.
5) Vgl. Ideen, S.157. H. druckt dort eine Stelle aus der Erkenntnistheorie Z i e h e n's (S.413) ganz einfach ab, als ob es sich von selbst verstände, dass wer ihm widerspricht, im Unrecht sein muss. Der Phänomenologe steht eben jenseits aller Kritik. (Vgl. S.00, Anmerkung).

H. beklagt sich wiederholt über Missverständnisse seiner Kritiker, auch wohlwollender Beurteiler, dieer der Oberflächlichkeit bezichtigt. Ganz zu vermeiden sind Missverständnisse natürlich nicht, aber die hier besprochene "Philosophie" scheint eigens dazu geschaffen, missverstanden zu werden.

Übrigens wird die Übertreibung des Schauen-Wollens auch schon von B o l z a n o kritisiert, wenn auch in anderem Zusammenhang (§ 315, Anmerkung). -

An die Phänomenologie H u s s e r l's schliessen sich noch ganz ähnliche Ausführungen anderer Autoren an, von denen nur noch das Neueste kurz besprochen werden soll. Es ist enthalten in einem noch unvollendeten Werke von M. H e i d e g g e r, Sein und Zeit. (I, 1927).

In diesem Buch wird auf den ersten Seiten die Frage nach dem Sinn vom Sein gestellt. Was hat nun diese Frage selbst für einen Sinn, was ist gemeint damit? Was für einen "Sinn" hat z.B. von Kugelsternhaufen? Welchen "Sinn" hat unsere eigene Existenz? Existenz
Darf man an die grosse Gesetzgeberin Natur solche Fragen stellen? Was denkt sich also unser Philosoph bei dem Worte Sinn?

Bisher hatte man gemeint, dass Worte, Sätze und Willenshandlungen sinnvoll sein könnten oder nicht. Weit gefehlt! Denn auf Seite 151 lesen wir:

> Sinn ist das durch Vorhabe, Vorsicht und Vorgriff strukturierte Woraufhin des Entwurfs, aus dem her etwas als etwas verständlich wird!!

Nachdem wir so lange im Dunkeln herumgetappt waren, wissen wir nun endlich, was "Sinn" ist; wonach sich die Verfasser von Wörterbüchern der deutschen Sprache in Zukunft zu richten haben werden. Wir fangen pflichtschuldigst wieder von vorne an, und lesen dann noch ein Stückchen weiter:

> S.42: Das "Wesen" des Daseins liegt in seiner Existenz.
>
> S.54: "In-Sein ist... der formale existenziale Ausdruck des Seins des Daseins, das die wesenhafte Verfassung des In-der-Weltseins hat".
>
> S.350: Die Zeitlichkeit zeitigt sich in jeder Ekstase ganz, d.h. in der ekstatischen Einheit der jeweiligen vollen Zeitigung der Zeitlichkeit gründet die Ganzheit des Strukturganzen von Existenz, Faktizität und Verfallen, d.i. die Einheit der Sorgestruktur.

" Ein Mysterium, das nur
Von demjenigen wird verstanden,
Der entflohen ist dem Kerker
Der Vernunft und ihren Banden. "

Übrigens schadet selbst so etwas einem deutschen Philosophen gar nichts. Wir sind schon an allerlei gewöhnt. Je dunkler und verschrobener, desto besser. Man nennt das tief. Gegenwärtig und bis auf weiteres nimmt der Nachfolger H u s s e r l's die vor Kurzem vakant gewordene Stellung eines Modephilosophen ein.

Ich habe auch noch diesen Philosophen kurz charakterisiert, weil auf ihn von O. B e c k e r, der sein und H u s s e r l's Schüler oder Kollege ist, im Zusammenhang mit Mathematik verwiesen wird.

Das Betrüblichste ist natürlich, dass solche Abgeschmacktheiten Schule machen dürfen. Die besten Köpfe unter unseren Studierenden werden abgeschreckt. Sie erhalten die philosophische Bildung nicht, die sie dringend nötig haben. Viele andere sind kritiklos und suggestibel. Diese fallen der Phrase zum Opfer. Dem gegenständlichen Denken werden sie für immer entfremdet.

Den von H u s s e r l erhobenen Ansprüchen, soweit sie sich auf Mathematik beziehen, stelle ich die These gegenüber: Alles, was sich über mathematische Gebilde sinnvoll sagen lässt, wird durch Aussagen mathematischer Natur erschöpft. Mit "Phänomenen" und einem solchen eigentümlichen "Wesen", das besonders "erschaut" werden müsste, mit "Intentionalitäten" und dergleichen hat die Mathematik gar nichts zu tun.

Dies gilt in vollem Umfang auch von aller richtig verstandenen Geometrie, die ein Stück Mathematik ist wie andere, und weder von "Bewusstseinsströmen", noch von Daten abhängt, die aus der Sinneswelt stammen 1).

Von dem erkenntnistheoretischen Idealismus unterscheidet sich der (kritische) Realismus unter anderem darin, dass ihm anthropozentrische Vorurteile gänzlich ferne liegen 2). So wenig er einen brauchbaren Gedanken darin finden kann, dass "alles" Kraft und Stoff oder etwa "Empfindungskomplex" ist, so wenig kann er einsehen, dass "alles Geist" oder "im Grunde Geist" ist. Diese an den Naturwissenschaften erstarkte Denkart versucht ernstlich, die Forderung der Objektivität überall zur Geltung

---

1) Auch nach S c h l i c k ist das Gegenteil hiervon richtig. Ich hatte die Stelle schon zitiert: Allgemeine Erkenntnislehre, 1918, S.301. Von einer Kritik anderer damit zusammenhängender Unklarheiten sehe ich ab.

2) Siehe meine realistische Weltansicht (1923), besonders Abschnitt VII.

zu bringen. Die Unterschiede von Idealem, Psychischem, Materiellem erscheinen ihm so gross, dass an eine auch nur partielle Reduktion der einen auf das andere nicht einmal gedacht werden kann. Psychologistische Ideenbildungen können hier gar nicht auftauchen.

Von einer naiven Auffassung der Welt, die Körperding und Erscheinung nicht zu trennen weiss, hat freilich auch der wissenschaftliche Realismus sich entfernt [1]. Aber gerade dieses ist eine augenscheinlich nötige und durch alle wissenschaftliche Erfahrung ebenso wie durch die Praxis des Lebens von Kulturmenschen gerechtfertigte ~~Erscheinung~~ Unterscheidung. Daher hatte ich mir, bei früherem Anlass, die unartige Bemerkung erlaubt, man müsste den (kritischen) Realismus die Philosophie des gesunden Verstandes nennen, wenn es rätlich wäre, eine Benennung von etwas herzuleiten, das so selten ist und dazu in so geringem Ansehen steht. Dieser gesunde Verstand aber ist das, was ich in den Lehrmeinungen nicht weniger Philosophen vermisse [2], und leider auch bei manchen Mathematikern vermissen muss. Doch davon später. In dem gesamten Intuitionismus aber muss ich das erblicken, was H u s s e r l in der bisherigen Philosophie - in aller Philosophie [3] - hat finden wollen, nämlich eine ernstliche Kulturgefahr, der wir zum Teil schon erlegen sind. Alle im Rückschreiten und in der Auflösung begriffenen Epochen sind subjektiv; dagegen haben alle vorschreitenden Epochen eine objektive Richtung, sagte G o e t h e [4].

---

1) Ebenda, Abschnitt IV.
2) R. W., S.67, 68.
3) Logos, S.293.
4) Gespräch mit E c k e r m a n n, 29. 1. 1826.

IV.
Der Existenzbegriff der Mathematik.

Nach Platon ist Gegenstand der Mathematik die Erkenntnis von etwas, das immer ist, und nicht von etwas, das entsteht und vergeht [1], also gewiss nicht von etwas, das nur in unseren, einiger Menschen, Köpfen existiert. Eben dieser Meinung scheinen alle Mathematiker des Altertums gewesen zu sein.

Dieser Satz rührt von Eudoxos her, sagte Archimedes. Eigentlich war er schon immer da, nur hat ihn Eudoxos zuerst ausgesprochen [2].

Danach hat der grösste Mathematiker des Altertums dem Inhalte mathematischer Aussagen (natürlich richtiger Aussagen) eine Art von Existenz zugeschrieben; wie wir sagen würden, eine "Existenz", ein Dasein, das dem Dasein physischer und psychischer Gegenstände unseres Denkens verwandt, aber von diesen Arten des Daseins ebenso verschieden sein muss, wie sie selbst untereinander verschieden sind; ein Dasein, das wir mithin als ein Dasein neben dem Physischen und Psychischen (μετὰ τὰ φυσικὰ καὶ ψυχικά), kürzer, in üblicher Ausdrucksweise, als ein metaphysisches Dasein werden bezeichnen dürfen.

---

1) Vom Staat, Abschnitt VII. Natürlich bezieht sich dieser Ausspruch auf das, was P l a t o n von "Mathematik" bekannt war. Auch für uns darf das vorläufig genügen - um so mehr, als P l a t o n's Satz auf die später (in Abschnitt XI) zu versuchende allgemeine Definition des Mathematischen ebenfalls passt.

2) Siehe die Ausgabe von H e i b e r g, Zweite Auflage, I. S.2. Auf diese Stelle hat mich mein Kollege T o e p l i t z hingewiesen. Es ist nur wiedergegeben, worauf es hier ankommt, und auch das nur dem Sinne nach, in dem von T. gewählten Wortlaut. (Es handelte sich um das Verhältnis des Volumens einer Kugel zum Volumen ~~einer~~ des umschriebenen Zylinders.)

IV.

Der Existenzbegriff der Mathematik.

Durch Platon ist Gegenstand der Mathematik die Erkenntnis von etwas, das immer ist, und nicht von etwas, das entsteht und vergeht [1]. Also gewiss nicht von etwas, das nur in unseren, einiger Menschen, Köpfen existiert. Eben dieser Meinung scheinen alle Mathematiker der Altertums gewesen zu sein.

Dieser Satz stammt von Sokrates her, seine Anschauung. Einerlei wer er schon immer da, nur hat ihn Sokrates zweifellos ausgesprochen [2].

Danach hat der grösste Mathematiker des Altertums den ihm heute mathematischer Aussagen (natürlich richtiger Aussagen) eine Art von Existenz zugeschrieben; wie wir sagen würden, eine "Existenz", ein Dasein, das dem Dasein physikalischer und psychologischer Gegenstände unserer Denkens verwandt, aber von diesen Arten des Daseins ebenso verschieden sein muss, wie sie selbst untereinander verschieden sind; ein Dasein, den wir mithin als ein Dasein neben dem physischen und Seelischen (Psych. ed. Jaeger) Reiner, in Ideiner Anschauungswelt, als ein metaphysisches Dasein werden bezeichnen dürfen.

---

1) Vom Staat, Abschnitt VII. Natürlich bezieht sich dieser Ausspruch auf das, was P l a t o n von "Mathematik" bekannt war. Auch für uns darf das vorläufig gelten - um so mehr, als P l a t o n's Sätze auf die später (in Abschnitt XI) zu verfolgende allgemeine Definition des Mathematischen ebenfalls passt.

2) Siehe die Ausgabe von H e i b e r g, Zweite Auflage, I. S.8. Auf diese Stelle hat mich mein Kollege T o e p l i t z aufmerksam gemacht, wofür ich ihm hier bestens danke. Er ist nur wiedergegeben, worauf es hier ankommt, und auch das nur den Sinne nach, in den von I. gewählten Vorlauf. (Es handelte sich um das Verhältnis des Volumens einer Kugel zum Volumen eines des umschriebenen Zylinders.)

Bekanntlich verdankt das Wort Metaphysik seine Entstehung einem zufälligen Umstand. Wir könnten auch von einem metaphysischen Dasein reden. Dass das Wort Metaphysik zufolge vielen Missbrauches einen sehr üblen Beigeschmack bekommen hat, weiss ich. Ich empfehle es vorurteilslosen Kritikern zum Zwecke der Verrichtung der im vorliegenden Buche enthaltenen Lehren.

Der Begriff des Existierens, Seins, Daseins, lässt sich nur einigermaßen, nämlich "deiktisch" erklären, durch Verweisung auf etwas, dem "Dasein" bereits zugestanden wird. Es muss dabei angenommen werden, dass der Empfänger der Mitteilung bereits weiss, was sonst mit Worten wie Dasein, Existieren, "Es gibt" gemeint ist, dass er also die angezogene Vergleichung versteht (R. W. S.33, 45). Wenn Jemand sagt "Es gibt Gespenster", so versteht ein Jeder richtig, auch wenn er die Sache bezweifelt. Im vorliegenden Falle aber kann es sein, dass Jemand behauptet, gar nichts zu verstehen. Dann wird nicht viel zu machen sein. Man kann ihn höchstens fragen, wie denn nun er die Existentialsätze der Mathematik ausdrücken will, und welchen Erfolg er von den dann vorzuschlagenden Änderungen der mathematischen Kunstsprache erwartet.

Ein neurer Philosoph. O. K r a u s, hat für das, was eben als Begriffsstutzigkeit hingestellt worden ist, einen witzigen Ausdruck gefunden:

"Es gibt keine Zahlen, sondern nur Mathematiker".

Wie schade, dass solche Perlen des Humors in Geschichtsbüchern der Philosophie niemals zu finden sind!

A r c h i m e d e s muss, nach unserer heutigen Terminologie, mindestens in Bezug auf das Mathematische, Realist gewesen sein [1]. Er muss ein "Reich idealer Gegenstände" angenommen haben, zu denen jedenfalls geometrische Figuren, wie er sie betrachtet hatte, zu rechnen sein werden, aber auch Zusammenhänge von solchen (auf die sich geometrische Lehrsätze beziehen), und nicht minder Zahlen und Zahlenkomplexe, sowie Zusammenhänge von solchen (Gegenstände zahlentheoretischer Lehrsätze), sowie überhaupt Zusammenhänge idealer Gegenstände, die in unserem Denken sich als logische Abhängigkeiten spiegeln und selbst auch ideale Gegenstände sind. Wir unterscheiden diese Tatsächlichkeiten, wie es nötig ist, von solchen, die in den "Reichen" des Psychischen

---

1) Ebenso P l a t o n, weshalb man auch schon von einem "Platonischen" Realismus gesprochen hat. P l a t o n war aber nur in dieser Hinsicht Realist, in anderer Mystiker.

und Physischen sich finden, wie natürlich auch diese voneinander. Und wir legen den genannten idealen Gegenständen ganz ebenso wie psychischen und physischen das Prädikat der Wirklichkeit oder Realität bei, was nur andere Ausdrucksformen für die ihnen bereits zugeschriebene Existenz sein sollen.

Wegen des sonstigen Gebrauchs von Worten wie Sein, Dasein, Existenz, Wirklichkeit, Realität - die ich sämtlich als äquivalent gelten lasse - siehe A. D y r o f f, Über den Existenzialbegriff, 1902.

Den griechischen Gelehrten, heisst es bei P. B o u t r o u x (1927, S.75) schienen mathematische "Wesenheiten" ebenso wirklich oder wirklicher als die sinnlich wahrnehmbaren Dinge. Wenn derselbe Autor aber meint, sie hätten keine guten Algebraiker sein können, weil sie das Mathematische durch Intuition erfassen wollten und also nicht bereit sein konnten, die Wirklichkeit zu vergessen und nur mit Symbolen zu operieren, so tut er ebensowohl den Griechen Unrecht als auch der Algebra, die sich gewiss der Symbole bedient und bedienen muss, aber keineswegs in einem Operieren mit blossen Symbolen besteht. Hierauf wird später noch zurückzukommen sein.

Die Ansicht von der absoluten Existenz des Mathematischen (insbesondere der natürlichen Zahlen) ist, wie es scheint, nicht nur die Ansicht des gesamten klassischen Altertums gewesen, sondern auch vieler Neuer, ja wahrscheinlich, durch mehr als zwei Jahrtausende, aller Mathematiker. Nur unter dieser Voraussetzung hat es ja einen Sinn, die Mathematik als einen Forschungsgegenstand zu betrachten (wie es tatsächlich alle Mathematiker tun). Nur unter dieser Voraussetzung gibt es die Möglichkeit einer objektiven Erkenntnis [1].

Was Menschen geschaffen haben, kann niemals im gleichen Sinne Gegenstand der Forschung sein wie Gegenstände der Natur oder der Mathematik. Aus keinem Kunstwerk, keiner Dichtung, kann mehr herausgeholt werden als was vorher hineingesteckt worden war. Studieren wir die Wirkung einer Maschine, so studieren wir

---

1) Wegen der Mathematik der Griechen siehe auch H. H a s s e und H. S c h o l z, 1928, besonders den Anhang von S c h o l z.

die Naturgesetze, die sich in ihr äussern. Wir kritisieren aber dann immer nur das, was sie uns leisten soll. Und auch nur so wie etwa die Beschreibung eines Naturobjekts, können wir die mathematische Produktion kritisieren. Es wäre ganz sinnlos, die Gegenstände der mathematischen Forschung, etwa die Primzahlen, selbst einer Kritik unterwerfen zu wollen.

Nur in das Interesse, das wir an diesem oder jenem nehmen und an anderem nicht, geht das Subjekt ein.

Mit dem Gesagten übereinstimmende Äusserungen werden sich wahrscheinlich, auch aus neurer Zeit, manche finden lassen. Eine zum mindesten sehr ähnliche Ansicht finden wir bei D e s c a r t e s, und genau dieselbe bei Ch. H e r m i t e:

> "Es gibt, wenn ich mich nicht täusche, eine ganze Welt, ebenso existent wie die Welt der physikalischen Wirklichkeiten, die aus der Gesamtheit der mathematischen Wahrheiten besteht, und zu der wir nur mittels des Verstandes Zugang finden können. Beide sind von uns unabhängig, beide sind göttlichen Ursprungs ...[1]

Eben dieses war, wie deutlich zu erkennen ist, auch die Meinung von G. C a n t o r [2] und auch L. K r o n e c k e r hat den natürlichen Zahlen einen göttlichen Ursprung zugeschrieben. In dem, worauf es uns ankommt, - allein ankommt - stimmen diese Autoren überein: Die Welt der Zahlen (und mit ihnen die Mathe-

---

1) Zitiert nach P. B o u t r o u x, 1927, S.196, der auf D a r b o u x verweist.

2) Eine Mitteilung von P o i n c a r é (1913, S.60) lässt H e r m i t e die C a n t o r'sche Theorie aus theologischen Gründen ablehnen. Das beruhte aber auf einem Missverstehen der Meinung C a n t o r's. Später soll H. zu einem Bewunderer der Lehre C.'s geworden sein.
Wegen der Ansichten von D e s c a r t e s, die hier, so interessant sie sind, nicht besprochen werden können, sei auf die Schilderung von P. B o u t r o u x verwiesen.

matik) ist nicht ein menschliches Produkt.

Wer die Mathematik von der mathematischen Literatur zu trennen weiss, wer den Inhalt eines Lehrsatzes nicht mit seinem Gedachtwerden oder gar mit Sprachformen verwechselt, wer einen Unterschied zwischen Richtig und Falsch anerkennt, wer einen Unterschied der Wahrheit von ihrem Gegenteil, wer von Entdeckungen in der Mathematik spricht: Alle diese müssen, so scheint es mir, im Mathematischen etwas Objektives, Seiendes, Wirkliches erblicken.

Sie alle sollten sich dazu entschliessen können, dem Mathematischen (und Logischen) ein Dasein - ein transsubjektives Dasein - zuzusprechen; ein Dasein überdies, das von allem Menschlichen, und selbst vom Dasein irgendwie beschaffener, erkennender Subjekte, ebenso unabhängig ist wie Sonne, Mond und Sterne.

Dem Worte Mathematik haftet leider eine gewisse Mehrdeutigkeit an. Laien verstehen darunter, sogar sehr häufig, ein ihnen verhasstes Formelwerk. Worte wie Physik, Botanik, Geschichte haben eine deutlichere Prägung. Sie bezeichnen ein Wissen von etwas, nicht den Gegenstand dieses Wissens. Dies war der Wortsinn von μάθημα (von μανθάνειν , Lernen). Im heutigen Sprachgebrauch, und auch schon in dem der Griechen, bezeichnet Mathematik (μαθηματική) nicht ein mehr oder minder Zufälliges und vielleicht nicht einmal richtiges "Wissen" um Mathematisches, sondern den Gegenstand dieses Wissens selbst. So brauche auch ich das Wort.
Das Zählen ist (psychologisch) der Anfang alles "Mathematisierens" (Wort von O. B e c k e r), aber, wie mir scheint, nicht (logisch) Anfang der Mathematik. Hiervon wird noch die Rede sein.

Transsubjektiv nenne ich mit V o l k e l t alles, was unabhängig ist von dem jeweiligen Bewusstsein des erkennenden Subjekts, alles mithin, was nach Hinwegnahme dieses Bewusstseins weiter besteht. Das Gegenstück dazu ist Immanent (im Bewusstsein bleibend). Die Aussenwelt des Subjekts und Alles Mathematische sind transsubjektiv, unsere Empfindungen, Gefühle und Denkakte sind immanent.

F Etwas

Andere brauchen für transsubjektiv das Wort transzendent (G. C a n t o r transient) F für das Erkennen Apriorisches, zu dem die Mathematik gehört, nennan K a n t und die Kantianer tranzendental.

Wer den transsubjektiven Charakter des Mathematischen (und überhaupt Erkennbarkeit und Mitteilbarkeit von Transsubjektivem) nicht zugeben wollte, (der Solipsist), für den hätte der Appell an die fremde Persönlichkeit und an eine bei ihr vorauszusetzende Fähigkeit logischen Denkens keinen vernünftigen Sinn. (Dass diese Fähigkeit bei manchen Menschen schwach entwickelt ist, geht uns hier nichts an.) Alle Schriftstellerei wäre für ihn ein Spiel, vergleichbar dem Spiel von Kindern oder jungen Kätzchen, die mit sich selbst spielen.

Nehmen wir an, dass jener Satz des Eudoxos, von dem Archimedes sagte, dass er "immer" dagewesen sei, nie gefunden worden wäre - dass es vielleicht auf unserer Erde nicht einmal Lebewesen gebe, wie es auf dem Mond gewiss keine gibt, so würde der darin festgestellte Sachverhalt dennoch bestehen, eine Wahrheit, eine Wirklichkeit sein, "da sein".

Eben dieses hatte H. L o t z e, nicht gerade in Bezug auf Mathematik, sondern in Bezug auf das Wahre oder Richtige, das Objektive überhaupt, mit folgenden wohldurchdachten Worten zum Ausdruck gebracht:

W i r a l l e s i n d ü b e r z e u g t, i n d i e s e m A u g e n b l i c k e, i n w e l c h e m w i r d e n I n h a l t e i n e r W a h r h e i t d e n k e n, i h n n i c h t e r s t g e s c h a f f e n, s o n d e r n n u r a n e r k a n n t z u h a b e n; a u c h a l s w i r i h n n i c h t d a c h t e n, g a l t e r u n d w i r d g e l t e n, a b g e t r e n n t v o n a l l e m S e i e n d e n,

v o n d e n D i n g e n s o w o h l a l s v o n u n s, u n d g l e i c h v i e l, o b e r j e i n d e r W i r k l i c h k e i t d e s S e i n s e i n e e r s c h e i n e n d e A n w e n d u n g f i n d e t o d e r i n d e r W i r k l i c h k e i t d e s G e d a c h t w e r d e n s z u m G e g e n s t a n d e i n e r E r k e n n t n i s w i r d.

(L o t z e's Logik, Zweite Auflage, 1880, und Neue Ausgabe 1912, Nr.318).

Dieses Zeugnis ist besonders bemerkenswert, weil es von einem idealistischen Philosophen herrührt, von dem der Herausgeber, G. M i s c h mit Recht sagen konnte: Es ziehe sich durch L o t z e's W e r k bis zu Ende die Tendenz, Unvereinbares zu harmonisieren, um die Bedürfnisse des Gemüts in einer theistischen Weltansicht zu befriedigen (S.XX). An entscheidenden Punkten wird L o t z e, gleich anderen solchen Philosophen, zum Realisten - wie es nicht anders sein kann.

Natürlich wird von L o t z e (wie von anderen) unter Seiendem oder Wirklichem lediglich Physisches und Psychisches verstanden.

Lange vorher hatte aus demselben Grunde B o l z a n o seinen Begriff der Wahrheiten "an sich" formuliert, zu denen alle mathematischen und logischen gehören. Und Ähnliches lesen wir bei F r e g e (1918, S.69):

> Wenn jeder Gedanke (der Inhalt des Gedankens) eines Trägers bedarf, zu dessen Bewusstseinsinhalte er gehört, so ist dieser Gedanke nur dieses Trägers, und es gibt keine Wissenschaft, welche Vielen gemeinsam wäre, an welcher Viele arbeiten könnten; sondern ich habe vielleicht meine Wissenschaft, nämlich ein Ganzes von Gedanken, deren Träger ich bin; ein Anderer hat seine Wissenschaft. Jeder von uns beschäftigt sich mit Inhalten seines Bewusstseins. Ein Widerspruch zwischen beiden Wissenschaften ist dann nicht möglich;

und es ist eigentlich müssig, sich um die Wahrheit zu streiten, ebenso müssig, ja beinahe lächerlich, wie es wäre, wenn zwei Leute sich stritten, ob ein Hundertmarkschein echt wäre, wobei jeder von Beiden den meinte, den er selber in der Tasche hätte ...

Und (ebenda, S.74):

Als sichere Grundlage der Wissenschaft ... wird der Naturforscher (und ebenso, füge ich hinzu, ein nicht von allen guten Geistern verlassener Mathematiker) sicher nicht etwas anerkennen, das von wechselnden Bewusstseinszuständen von Menschen abhängt. Die Arbeit der Wissenschaft besteht nicht in einem Schaffen, sondern in einem Entdecken von wahren Gedanken. Der Astronom kann eine mathematische Wahrheit anwenden bei der Erforschung längst vergangener Begebenheiten, die stattfanden, als auf Erden wenigstens noch Niemand jene Wahrheit erkannt hatte. Er kann dies, weil das Wahrsein eines Gedankens zeitlos ist. Also kann jene Wahrheit nicht erst mit ihrer Entdeckung entstanden sein.

In der neuesten Literatur scheint freilich eine geradezu entgegengesetzte Lehre vorherrschend geworden zu sein. Von wem sie eigentlich herrührt, weiss ich nicht. Die Historiker der Wissenschaft mögen es feststellen, wenn sie Interesse daran haben. Ausdrucksformen, die in diese Richtung weisen, finden sich nach R. E i s l e r schon bei G a l i l e i, K e p l e r und L e i b n i z [1], abgesehen von K a n t, von dessen Ansichten später die

1) Wörterbuch der philosophischen Begriffe, Artikel Mathematik, in dem man übrigens noch vieles Erbauliche finden kann.

Rede sein soll, wird auf die Mathematik als Produkt menschlicher Geistestätigkeit hingewiesen in einem Briefe von G a u s s an B e s s e l, vom 9.4.1830:

> Nach meiner innigsten Überzeugung hat die Raumlehre zu unserem Wissen a priori eine ganz andere Stellung wie die reine Grössenlehre; es geht von unserer Erkenntnis von jener durchaus diejenige vollständige Überzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letzteren eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, dass wenn die Zahl bloss unseres Geistes Produkt ist, der Raum auch (!) ausser unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können.

Offenbar wollte G a u s s hier auf den Unterschied hinweisen, der in unserer Terminologie als der Unterschied von idealen und empirischen Gegenständen bezeichnet wird, von denen die letzten nicht den Charakter von "Denknotwendigkeiten" haben. Der letzte Satz richtet sich gegen die Lehre K a n t's, die aber nicht geradezu abgelehnt, sondern nur als übertrieben hingestellt wird. Es liegt eine Begriffsvermischung vor: Der "Raum", von dem G a u s s spricht, ist, wie bei K a n t, einmal menschliche Raumvorstellung, dann der Raum der Empirie. Wieso aus den "Gesetzen" der ersten die Gesetze des Raumes, "der ausser unserem Geiste eine Realität hat", auch nur teilweise folgen sollen, ist unklar. Ich möchte einem gelegentlichen Ausspruch kein allzugrosses Gewicht beilegen.

In aller Schärfe finden wir eine psychologische Auffassung der Arithmetik sodann bei D e d e k i n d (1872, 1888).

In der berühmten Schrift "Stetigkeit und irrationale Zahlen" ist von Schöpfungsakten, "freien Schöpfungen des menschlichen Geistes" die Rede, was dann Spätere als "willkürliche" Schöpfungen "des" (?) Geistes, oder "des" Verstandes oder als"selbstätige" Schöpfungen "der" Vernunft ausgelegt haben. Es tritt das schon kritisierte überindividuelle Subjekt auf. Gleich in § 1 heisst es bei D e d e k i n d:

> "Ich sehe die ganze Arithmetik als eine notwendige oder wenigstens natürliche Folge des einfachsten arithmetischen Aktes, des Zählens,an, und das Zählen selbst ist nichts anderes als die sukzessive Schöpfung (!) der unendlichen Reihe der positiven ganzen Zahlen, in welcher jedes Individuum durch das unmittelbar vorhergehende definiert wird; der einfachste Akt ist der Übergang von einem schon erschaffenen Individuum zu dem darauf folgenden neu zu erschaffenden".

Hier wird also in aller Form die Abhängigkeit der Arithmetik von menschlichem Denken, mithin von der Psychologie verkündet. Das Zählen ist eine psychische Tätigkeit. Wie kann man aber zählen, wenn man die Zahlen nicht schon hat? Zählen ist ein Zuordnen von Dingen, zu schon vorhandenen Zahlen! Wenn ein Banquier seinen Kunden ein Bündel Geldscheine übergibt, so hat er sie vorher gezählt, und nachher zählt sie auch der andere. Beide beziehen sich auf die Zahlen als ein ihnen gemeinsam Bekanntes, und nicht auf Zahlungsprozesse. Anders könnten sie sich überhaupt nicht verständigen. Mithin hängt nicht die Zahl vom Zählen ab, sondern gerade umgekehrt die Möglichkeit eines Zählens vom Dasein der Zahlen.

Freilich haben beide, der Banquier wie sein Kunde, einst,

als Kinder, Äpfel oder Nüsse zu zählen gelernt, ehe sie noch einen klaren Zahlbegriff hatten. Aber die Genesis unseres Wissens von etwas ist etwas anderes als das Dasein dieses Etwas. Hätten wir keine Augen, so würden wir vom Mond nichts wissen. Der Mond wird dadurch nicht abhängig von uns, dass wir ihn wahrnehmen.

Dies hat auch G. H e s s e n b e r g nicht beachtet, in seinem lesenswerten Aufsatz Vom Sinn der Zahlen,(1922). Auch er will die Zahlen vom Zählen aus "entstehen" lassen. Seine Analyse des "Sinns" der Zahlen handelt aber nur von den Zahlzeichen. Nach einem "Sinn" der Zahlen selbst zu fragen, hat auch nach H. keinen Sinn (S.8).

Wären die Zahlen wirklich Produkte menschlicher Schöpfungsakte, so würde jeder Einzelne, der sich mit ihnen abgibt, sie für sich zu"erschaffen" oder nachzuerschaffen haben; so wie es P o i n c a r é in einer geradezu grotesken Form ausgesprochen hat:

> Quand je parle de tous les nombres entiens, je veux dire tous les nombres entiersqu'on a inventés et tous ceux qu'on pourra inventer un jour...[1]

Wie ist das doch? Können wir uns unserer Erfindungen nicht vielleicht auch wieder entledigen? Da ist zum Beispiel (nach einer Angabe bei H i l b e r t) eine unbequem grosse Primzahl, die nicht weniger als 39 Ziffern hat. Es muss schrecklich mühevoll sein, sich zu überzeugen, dass sie wirklich Primzahl ist. Wie wäre es also, wenn wir sie abschafften? Oder ist sie vielleicht nur dann eine Primzahl, für mich, wenn ich weiss, warum sie es ist? Und wie, wenn ich das einmal gewusst und wieder vergessen haben sollte?

---

1) 1913, S.131. Es heisst dann noch: Et c'est ce"l'on pourra" qui est l'infini.
P o i n c a r é ist als Erkenntnistheoretiker nicht immer ernst zu nehmen, so lehrreich seine Ausführungen vielfach auch sind. Er hatte Freude an Paradoxien. Dahin gehört z.B. auch sein Ausspruch, Geometrie treiben hiesse Messinstrumente untersuchen.

Ich könnte solche Ansichten noch einigermassen verständlich finden, wenn sie von Physikern herrührten, denen die Mathematik ~~sie~~ ein Handwerkszeug ist wie Wagen, Pumpen und Spektralapparate. Als Ansichten von Mathematikern erscheinen sie mir erstaunlich. Das Befremdlichste an dem allem ist, dass man nicht gemerkt hat, worin man sich verwickelte, da man für das von dem Einzelnen "Geschaffene" Allgemeingültigkeit in Anspruch nahm, da doch sonst, wenn zwei Menschen wirklich etwas schaffen, wie in der Dichtung, in der bildenden Kunst, das Ergebnis immer etwas anderes, auch bei grösserer Ähnlichkeit nicht in einem einzigen Falle dasselbe ist und sein kann. Und kaum minder befremdlich ist, dass (meines Wissens) nicht ein Einziger von denen, die solche Ansichten vertreten, das Bedürfnis empfunden hat, sich mit dem auseinanderzusetzen, was durch zwei Jahrtausende in Geltung gewesen ist. Dies gilt selbst von D e d e k i n d, der nicht so verfuhr wie manche neuere Berühmtheiten, sondern sich alles, was er schrieb, genau zu überlegen pflegte [1].

In der neueren, grösstenteils von K a n t abhängigen philosophischen Literatur sind manche ganz naive Psychologisten. So der Verfasser des schon erwähnten Artiekels"Erkenntnistheorie" im Handbuch der Philosophie, F r . K u n t z e, Kantianer reinsten Wassers. Die Unterscheidung des Gekannten vom Erkennen wird von diesem Autor zwar als notwendig angesehen, aber nicht durchgeführt. Er überschreibt einige Abschnitte: Die Erschaffung der natürlichen Zahlen und Die Erschaffung der Ausdehnung (Anspielung auf H. G r a s s m a n n's Ausdehnungslehre ?) Aber auch an Mathematikern ist kein Mangel, die gegenüber den Schöpfungsideen kapituliert haben. Ausser P o i n c a r é gehören dazu H. W e b e r, A. V o s s, G. H e s s e n b e r g und O. P e r r o n, ferner die Intuitionisten. Psychologist war auch H e l m h o l t z (1887; 1921, S.72).

Eine gewisse Unklarheit ist schon dadurch hervorgerufen worden, dass manche zwischen den Begriffen Entdeckung und Erfindung, die der Sprachgebrauch des Lebens sehr wohl zu trennen weiss, nicht unterscheiden. So merkwürdiger Weise B o l z a n o,

---

1) Es ist billig, hinzuzufügen, dass auf das, worauf es D e d e k i n d ankam, sein Psychologismus keinen Einfluss gehabt hat. Bei den später zu besprechenden Intuitionisten steht es anders.

dann auch P o i n c a r é und V o s s. Ich kann das nicht sachgemäss finden. Entdecken kann man nur etwas, das schon da ist, und das meinen alle Mathematiker, die von Entdeckungen in ihrer Wissenschaft reden. Ein Erfinden dagegen bedeutet ein mindestens zum Teil wirkliches Schaffen. Zwar sieht sich die Wissenschaft zuweilen genötigt, terminologische Unterscheidungen aufzuheben, wie ich es mit dem Wort Existenz tue. Vorhandene und wesentliche Unterschiede (von denen im Falle der Existenz alsbald die Rede sein wird) dürfen aber dadurch nicht verwischt werden.

Der Sinn, den wir mathematischen Behauptungen beilegen, tritt klar hervor in allen bezeichnender Weise sogenannten Existentialsätzen; Aussagen, in denen irgend einem zunächst nur hypothetischen Sachverhalt "Wirklichkeit", ein (nicht nur psychisches) Dasein zugeschrieben wird.

Die Mathematiker sagen allgemein "Es gibt unendlich (oder unbegrenzt) viele Primzahlen". Durch den Gebrauch des gleichen Wortes "Es gibt" stellen sie Behauptungen, die sich auf Ideales beziehen, auf gleiche Stufe mit solchen, die Psychisches oder Physisches zum Gegenstand haben.

Und dieses eben scheint, wenn ich hier auch für andere sprechen darf, Mathematikern das Natürliche zu sein: In allen Kultursprachen finden wir solche Wendungen, die auf den Existenzbegriff hinweisen. Und warum auch sollten wir und solcher Redeformen, die sicher eine wirkliche Analogie zum Ausdruck bringen, nicht bedienen dürfen, bloss weil Philosophen, dieselben Philosophen, die in unzähligen Fällen Worten der Gemeinsprache die wunderlichsten Bedeutungen beilegen, gerade in diesem Falle eine andere Taktik befolgt haben? Vielleicht mag man sagen, dass Mathematisches nicht "greifbar" ist, wie vieles Physische und oft nicht so unmittelbar gewiss, wie einiges Psychische. Hierauf aber könnte erwidert werden, dass auch vieles Physische nicht greifbar ist, wie z.B. das Innere der grossen Himmelskörper,

mit Einschluss dieser unserer Erde, und dass auch die Feststellung psychischer Sachverhalte oft viele Mühe macht. Ausserdem wird zu sagen sein, dass jedenfalls als Tatsächliches anerkannt werden muss, dass zweimal zwei gleich vier ist, und dass man auch von Tatsächlichem hier nicht reden darf, wenn den Zahlen "Existenz" abgesprochen werden soll.

Eine dem hier vorgenommenen verwandte Gliederung des Stoffs unserer Erkenntnis findet sich bei B o l z a n o (1837) und F r e g e (1918). Das "dritte Reich", (ein Wort, das F r. tatsächlich braucht) umfasst jedoch bei diesen Autoren alle Wahrheiten. Zum Beispiel würde dazu gehören der Inhalt der Aussage: Zu Paris wurde am 17 ten April des Jahres 1912, um 12 Uhr 10 Minuten westeuropäischer Zeit, eine ringförmige Sonnenfinsternis beobachtet", und auch noch der Inhalt dieser anderen: "Ich war dort und habe sie gesehen". Es kann dann natürlich nicht behauptet werden, dass die Gegenstände des dritten Reichs von denen der zwei anderen Reiche unabhängig sind. Die bezeichnete Gliederung scheint mir nicht notwendig und weniger natürlich zu sein als die hier vorgenommene; besonders dann, wenn man den Wahrheiten ein Dasein abspricht, wie es B. und Fr. getan haben 1).

Mir scheint die Gliederung, wie sie hier vorgenommen ist, für die Zwecke der Erkenntnistheorie ausreichend. Stelle ich fest Zweimal zwei ist gleich vier; oder Ich denke; oder Eis ist leichter als Wasser; so spreche ich in jedem Falle eine konkrete Wahrheit aus, und mit solchen Wahrheiten hat es alle Forschung zu tun. Abstraktere Wahrheiten sind Zusammenfassungen vieler Einzelheiten und dienen lediglich der Denkökonomie.

In der neueren philosophischen Literatur wird mehrfach nur eine Zweiteilung vorgenommen und das Mathematische und Logische wird dann zum Psychischen gezogen. Damit hat man sofort das ganze Elend des Psychologismus.

Eine Zweiteilung hatten auch die Alten, aber eine von ganz anderer Beschaffenheit: Sie unterschieden Lebendiges und Unbelebtes 2). Sie mussten also das Mathematische und Logische zum Unbelebten ziehen. Ihre Mathematik war ja auch im Wesentlichen ein Zweig (der ältesten und elementarsten) der Physik. Die Mathematik würde also mit der unbelebten Materie zusammenzustellen sein, und zwar insbesondere mit der Luft 3). Dass die Mathematik (und die Logik) bei der einen Art der Gliederung mit Psychischem und bei der anderen, die doch wohl auch ihre Berechtigung hat, mit Physischem zusammen kommt, scheint mir dafür zu sprechen, dass ihr eine Sonderstellung einzuräumen ist.

---

1) Offenbar hat B o l z a n o in diesem Punkte geschwankt. Denn sein "erstes Hauptstück" ist überschrieben: Vom Dasein der Wahrheiten an sich.

2) Siehe die sehr lehrreiche, auf ausgedehnten Studien beruhende Erörterung in § 20 von Z i e h e n's Erkenntnistheorie.

3) ψυχή ursprünglich = Hauch, Atem. Τὸν ἔλιπε ψυχή : ψυχή ist (bei Homer) eine Substanz, die den Körper, wenn er stirbt, verlässt.

Fasst man, wie die Alten es taten, "Geometrie" als eine Wissenschaft von dem Raume, in dem wir leben, fasst man mithin geometrische Behauptungen als Idealisierungen von Erfahrungstatsachen, so entsteht die Gefahr einer empiristischen Auffassung der gesamten Mathematik. Die Griechen, wenigstens die griechischen Mathematiker, scheinen aber dieserKlippe entgangen zu sein 1). Erst in der neueren Zeit hat diese Gesamtauffassung der Mathematik eine gewisse Bedeutung erlangt, vornehmlich wohl unter dem Einfluss von S t. M i l l. Nach der Auffassung des reinen Empirismus beruht die Arithmetik auf den Zahlen - die Ordinalzahlen werden den Kardinalzahlen voran gestellt. Das Zählen wird dabei auf den Inhalt von Sinneswahrnehmungen bezogen. Der Empirismus ist somit, soweit es die Arithmetik angeht, eine Unterart des Psychologismus, eine besondere Ausgestaltung davon 2).

Man könnte schliesslich dem Vorgetragenen vielleicht noch entgegenhalten wollen, wirklich dürfe nur das genannt werden, "was wirkt". Das würde freilich ein rein-terminologischer Einwand sein. Und selbst in dieser Hinsicht könnte erwidert werden, dass wer einen Stein ein Wirkliches nennt, doch sicher nicht daran denkt, dass er im Strom des Geschehens steht, nur scheinbar ruht und in"Wirklichkeit"schon durch sein blosses Dasein "wirkt". Die einzige Misslichkeit der eingeführten Terminologie, die ich zu erkennen vermag, ist, dass nun das Wort "Realisierung" (Titel des Hauptwerkes von K ü l p e) nicht immer ohne Zusatz verständlich sein wird. Dies aber scheint mir mehr als aufgewogen zu werden dadurch, dass die Diskrepanz zwischen der philosophischen und der mathematischen Terminologie zum Verschwinden gebracht ist.

Über das Verhältnis von Mathematik und Logik, die hier beide zusammen das "Reich der idealen Gegenstände" ausmachen, gehen die Ansichten auseinander. Es kommt natürlich darauf an, wie man diese Gebiete genauer umgrenzt, besonders welche Stellung man den Zahlen (den natürlichen Zahlen) einräumen will. Sind sie der Mathematik eigentümlich? Dem steht entgegen, dass die Logik überall einzelne Gegenstände betrachtet, die in bestimmten Anzahlen auftreten, und dass man diese Zahlen immer im Sinne hat, auch wenn man nicht gerade 1, 2, 3 hinschreibt. Auch die Aufeinanderfolge der natürlichen Zahlen wird dementsprechend schon zu den Gegenständen der Logik zu rechnen sein, wie sie denn auch tatsächlich in Werken über Logik behandelt wird. Hinzu kommt, dass auch Zuordnungen, wie sie der Mathematiker braucht, in der Logik nicht entbehrt werden können. Und dass der Mathematiker ohne Logik nicht auskommen kann, ist ja selbstverständlich.

Nehmen wir dies an, so wird die gesamte Mathematik (wie wir später sehen werden, auch die Geometrie) ein Bestandteil der Logik. Sie erscheint als eine Ausbildung der Logik nach bestimmter Richtung hin 3). Vom Mathematik und Logik darf man dann eigentlich gar nicht sprechen: Die bisher gebrauchte Terminologie

---

1) Vgl. H a s s e und S c h o l z, 1928.
2) Siehe H. H e l m h o l t z, Zählen und Messen, (1887). Ausgabe von 1921, S.72.
3) Diese Ansicht liegt G. F r e g e's Werk vom Jahre 1893 zugrunde. Gegenwärtig dürfte sie ziemlich allgemein anerkannt sein.

erscheint als unlogisch (was sie tatsächlich auch ist, gleich mancher anderen historisch entstandenen Terminologie). Ich behalte sie, aus wohl einleuchtendem praktischem Grunde, gleichwohl bei: Worauf es hier ankommt, ist nur, fühlbar zu machen, dass die Vereinigung von "Logik" und "Mathematik" zu einem "Reich idealer Gegenstände" nicht eine willkürliche Zusammenstellung heterogener Dinge bedeutet.

Durch ihr Denkverfahren wird die Mathematik jedenfalls nicht aus dem allgemein Logischen herausgehoben werden können. Sie könnte sich aber auf andere Art umschreiben lassen. Hiervon wird in einem späteren Abschnitt (XII) die Rede sein.

K a n t hat geglaubt, auf Grund der Unterscheidung von analytischen und synthetischen Urteilen eine radikale Trennung von Logik und Mathenatik vornehmen zu können. Diesen Gedanken hat, vor noch nicht allzulanger Zeit, L. N e l s o n aufrecht zu halten gesucht. Er entwirft folgendes Schema:

Urteile	A priori	A posteriori
Analytische	Logik	--
Synthetische	Mathematik	Empirie

Die Logik soll also das Gebiet der analytischen, die Mathematik das Gebiet der synthetischen Urteile a priori sein, wie es eben K a n t's Meinung war. Von den Gegenständen der Urteile wird dabei abgesehen.

Ich wende hiergegen nicht ein, dass diese Unterscheidung psychologischer Natur ist, Denn wenn auch, wie ich meine, Logik und Mathematik von allem Psychologischen unabhängig sind und in der erkenntnistheoretischen Betrachtung der Empirie vorangehen müssen, so ist doch damit nicht gesagt, dass "Logik" und "Mathematik" nicht ausserdem auch Unterschiede in der Art ihres Erkanntwerdens, also psychologische Unterschiede darbieten könnten.

Es ist indessen zwar nicht übersehen, aber nicht gewürdigt: Dass es sich bei der Trennung von synthetischen Urteilen (Erweiterungsurteilen) und analytischen Urteilen (Erläuterungsurteilen) nur um Relativbegriffe handeln kann. Ein und dasselbe Urteil kann, je nach dem, was der Urteilende im Sinne hat, analytisch oder synthetisch sein. Zum Beispiel ist das Urteil: Zu den Primzahlen gehört die Zahl 2, ganz gewiss analytisch. Sagt man jedoch: 2 ist eine Primzahl, so liegt ein synthetisches Urteil vor, wenn der, der es fällt, den Begriff der Primzahl, an den er zunächst noch nicht gedacht hatte, erst noch hinzumehmen muss. Beide Urteile drücken aber denselben Sachverhalt aus.

---

1) Siehe z.B. K a n t und die Nicht-Euklidische Geometrie. Vorträge und Abhandlungen, herausgegeben von der Zeitschrift "Das Weltall" Heft 13, 1906.

Dass die Mathematik(und ebenso die Empirie) es nur mit synthetischen Urteilen zu tun haben soll, kommt,bei N. wie bei K a n t , dadurch zustande, dass das Schlussurteil einer Urteilskette, wenn in der Kette ein synthetisches Urteil vorkommt, ohne weiteres ebenfalls als synthetisch hingestellt wird 1). Auf diese Art werden aber sehr wesentliche Unterschiede verwischt. Tatsächlich ist die Mathematik voll von unzweifelhaft analytischen Urteilen. Sie hat es ja mit einem Schliessen zu tun; der Schluss aber ist der Typus des analytischen Urteils. "Aus $x + y = 3$ und $x - y = 1$ folgt $x = 2$, $y = 1$ ist, gerade nach der Definition von K a n t, ein erläuterndes, also analytisches Urteil. Eine Synthese, Zusammenstellung zweier Voraussetzungen, liegt vor, macht aber das Urteil nicht synthetisch. Ja es will mir scheinen, dass diese Art von Synthesen ungemein viel wichtiger ist als der nicht immer unzweifelhafte Charakter des zu fällenden Urteils. Auch hängt das Richtig oder Falsch eines Urteils gar nicht von der Art seines Zustandekommens ab.

Vollends soll nun gar noch die Mathematik von der"Logik" unabhängig sein! Dies sei eine Entdeckung K a n t's! (S.19) 2).

Auf die"reine Anschauung", auf die N. sodann zu reden kommt, und die ihn ebenfalls zu Fehlern verleitet hat, gehe ich hier nicht ein. Sie wird später besprochen werden.

Man hat in neurer Zeit viel gefragt, wie die Mathematik (oder Mathematik und Logik), oder, wie wir nun im gegenwärtigen Zusammenhang besser sagen werden, wie die Logik "begründet" werden kann.

Diese Frage scheint mir keinen Sinn zu haben.

Spricht man von der"Begründung" einer ganzen Disziplin, so meint man niemals ihren Gesamtinhalt, sondern ihre Ausgangspunkte. Man beruft sich, ganz oder zum Teil, auf schon Anerkanntes (unter Umständen auf Mathematik). Oder man stellt das, was man braucht, als unmittelbar gewiss hin (wie zu Beginn der Erkenntnistheorie). Oder man geht von hypothetischen Annahmen aus, deren Prüfung man sich vorbehält (wie es, in der Geometrie, die sogenannten Axiomatiker tun).

Wie man nun die Logik (und also auch die Mathematik) sollte "begründen"können, verstehe ich nicht. D. H i l b e r t jedoch behauptet, ~~dieses~~ dazu im Stande zu sein. Für ihn ist die Mathematik eine "voraussetzungslose" Wissenschaft.

Setzt man ein System von Symbolen fest, das die Gesetze der Logik zum Ausdruck bringen soll und es gewiss auch wirklich tut, so muss man diese Gesetze schon kennen. Die zugehörigen Spielregeln können nichts begründen, da sie vielmehr selbst erst durch die Gesetze der Logik "begründet"(nämlich motiviert) und nur eine Zeichensprache sind, für etwas, das schon da ist. Und

---

1) Ganz so verfährt übrigens auch S c h l i c k, Allgemeine Erkenntnislehre, 1918, S.298.

2) Eine verwandte Ansicht hat neuerdings L. E. F. B r o u w e r vertreten, der die Logik auf Mathematik gründen will (oder auf das, was er unter Mathematik versteht).

zur Anwendung dieser Spielregeln braucht man wiederum logisches Denken. Nennt man, wie H i l b e r t es tut, die Spielregeln Axiome, so wird dadurch nicht das Geringste geändert.

O. H ö l d e r hat dazu gesagt (1924, S.325):

> Glaubt man, die Arithmetik ... auf Axiome gründen zu müssen, so ergibt sich die neue Aufgabe, nunmehr die Widerspruchslosigkeit dieser Axiome zu beweisen. Dieser Beweis könnte aber ... nur auf Grund ... neuer Axiome geführt werden, u.s.w. Man käme also schließlich auf einen recursus ~~at~~ ad infinitum ...

Dieser Einwand scheint mir durchschlagend zu sein.

Hätte man im Formelspiel eine Begründung der Logik, so hätte man im Buchstabenrechnen eine Begründung der Arithmetik, und Niemand brauchte sich über den Zahlbegriff den Kopf zu zerbrechen. Ebenso hätte man in gewissen Strukturformeln die Begründung ganzer Teile der Chemie.

Zuerst kommen doch wohl immer die Dinge, die wir zu erforschen trachten, dann unsere klugen Gedanken darüber, und zuletzt, wenn wir uns überzeugen müssen, dass es mit dem reinen Denken und insbesondere mit dem Kopfrechnen manchmal seine Schwierigkeiten hat, erfinden wir uns auch eine Zeichensprache. Wir stützen uns auf Dinge der Körperwelt, wie auf Krücken des Denkens, die ein vollkommen intelligentes Wesen ganz gewiss nicht nötig haben würde. Jedenfalls gestehen wir damit unsere Schwäche ein. Wer sagt "zu Anfang ist das Zeichen", vergisst, dass Zeichen immer etwas bezeichnen, er macht aus der Not eine Tugend und stellt die natürliche Ordnung der Dinge auf den Kopf.

> "Über die Tragweite des Grundgedankens der formalen Arithmetik sind wohl viele Mathematiker im Unklaren. Man fasst die formale Arithmetik, wie es scheint, im Wesentlichen auf als die inhaltliche, vermindert um die Verpflichtung, die Bedeutungen der Zeichen anzugeben. In der Tat kommt die Auffassung der Zahlen als Figuren eigentlich nur im Anfang zur Geltung, wo jene Verpflichtung drückend ist. Später gleitet man, ohne es selbst zu merken, in die inhaltliche Arithmetik zurück."
> (G. F r e g e, Grundgesetze der Arithmetik, II, S.139).

Dies wurde gedruckt im Jahre 1903 uns ist gerichtet gegen eine Auffassung der Mathematik, die damals von E. H e i n e und J. T h o m a s vertreten wurde. Es passt aber auch genau noch auf die Art, wie einige heutige Mathematiker mit den Zeichen umgehen.

Es ist bedauerlich, dass F r e g e, dessen unverdauliche, von Niemanden (ich glaube selbst von R u s s e l l nicht) gelesene Begriffschrift gleichwohl ein gewisses Ansehen erlangt hat, mit seinen sehr viel tiefer geschöpften philosophischen Gedanken keinen Erfolg gehabt hat.

V.

Weitere Erläuterung des mathematischen Existenzbegriffs. Der Intuitionismus Kant's.

Zu den drei Arten des Wirklichen, die wir auseinander gehalten haben, kommen selbstverständlicher Weise noch ihre Zusammenhänge unter einander, die ebenfalls als wirklich, existierend, anzusehen sein werden, die wir aber hier, wo es sich um Mathematik handeln soll, nicht systematisch zu ~~behandeln~~ betrachten brauchen. Dagegen scheint es nützlich, gewisse Unterschiede der drei Reiche zu besprechen.

Zu den wichtigsten Unterscheidungen unserer drei Arten von Gegenständen gehört jedenfalls, dass wir im Physischen es mit dem Gegensatz von Ding und Erscheinung zu tun haben, dass es im Psychischen etwas Ähnliches für unser Erkennen, wenigstens für ein unmittelbares Erkennen, nicht gibt (nichts - namentlich kein Gehirn - "hinter der Erscheinung") und im Idealen gar keine"Erscheinungen". Was H u s s e r l Zahlvorstellung genannt hat (S.00) existiert wohl gar nicht. Ich wenigstens habe keine Vorstellung, nur einen Begriff von Zahlen.

Ein zweiter wichtiger Unterschied ergibt sich aus dem Verhältnis unserer Aussagen zu dem Begriff der Präzision. Mathematische Behauptungen erheben den Anspruch auf vollkommene Präzision. Vom Psychischen und Physischen kann Ähnliches nicht gesagt werden. Allem Psychischen ist eine gewisse Verschwommenheit eigentümlich. Empfindungen haben eine Intensität, die sich bis zur Unmerklichkeit verflüchtigen kann.und gewisse nicht scharf angebbare Grenzen nicht überschreitet. Vorstellungen haftet dem

V.

Weitere Erläuterung der mathematischen Existenzbegriffe. Der intuitionistische Kern.

einer grösseren oder geringeren Deutlichkeit an; es gibt fliessende Übergänge. Und auch im Physischen haftet aller unserer Erkenntnis, wiewohl anders als im Psychischen, der Charakter der Ungenauigkeit an. Auch können wir uns, in Gedanken, eine Welt ausmalen, die von der, in der wir leben, verschieden ist. Physiker tun das tatsächlich, so oft sie den Prozess des Idealisierens anwenden. Im Reich der idealen Gegenstände vermögen wir das nicht.

Etwas eingehender mag das verschiedene Verhältnis der drei Reiche zu den Begriffen Zeit und Raum besprochen werden.

Unter Zeit und Raum verstehe ich nicht etwa, was K a n t und die Kantianer darunter verstehen wollten oder wollen, also nichts Apriorisches, vielmehr das, was der Physiker darunter versteht: Gegenstände allerdings nur mittelbarer, nämlich durch Körperdinge vermittelter Messungen (Messungen mit Instrumenten der Geodäten und Astronomen, Zeitmessungen mit Hilfe von Uhren und radioaktiven Körpern); und zwar Messungen vom Standpunkt des menschlichen Beobachtens, desselben, auf den wir, wenigstens zunächst, das Psychische beziehen. Wir betrachten mithin Zeit und Raum als Gegenstände der Erfahrung [1].

Wir können dazu kurz sagen:

Abgesehen von Zeit und Raum selbst hat alles, was dem "Reich des Physischen" angehört, sein Dasein in Zeit und Raum.

Dies gilt von allen Körperdingen und allen Zusammenhängen zwischen solchen, z.B. von Energiequanten, von Gravitation und Elektrizität, von kausalen Abhängigkeiten; von Lebewesen der Gegenwart und Vergangenheit, natürlich auch von uns Menschen,

---

1) Es mag vielleicht auch einmal zweckmässig befunden werden, aus Zeit und Raum (oder ihrer Verbindung zu einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit) ein viertes "Reich" zu bilden, das dann eine Art von Mittelstellung zwischen Idealem und Physischem einnehmen würde.

die wir ja auch Körperdinge sind; es gilt von unseren Taten und Untaten, z.B. von Kriegen, Verdrängungen, Kulturgütern: Alles, soweit es sich um Körperdinge und deren Zusammenhänge handelt.

Alles Psychische hat sein Dasein in der Zeit allein:

Alles Wahrnehmen, Fühlen, Denken von Lebewesen verläuft in der Zeit und nur in der Zeit, es beginnt und endet in der Zeit. Es kann auf räumliche Dinge bezogen sein, aber darum ist es nicht selbst im Raume. Dies gilt auch von den Empfindungen, für die es zuweilen geleugnet wird 1). Wir lokalisieren als erwachsene Menschen, lokalisieren aber dann nicht die Empfindungen selbst, sondern die Vorgänge, die wir als ihre Ursache betrachten. (L o t z e, H e l m h o l t z, W u n d t). Diese Lokalisierungen sind immer ungenau, auch noch in Vergleich zu dem, was physikalische Messungen lehren, und bei Ton und Geruchsempfindungen gelingen sie häufig gar nicht, ebenso bei manchen körperlichen Schmerz-en. Im Falle der Gesichtsempfindungen wird besonders lehrreich das H e l m h o l t z'sche Schachbrett und die grossen Irrthümer, denen wir bei Tiefenschätzungen unterliegen 2), ferner ein von dem Amerikaner S t r a t t o n (1897) angestellter Versuch 3). Einer, dem ein Bein amputiert ist, verlegt nach wie vor gewisse Empfindungen in die kleine Zehe, die er gar nicht mehr hat.

Es wird selbstverständlich die Abhängigkeit des Psychischen von gewissen physischen Vorgängen nicht in Abrede gestellt - das würde eine Lächerlichkeit sein - es wird aber das Psychi-

---

1) So schreibt Z i e h e n den Empfindungen "Räumlichkeit" zu (Erkenntnistheorie § 27, und in der kleinen Schrift von 1914 (S.57).
2) Siehe etwa K. B ü h l e r, Zeit und Raumsinn, im Handwörterbuch der Naturwissenschaften.
3) Siehe das Zitat F r o b e's auf Seite 60. Die Hauptsache steht auch bei H a g e m a n n - D y r o f f, Psychologie, Neunte und zehnte Auflage, 1921, S.217.

sche als ein von uns einfach Hinzunehmendes, Besonderes, nicht weiter Reduzierbares anerkannt.

Zu dem Psychischen gehört auch das Denken von Mathematischem. Wie zu allem Denken, so brauchen wir auch zum "Mathematisieren" Zeit. Das Mathematische (überhaupt das Logische) selbst aber ist darum nicht in der Zeit.

Alle idealen Gegenstände haben ihr Dasein unabhängig von Raum und Zeit. Sie sind überdies unabhängig von allem Physischen und Psychischem.

Die Tatsache, dass zweimal zwei gleich vier ist, hat mit Zeit und Raum nichts zu tun, und dasselbe gilt von dem Inhalte aller Aussagen der Mathematik, mögen sie diese oder jene Form haben, mögen sie Konditionalsätze sein (Wenn dieses, dann jenes) oder Existentialsätze (Es gibt), mögen auch die Worte Zeit und Raum selbst in ihnen vorkommen.

Besondere Aufmerksamkeit verdienen Aussagen der zuletzt genannten Art, denn die Mehrdeutigkeit der Worte Raum und Zeit hat schon viele Missverständnisse verursacht, und sie wird wohl noch lange fortfahren das zu tun. Ein Beispiel mag nützlich sein.

Der Satz: "Im dreidimensionalen Euklidischen Raume gibt es fünf und nicht mehr Arten regulärer Körper" enthält die Worte Raum und Körper. Aber diese"Körper" (Polyeder) sind nicht Körperdinge der Physik - sie sind es schon darum nicht, weil es im strengen Sinne reguläre Körper, so viel wir wissen, im Physischen gar nicht gibt [1]. Das Wort Körper bezeichnet in unserem Zusammenhang vielmehr einen Begriff der Mathematik, und ebenso ist es schon mit dem "Raum", in dem die "Körper" sein sollen: Die

1) Das reguläre Ikosaeder und Pentagondodekaeder werden durch Kristalle nicht einmal annähernd realisiert.

Zusätze dreidimensional, Euklidisch, bezeichnen, für den Sachverständigen genügend, ein System von Voraussetzungen mathematischen ("rein mathematischen") Inhalts, Bedingungen, unter denen der angeführte Satz, also das in ihnen enthaltene Urteil, wahr ist, richtig ist, oder gilt: Wir haben es hier ausschliesslich mit idealen Gegenständen zu tun. Ebenso, wenn wir z.B. von Kugeln reden. Ebenso, wenn in einer Formel der Mechanik "die Zeit" (eigentlich ein Maass der Zeit) auftritt. Diese ist dann, für das Mathematische an der Sache, einfach eine unabhängige Veränderliche, in nichts von anderen unterschieden.

Von allen unseren "idealen Gegenständen" gilt, völlig unabhängig von mehr oder weniger deutlichen Bildern, die wir der Realität des Physischen entnehmen mögen:

Zusammenhänge zwischen idealen Gegenständen werden (wenn überhaupt) stets a priori erkannt.

Es ist eine apriorische Einsicht, dass zweimal zwei gleich vier ist, und ebenso, dass immer dann, wenn q aus p folgt und r aus q, auch r aus p folgt. Mag der vorhin angeführte Lehrsatz immerhin durch Aneinanderfügen von Papp-Dreiecken, Vierecken und Fünfecken gefunden worden sein, - so, wie man noch heute, in Schulen, die Lernenden zu ihm kommen lässt - er wird dennoch a priori erkannt.

Alles Denken, sagte K a n t, hebt mit der Erfahrung an, aber darum stammt es nicht aus der Erfahrung.

Was es gewöhnlich, besonders im Sprachgebrauch der Naturwissenschaften, Erfahrung heisst, ist ein Geflechte von A-priorischem und A-posteriorischem, das nicht immer leicht zu entwirren, in seine Bestandteile zu zerlegen ist. Jedenfalls aber ist unsere Sinneswahrnehmung, wenn sie auch zeitweise ohne Diskontinuitäten vor sich geht, doch im Ganzen unzusammenhängend und an begrenzte Zeitintervalle gebunden, dazu individuell und nicht mitteilbar. Gleichwohl findet ein jeder von uns, als erwachsener Mensch, ein zusammenhängendes Weltbild in sich vor, das sich schildern lässt und fortwährend ergänzt und berichtigt wird. Mag es zustande gekommen sein, wie es will, eine Verarbei-

tung des Wahrnehmungsmaterials hat stattgefunden.und hat in unserem Gedächtnis Nachwirkungen hinterlassen, und sie findet immer von Neuem statt, mit oder (meistens) ohne Begleitung von Bewusstseinsvorgängen. Alles das, was wir hinzu tun, was also nicht aus der Wahrnehmung stammt, ist a priori. Das A priori geht (nicht zeitlich, sondern) in logischer Hinsicht der Erfahrung voran.

Ganz verfehlt ist nach dem im Haupttexte Gesagten jedenfalls die von K a n t 1) und später noch von R. H a m i l t o n und H e l m h o l t z vertretene Lehre, die Arithmetik sei eine Wissenschaft der Zeit.

G. C a n t o r hat dazu bemerkt, dass die Zeit selbst in der bescheidenen Rolle einer subjektiv-notwendigen apriorischen Anschauungsform es zu keinem erspriesslichen, unangefochtenen Gedeihen habe bringen können,obgleich ihr seit K a n t die Zeit dazu nicht gefehlt haben würde.

Neuerdings hat B r o u w e r wieder an K a n t angeknüpft, und dessen Zeitbegriff mit der Mathematik in Verbindung bringen wollen. Ähnlich W e y l und O. B e c k e r. Diese Autoren verwechseln die Mathematik mit dem Betrieb der mathematischen Wissenschaft, dem "Mathematisieren".

Aussagen solcher Art haben nicht einmal einen deutlichen Sinn, wenn nicht vorher erklärt ist, was unter Zeit verstanden werden soll. Ist damit "die subjektive Zeit", das Gefühl für den Ablauf einer messbaren Zeit gemeint, so ist klar, dass man auf so etwas keine Mathematik gründen kann - diese Zeit hat nicht einmal die Bedeutung eines genügenden Motivs für mathematische Forschung. Verweist man aber auf die Zeit der Physik, so ist zu sagen, dass jede Messung den Zahlbegriff zur Voraussetzung hat. Man macht sich dann einer petitio principii schuldig. Ganz klar tritt der wirkliche Sachverhalt hervor in der Feststellung, dass alle Messungen der Physiker ungenau sind. Eine solche Aussage würde gegenstandslos sein, wenn man nicht einen Zahlbegriff, dem das Prädikat der Genauigkeit beigelegt werden kann, schon besässe und im Sinne hätte.

Um Missverständnisse auszuschliessen, sei noch ausdrücklich bemerkt, dass hier überall die Gegenstände mathematischer, überhaupt "logischer" Behauptungen von dem Inhalte dieser Behauptungen, die Gedanken sind, unterschieden werden müssen, gerade so, wie etwa die Sonne verschieden ist von dem INhalte unserer Aussagen, unserer Urteile über sie.

---

1) Siehe z.B. Kritik der reinen Vernunft, zweite Ausgabe, S.182. Dort heisst es: "Also ist die Zahl nichts anderes als die Einheit der Synthesis des Mannigfaltigen einer gleichartigen Anschauung überhaupt, dadurch, dass ich die Zeit selbst in der Apprehension der Anschauung erzeuge". Mir gelingt es nicht, bei derartigen Worten etwas Vernünftiges zu denken. Aber andere, die von "Denken" einen anderen Begriff haben müssen, scheinen glücklicher zu sein.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass zwischen der Mathematik und ihren Anwendungen auf die empirische Welt (und auch etwa möglichen Anwendungen auf rein-Psychisches) scharf unterschieden werden muss. Für unser Erkennen deckt sich diese Unterscheidung mit der eines A priori von A posteriori. Reinlich durchgeführt findet man sie kaum je, doch steht das Wesentliche von dem, was darüber zu sagen sein wird, schon bei B o l z a n o (1910, § 18)

Gewöhnlich wird die Tendenz mathematischer Untersuchungen, die Art des Interesses, das ihre Urheber und deren Publikum daran nehmen, durch die Worte "reine Mathematik", "angewandte Mathematik" bezeichnet. Zahlentheorie z.B. gehört dann zur reinen, Mechanik zur angewandten Mathematik, und nach Ansicht Vieler auch die Geometrie. Dass man damit aber der Geometrie, wenigstens der heutigen, nicht gerecht wird, geht schon daraus hervor, dass es Geometrie oder vielmehr mancherlei Arten von Geometrie in "Räumen" von n Dimensionen gibt, wobei n jede beliebige Zahl sein kann [1]. Der Erkenntnistheoretiker kann mit einer so äusserlichen Unterscheidung nicht zufrieden sein. Worauf es für ihn ankommt, ist der Unterschied von idealen und anderen Gegenständen.

Auch in Untersuchungen, die allgemein der "angewandten Mathematik" zugeschrieben werden(solchen der Astronomie, überhaupt theoretischen Physik, der Technik, der Versicherungsmathematik, u.s.w.), lässt sich immer ein der Mathematik (der "reinen" Mathematik) angehöriger Bestandteil nachweisen und herauspräparieren.

---

1) Philosophen betrachten zuweilen diese Terminologie als eine logische Spielerei. (L o t z e, Logik, § 172.) Zugrunde liegt eine fehlerhafte Auffassung des Begriffs Anschauung, wovon weiterhin noch die Rede sein wird.

Vgl. M. Ph. S.17 u.ff (Verhältnis des induktiven und deduktiven Denkverfahrens, Bedeutung der Begriffe Idealisierung für die Physik), und G. D o e t s c h, Kantstudien, Bd.19, 1924.

Hätte man das immer im Sinne gehabt, so würden manche Unklarheiten vermieden worden sein. Namentlich gilt das von der Wahrscheinlichkeitslehre, die es mit dem schwierigen, aus der empirischen Welt stammenden Begriff Zufall zu tun hat. Siehe darüber D o e t s c h, J.B.d.D.M.v., Bd.37, 1928).

Überhaupt kann Ideales von Physischem (oder Psychischem) niemals in einer Abhängigkeit stehen, die im Denken sich als logische Abhängigkeit spiegelt. Die Interessen der Autoren werden nicht durch Gründe, sondern, und zwar immer, durch Motive bestimmt.

(Der Grund gehört dem Reich des Logischen, das Motiv dem des Psychischen an. Vgl. M ü l l e r - F r e y e n f e l s, Artikel Motiv.)

Ich vermisse eine scharfe Unterscheidung (und oft auch jede Unterscheidung) der Mathematik von ihren Anwendungen nicht nur bei erkenntnistheoretisch-interessierten Mathematikern wie M. P a s c h, sondern ebenso fast überall bei Philosophen. Bei K a n t und Nachfolgern von Kant ist dieser Mangel zu einer Quelle schwerer Fehler geworden. In K a n t's Lehre "vom Raume" werden drei grundverschiedene Begriffe durcheinandergeworfen und mit demselben Wort bezeichnet: Der dreidimensionale Euklidische Raum, ein Begriff der Mathematik; der sogenannte Anschauungsraum, ein von Person zu Person und bei derselben Person in der Zeit veränderliches Gebilde, Begriff der Psychologie; und der problematische Raum der Physik. Ganz ebenso steht es um desselben Philosophen Lehre "von der Zeit" (Vgl. S.00).

Überhaupt hat K a n t durch die Dunkelheit seiner Sprache und die Verworrenheit seiner Begriffe einen äusserst

ungünstigen Einfluss auf die Folgezeit ausgeübt, ja erfährt noch heute fort das zu tun.

Siehe die erste Auflage meiner Realistischen Weltansicht, 1914, und W. R a u s c h e n b e r g e r, Der Kritische Idealismus und seine Widerlegung, 1918.

Dass die Verwischung und Verwechslung von Idealem, Psychischem und Physischem die Quelle der in K a n t's Lehre von Raum und Zeit herrschenden Verwirrung ist, scheinen ältere Autoren nicht erkannt zu haben; merkwürdiger Weise hat auch H e l m h o l t z diesen Punkt nicht klargestellt, wie wohl ihm die in Betracht kommenden Unterschiede vollkommen geläufig waren. Ebenso steht es auch noch in einer später von H. S c h o l z geübten Kritik (Kantstudien Bd.29, 1924).

K a n t war weder Mathematiker noch Naturforscher (E. A d i c k e s, ebenda). Es ist daher verwunderlich, dass gerade in diesen Kreisen viele seiner Lehre fast wie einem Evangelium anhängen. K a n t's sehr übertriebene Meinung, in jeder Wissenschaft sei nur so viel Wissenschaft, als Mathematik darinnen ist, hat allgemein Verbreitung und vielen Beifall gefunden. Weniger bekannt scheint zu sein, dass K. von Mathematik nicht viel verstand, und namentlich, dass er dieser Wissenschaft jeden selbständigen Erkenntniswert abgesprochen hat. (S c h o l z, S.21,22.)

Man sollte sich doch auch um die schwerwiegenden Einwände kümmern, denen K a n t's Philosophie im Ganzen unterliegt. Siehe namentlich B o l z a n o's Hauptwerk (1837) und F. B r e n t a n o's Versuch über die Erkenntnis (herausgegeben von F. K a s t i l, 1913; S.1 - 45) 1). (Während B o l z a n o's Kritik sich gegen einzelne Unklarheiten und Widersprüche richtet, die sich in K a n t's Begriffsbildungen finden, wird von B r e n t a n o die Gesamtanlage von K a n t's Philosophie kritisiert.)

Es ist schon besprochen worden, dass nach K a n t die Dinge der Welt sich nach "unserem" Erkenntnisvermögen richten müssen; was eine der stärksten philosophischen Verirrungen ist, die jemals vorgekommen sind, nur vergleichbar dem berühmten esse est percipi - und, gleich diesem, eine Hauptursache grossen Erfolgs. Die Wirklichkeit wird vergewaltigt, jede Möglichkeit einer objektiven Auffassung von Tatsächlichem bei den Anhängern dieses überspannten Apriorismus im Keime vernichtet. Mit vollem Rechte hat B r e n t a n o von einer Philosophie der Vorurteile gesprochen. Nichts als ein Vorurteil war insbesondere K a n t's Vorstellung von Geometrie, die auch schon von B o l z a n o kritisiert worden ist.

---

1) Die Hauptargumente B o l z a n o's findet man auch in einer Schrift eines seiner Schüler: P r i h o n s k y, Neuer Antikant, 1850.

Nach K a n t's Lehre vom Raume hat der Mensch "im Gemüthe" eine "reine Anschauung", die sich nicht etwa auf körperliche Dinge, sondern auf Punkte, Geraden und Ebenen, sowie auf anderes beziehen soll, das zur Euklidischen Geometrie gehört, dazu aber auch angeblich "die Form" ist, in der sich das Naturgeschehen abspielt. Das letzte hat man heute aufgegeben, aber noch immer glauben, ausser Philosophen, Mathematiker an die reine Anschauung, der zufolge "dem Menschen" (also z.B. auch Australnegern und Pygmäen) als Patengeschenk von der Natur die Euklidische Geometrie in die Wiege gelegt sein soll [1]. Es ist das ein merkwürdiges Beispiel des Sieges einer Suggestion über die unbefangene Beobachtung der Wirklichkeit. Denn es versteht sich, dass Niemand in seinem "Gemüthe" etwas derartiges gefunden haben kann.

Der Punkt soll nach dieser Ansicht "ein letztes, nicht weiter erklärbares Grundelement der Anschauung" sein, das "eine Existenz im Geiste" hat, "unabhängig von allem Empirischen, von allem Arithmetischen und bloss-Logischen", "eine Denknotwendigkeit"; und eine solche ist angeblich sogar die Euklidische Geometrie. Die reine Anschauung selbst ist "eine ins Transzendentale gesteigerte Vorstellungskraft", die von der "empirischen Anschauung" unterschieden werden muss.

Dieses alles nach H a m e l. In der Hauptsache steht das aber auch schon bei K a n t, der ja der Urheber dieser Lehre ist, dann bei J. F. F r i e s, N e l s o n, C o u r a n t und anderen.

Die letzte Unterscheidung ist gewiss sehr notwendig, denn:

---

1) Z.B. R. C o u r a n t, ~~Naturwissenschaften~~ Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Bd. VIII, 1913, S.122 und Naturwissenschaften, 2.Jahrgang, 1914, S.59, sowie G. H a m e l, Über die philosophische Stellung der Mathematik, Schriften der Technischen Hochschule Charlottenburg, 1928.

Die "Reine" Anschauung ist ein reines Hirngespinst gleich dem überindividuellen Ich oder dem absoluten Denken und anderen philosophischen Chimären.

Wir haben längst eine experimentelle Psychologie, und auch die menschliche Raumvorstellung ist vielfach untersucht worden. Niemals ist dabei irgend etwas zum Vorschein gekommen, das mit präzise fassbaren Eigenschaften ausgestattet wäre, noch hat je ein experimentierender Psychologe so etwas zu finden gehofft.

Siehe K. B ü h l e r, Artikel Zeit und Raumsinn im Handwörterbuch der Naturwissenschaften (1915), ferner J. F r ö b e s, S.J., Lehrbuch der experimentellen Psychologie, I, 1917, Abschnitt III, Kapitel 3 (Sehraum) und 4 (Tastraum), ferner und vor allem F r a n z H i l l e b r a n d, Lehre von den Gesichtsempfindungen, herausgegeben von F r a n z i s k a H i l l e b r a n d, 1929, Zweiter Teil: Raumsinn.

Menschliche Raumvorstellung ist ebenso wenig ein exaktes mathematisches Instrument als das Auge ein optisches ist. Die Sinnes täuschungen beim Lokalisieren von Gesichtseindrücken sind geradezu enorm und bedürfen überall einer verstandesmäßigen Korrektur, da uns nur Erfahrung über sie unterrichtet, besonders im Falle der Tiefenwahrnehmung.

Siehe die merkwürdigen Zahlenangaben bei B ü h l e r. Auf den durch Erfahrung ermöglichten Korrekturen beruht es, dass im praktischen Handeln Sinnestäuschungen meistens unschädlich sind. Auch bezieht sich dieses Handeln ja fast immer nur auf unsere nächste Umgebung, so dass die"stereoskopische Grenze" von vorn herein unschädlich ist. Siehe die eingehende Untersuchung bei H i l l e b r a n d, Abschnitt II.

Ja es steht die Raumvorstellung, die wir tatsächlich haben, mit geometrischen Ideen geradezu im Widerspruch. Eisenbahngeleise, von denen wir wissen, dass sie in gleichem Anstand neben einander herlaufen, scheinen sich gleichwohl zweimal zu treffen,und zwar in endlicher Entfernung, was mit keiner Art von Geometrie zu vereinigen ist. Nur wirklichkeitsfremde Menschen, idealistische Philosophen und Mathematiker, konstruieren sich ihr Weltbild

a priori und werden selbst durch die alltägliche Erfahrung nicht belehrt. Ausserdem ist noch übersehen, dass Vorstellungen sich gar nicht mitteilen lassen. Jeder hat andere [1].

Und auch in anderer Richtung hätte man etwas weiter denken können. Sollen etwa kleine Kinder und Thiere Euklidische Vorstellungen haben? Gibt es eine Geometrie der Heuschrecken oder Eingeweidewürmer? Und wann und wo und wie und aus was für Ursachen soll denn das transzendentale Anschauungsvermögen samt Euklidischer Geometrie in der Vorfahrenreihe des heutigen Menschengeschlechts aufgetreten sein? Etwa damals, als nach Ansicht des - übrigens hochverdienten - Jesuitenpaters E. W a s m a n n, Gott den Vorfahren der heutigen Menschen ihre Seele eingab? Allmälig, als Selektionsprodukt, kann es sich nicht entwickelt haben, denn verschwommen könnte es unmöglich in präzise abgefassten Lehrsätzen Ausdruck finden. Und bei welchem Anlass soll in der individuellen Entwickelung, sagen wir jetzt des europäischen Kulturmenschen, die transzendentale Anschauung auftreten? Alle diese Fragen, deren Beantwortung sich ergibt, sobald man sie nur aufwirft, sind gedankenloser Weise übersehen worden!! [2].

Es ist bemerkenswert, dass B o l z a n o auch die Frage nach der Raumvorstellung von Tieren aufgeworfen, allerdings wohl nicht ganz richtig beantwortet hat (1837, § 303, Nr.31).
Bei ganzen Familien von Tieren, die nicht wohl als Reflexmaschinen betrachtet werden dürfen, müssen wir eine "angeborene" (besser "ererbte") Raumvorstellung annehmen, die von unserer "empirischen" nicht sehr verschieden sein kann (Huftiere, nestflüchtende Vögel). Wir Menschen aber, und noch viele höhere Tiere, bringen, wie es scheint, nur eine funktionelle Disposition mit auf die Welt, nicht eine Raumvorstellung, die sich vielmehr erst allmählig, an der Hand Erfahrung, entwickelt.

---

1) B o l z a n o, 1837, § 75. Die Nichtmittheilbarkeit von Vorstellungen wird auch sonst vielfach übersehen, besonders in Wortschilderungen von Kunstwerken (Goethe's italienische Reise).
2) K a n t selbst lässt gar noch die empirische Anschauung nur durch die reine möglich sein (Kr.d.r.V., Zweite Ausgabe, S.206).

Übrigens ist auch zu bemerken, dass wir eine Vorstellung von einem leeren Raume wohl gar nicht haben. Wir bevölkern den Raum, wenn wir ihn vorzustellen versuchen, mit blassen Phantasiegebilden, die Kombinationen von Erinnerungsresten früher gemachter Erfahrungen und weniger exakt sind als der Inhalt dieser Erfahrungen selbst.

Bei Besprechung der Philosophie von H u s s e r l war schon darauf hingewiesen worden, was für Streiche uns Vorurteile und Phantasie spielen können, wenn wir dem intuitiven Denkverfahren zu grosses Vertrauen schenken (S.00). Hier haben wir ein Beispiel dazu. (Was H u s s e r l "reines Wesen des Raumes" nennt, ist offenbar ganz dasselbe wie K a n t's reine Anschauung. Es werden von Philosophen immer neue Worte eingeführt, was durchaus nicht der Verständlichkeit dient.)

In der axiomatischen Geometrie wird weder eine "reine" noch eine empirische Anschauung in Anspruch genommen. Gleichwohl scheinen moderne Vertreter auch dieser Forschungsrichtung den wahren Sachverhalt nicht erkannt zu haben. So betrachtet D. H i l b e r t das, was er (ausschliesslich) unter Geometrie versteht, als eine logische Analyse (gemeint ist wohl Idealisierung) unserer räumlichen Anschauung, und auch Fr. S c h u r spricht im gleichen Zusammenhang von Tatsachen der Anschauung. Was verstehen diese Autoren unter Anschauung, die "reine" oder die empirische? In keinem Falle könnte ich in solchen Äusserungen mehr erblicken als eine vermeintlich-philosophische Verzierung oder Edikette, die sie ihren mathematischen Untersuchungen angehängt haben, und die besser weggeblieben wäre. In Wirklichkeit ist die Geometrie dieser Autoren, wie die der Alten, eine Idealisierung von Erfahrungsinhalten (Ergebnissen von Messungen). Diese aber müssen von unseren Vorstellungen unterschieden werden [1].

---

1) Ausserdem ist noch zu unterscheiden zwischen Fähigkeiten des Vorstellens oder Anschauens, dem Zustand oder der Tätigkeit des

> Selbst ein so konkretes Ding wie die Erde können wir uns nicht so vorstellen, wie wir erkannt haben, dass sie ist; sondern wir begnügen uns mit einer Kugel von mässiger Grösse, die uns als Zeichen für die Erde gilt (F r e g e, 1884, § 60).

Bei den vorher genannten Autoren hat, wie gesagt, der besprochene erkenntnistheoretische Irrtum keinen Einfluss auf den logischen Charakter ihrer Entwickelungen ausgeübt, sondern lediglich eine Einengung ihres Interessenkreises zur Folge gehabt. Eben derselbe Irrtum hat aber bei anderen, die minder vorsichtig waren, erhebliche Denkfehler verursacht.

Was in der sogenannten Aproximationsmathematik von F. K l e i n Punkt und Gerade heisst, ist ein Klex oder Strich auf Papier [1] Das sind nicht Figuren, mit denen eine exakte Wissenschaft etwas anfangen kann. Und wenn J. H j e l m s l e v im gleichen Zusammenhang seiner "natürlichen Geometrie" einen "wirklich gezeichneten Kreis" mit seiner"Tangente" nicht blos einen "Punkt", sondern "eine ganze Strecke" gemein haben lässt - was sogar eine unbestreitbare Tatsache sein soll - [2] so ist einzuwenden, dass auch da Verschiedenartiges auf unzulässige Weise

---

Anschauens, und dem mehr oder minder verschwommenen und auf kleine Raumstücke beschränkten Inhalt der bei dem Einzelnen und im Augenblick vorhandenen Anschauung oder Vorstellung.

1) Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. 1902. Lithographiert. Der Nebentitel: Eine Revision der Prinzipien wird durch den Inhalt in keiner Weise gerechtfertigt. De mortuis nil nisi bene heisst: Du sollst von den Toten in würdiger Weise reden. Es heisst aber nicht: Du sollst alles blindlings loben. Und auch nicht: Du sollst als verfehlt Bekanntes neu herausgeben und dabei, zur Irreleitung des Anfängers, so tun, als wäre es in schönster Ordnung.

2) Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, Bd.II, 1923.

vermischt wird. Punkt, Kreis, Tangente sind mathematische Begriffe, gezeichnete Figuren sind etwas anderes. Dazu sind neu an diesen Theorien nur die Namen. Sie stellen einen Rückfall in eine Kinderkrankheit der Mathematik dar, die (spätestens) von E u d o x o s (408 - 355) vollständig überwunden worden war und die man wohl für erloschen hätte halten dürfen.

Die bei Mathematikern wie Philosophen häufige Verwechelung der Mathematik mit ihren Anwendungen ist ein typisches Beispiel für das, was die Logiker eine Metabasis nennen (μετάβασις εἰς ἄλλο γένος). Sie erklärt sich, teilweise wenigstens, aus dem Vorwiegen historischer Interessen bei vielen. Die Griechen kannten eine solche Unterscheidung noch nicht, da für sie, wie gesagt, Geometrie eine Lehre vom Raume der Physik war. Der Einfluss ihrer Art des Denkens aber hat, sehr begreiflicher Weise, nachgewirkt durch die Jahrhunderte hindurch. Es ist ungefähr so, wie bei gewissen physiologischen Untersuchungen. Wie thierische Gewebe, so können auch Gedanken weiter leben, wenn der Organismus, dem sie entstammen, längst der Verganegnheit angehört.

Der Unterschied, von dem die Rede ist, tritt scharf hervor in der Auffassung der Zahl π.

Für die Griechen stand die Existenz dieser Zahl von vorn herein fest. Zwar war sie, wie bei uns das Verhältniss des Umfangs eines Kreises zu seinem Durchmesser. Der Umfang (des Kreises) aber wurde als etwas von aussen her Gegebenes angesehen, wie irgend ein Natutobjekt. Er war für das Erkennen aposteriorisch. Es handelte sich nur noch darum, ihn näherungsweise zu berechnen. In der modernen Analysis wird dagegen der Umfangsbegriff a priori bestimmt, durch einen Grenzübergang definiert.

Unter Geometrie wird gleichwohl noch oft eine Bearbeitung

empirischer oder vermeintlich-psychischer Daten verstanden; nicht nur von den zuvor genannten Mathematikern, sondern z.B. auch von K r o n e c k e r, P a s c h, P o i n c a r é, H. W e b e r, A. V o s s, und anderen. Diese Terminologie passt nicht in unsere Zeit, und noch weniger tut es die Beschränkung der Interessen, der sie ihren Ursprung verdankt, und die auch heute noch sehr gewöhnlich ist bei Autoren, die das Wort Geometrie im Sinne der Alten brauchen.

Mit alledem ist natürlich keineswegs gesagt, dass Figuren und Modelle überflüssig sind, sondern nur, dass sie nicht missbraucht werden sollen (was schon B o l z a n o hervorgehoben hat). Auch ist für den Unterricht von Anfängern nichts praejudiziert. Im Gegenteile halte auch ich es für angebracht, dass in der ersten Einführung in geometrisches Denken an Empirisches angeknüpft wird. Zur Erkenntnis der Bedeutung abstrakten Denkens kann der Lernende nur allmählig erzogen werden [1].

Das über die Geometrie der Griechen Gesagte bedarf wohl noch einer Erläuterung. Tatsächlich haben ~~wir~~ sie in ihren Deduktionen nicht, wie wir es vielfach tun, vom Raume gesprochen, sondern nur von Figuren (im Raume), deren Zusammenhänge entwickelt werden können, ohne dass man von dem Begriff Raum (dem eines Kontinuums von drei Dimensionen) Gebrauch macht. Daraus aber folgt nicht, dass sie den Raum (nämlich den der Physik) nicht im Sinne gehabt hätten 2). Der Raum (τὸ κενόν , der leere Raum) wird eben beschrieben durch die Eigenschaften der in ihm möglichen Figuren. Ein Kreis muss auch für die Griechen ein Kontinuum gewesen sein (nicht nur ein Inbegriff von abzählbar-unendlich vielen Punkten), wiewohl sie den modernen Begriff des mathematischen Kontinuums nicht hatten.

---

1) Kürzlich ist ein treffliches Buch erschienen: W. S c h w a n, Elementare Geometrie (1929). Es könnte, wie ich glaube, besonders den Engländern zum Ersatz des schliesslich doch wohl einmal abzuschaffenden "Euklid" empfohlen werden.

2) Nach P e a n o sollen sie nicht einmal ein Wort gehabt haben, das unserem Raum entspricht.

Angesichts der vielen Grenzüberschreitungen, die tatsächlich vorgekommen sind, wird hervorzuheben sein:

Raum und Zeit sind Forschungsobjekte der Physik. Sie fallen also nicht nur nicht in den Kompetenzbereich des Philosophen, sondern auch nicht in den des Mathematikers.

Alles was der Mathematiker zur Erkenntnis von Raum und Zeit beitragen kann, ist, die dazu nötigen Hilfsmittel bereitzustellen. Und dieser Aufgabe ~~ich~~ hat die mathematische Forschung denn auch, wenn ich nicht sehr im Irrtum bin, zur Zufriedenheit der Physiker gerecht geworden.

Die Erkenntnis des trans-subjektiven, nicht spezifisch-Menschlichen, Charakters aller Mathematik hat zu der Aussage geführt, intelligente Wesen auf einem anderen Himmelskörper müssten "dieselbe" Mathematik haben wie wir. Das kann nun freilich nicht ganz stimmen, weil die Form der Aussagen nicht dieselbe zu sein braucht und die Umgrenzung des zu irgend einer Zeit bekannten Stoffes auch nicht. Sehen wir aber ab von allen Zufälligkeiten unserer Sprachen und anderen Nebendingen, so ist an dem Satz, dass es unbegrenzt viele Primzahlen gibt, wirklich nichts Menschliches zu erkennen, und auch nicht an dem einfachen Beweis, den schon das Altertum kannte, und den uns E u k l i d überliefert hat.

Die Möglichkeit einer Existenz intelligenter Wesen auf anderen Himmelskörpern ist, soviel bekannt, zuerst von G i o r d a n o B r u n o angenommen worden. Er hat diesen Gedanken aber mit mystischen Vorstellungen verquickt, und in noch höherem Maasse war dies der Fall bei F r. N i e t z s c h e, dessen Gedanke einer "ewigen Wiederkehr" wohl schon ein Produkt von Gedankenflucht, jedenfalls aber von Unkenntnis der Physik war.

Es ist hier vielleicht der Ort, schliesslich noch eines Begriffs Erwähnung zu tun, der neuerdings vielfach durch das Wort Irrational bezeichnet wird. Mit dem mathematisch-Irrationalen hat er nichts zu tun. Er bezeichnet vielmehr das für menschlichen Verstand nicht Erfassbare. (Ungefähr, aber nicht genau, E. d u B o i s - R e y m o n d's Ignorabimus.)

Die Natur in ihrer Totalität ist sicherlich irrational, und die menschliche, überhaupt tierische, Psyche nicht minder. Mit Hilfe dieses Begriffs lässt sich das Verhalten des Realisten wenigstens zum Psychischen durch eine, wie mir scheint, sehr glücklich gefasste Formel bezeichnen:

Alles ist gleichmässig irrational, und alles ist gleichmässig rationabel (E. L a s k).

"Rationabel" heisst dann natürlich nicht, dass es gelingen könnte, der physischen Wirklichkeit durch eindeutige

Zuordnung 1) adäquate Gedankengebilde gegenüberzustellen, wie es noch neuerdings der Naturphilosoph M. S c h l i c k lehrt, der das Erkennen gerade auf diese Art definieren will. Alles Naturerkennen liefert uns Bruchstücke, Einsicht in einzelne Kausale und andere Abhängigkeiten. Rationalisieren kann niemals mehr bedeuten. Immer muss von vielem abgesehen werden, das die Wirklichkeit bietet (Prozess des Idealisierens, der mit "Idealismus" nichts zu tun hat). Vieles entzieht sich schon durch seine Verwickelung unserer Einsicht, manches gewiss sogar für immer. Solche Lücken unserer Erkenntnis, die der kritische Realismus als ein Unvermeidliches hinnimmt (ohne übrigens damit der Forschung Schranken ziehen zu wollen!), suchen philosophische "Systeme" und die religiösen sogenannten Weltanschauungen auszufüllen, aber nicht mit dem Mittel des Rationalisierens (Materialismus und andere Ismen; Gott, Freiheit, Unsterblichkeit). Diese alle haben miteinander gemein, dass sie nur durch ungeheure Gedankensprünge zustande kommen, oft auch unter Beiseitesetzung von Tatsächlichem. Sie sind keiner Kontrolle fähig (S t ö r r i n g). Eine vorsichtige Forschung kann ihr Verfahren nicht als wissenschaftlich gelten lassen, und besonders muss sich der Erkenntnistheoretiker gegen die Einmischung von noch so erhabenen Gefühlen und fertig mitgebrachten Überzeugungen wehren. Dies hat sogar ein so gottesfürchtiger Forscher wie B o l z a n o getan 2), der in diesem Punkte allerdings nicht ganz folgerichtig verfuhr. Wie die Mathematik, so ist auch die Erkenntnistheorie (und die Wissenschaft überhaupt) ausschließlich Sache verstandesmässiger Überlegungen, kein Tummelplatz für die Entfaltung von Gemüthstiefe und von Neigungen mystischer Art.

Das wichtigste Mittel zum Rationalisieren ist die Mathmatik. In der Mathematik ist alles rational (mit Einschluss des mathematisch-Irrationalen).

Eben dieses ist, beiläufig bemerkt, eine der Ursachen dafür, dass viele die Mathematik nicht leiden mögen 3). In den Augen nicht weniger ist Rationalismus beinahe ein Schimpfwort (="Aufklärericht"). Sie halten es für gleichbedeutend mit Oberflächlichkeit, wofür die tatsächlich grauenhafte Oberflächlichkeit einiger Naturforscher doch wohl keinen Vorwand abgeben sollte. Alle diese Kritiker sind geborene Feinde aller echten Wissenschaft.

---

1) Das in der Mathematik dafür übliche Wort ist Abbildung. Man hat daher, ganz sachgemäss, von Abbildung des Physischen auf Gedankendinge geredet. Das ist missverstanden worden, und es ist daraus eine lächerliche Polemik gegen die "Abbildtheorie" hervorgegangen, die sich bis in die neueste Zeit hineinzieht.

2)(Vgl. Wissenschaftslehre, § 315, ~~Anmerkung~~ Anmerkung.)

3) Andere Ursachen sind oft erörtert worden. Siehe etwa A. V o s s, Die Beziehungen der Mathematik zur Kultur der Gegenwart (Sammelwerk Kultur der Gegenwart, Bd.III, 1914).

VI.

Das Erkennen mathematischer Wahrheiten.

Aus den geschilderten Prämissen - denen eines "mathematischer Realismus" - ergibt sich noch einiges mehr.

Der mathematische Realist kann zwar in ähnlicher Weise wie etwa der Historiker, fest davon überzeugt sein, dass in den Grundlagen seiner Wissenschaft alles in vollkommenster Ordnung ist. Dennoch wird er zugeben müssen, dass selbst allgemein anerkannte "Wahrheiten" mit Irrtum durchsetzt sein können. Er braucht sich nur der Geschichte seiner Wissenschaft zu erinnern. Und er wird Aussagen der Mathematik auf ähnliche Art gegenüberstehen, wie etwa Behauptungen, die sich auf Gegenstände der Naturwissenschaften beziehen. Er wird sagen, das komme darin zum Ausdruck, dass wir die gleichen Worte brauchen: Richtig und Falsch, Wahrheit und Irrtum. Das Richtige oder Wahre heisse eben: Wirkliches im Reiche dieser oder jener Gegenstände.

Während nun der Physiker wie der Psychologe überall auf Wahrnehmungen als letzte Quelle seiner Erfahrungen verweisen kann, hat der Mathematiker nichts derart zur Verfügung. Wie kann er trotzdem zu Erkenntnissen kommen? Welche sind die Quellen seiner Weisheit?

Zunächst bietet sich eine Antwort auf diese Frage dar, die, so einleuchtend sie scheinen muss, doch den wirklichen Bedingungen mathematischer Produktion keineswegs gerecht wird.

Wir finden die natürlichen Zahlen, wenigstens kleine Zahlen, vor. Nicht vermöge eines besonderen Denkverfahrens (Intuition). Vielmehr kennen oder haben wir sie ganz einfach, wenigstens als

VI.

Das Erkennen mathematischer Wahrheiten.

erwachsene Menschen. Wir haben ausserdem die Möglichkeit, Zuordnungen zu stiften, auch zwischen Zahlen. Wir verfügen über das Verfahren der vollständigen Induktion. Und mit diesen Mitteln des Denkens, die allesamt apriorisch sind, entwickeln wir sodann die weitere Mathematik.

Ich bezweifle nicht, dass das alles zutrifft. Aller mathematischer Unterricht geht, soweit er auf lückenloses Denken Wert legt, gerade auf diese Art zu Werke, und es ist nicht zu sehen, wie anders verfahren werden könnte. Dennoch ist dabei ein wesentlicher Umstand übersehen.

Nehmen wir irgendeinen Bestand mathematischen Wissens als im Geiste des Einzelnen vorhanden an, so kann von da aus in vielen Richtungen weitergedacht werden. Ein Mathematiker aber, der ohne weiteres darauf los schliessen wollte, würde nicht leicht, vielmehr nur zufällig einmal, Bemerkenswertes erreichen. Er würde seinem Forschungsgebiet auf eine ähnliche Art gegenüberstehen, wie ein Blinder einer unbekannten Gegend. Er kann nie wissen, wohin er gelangen wird. Es muss also noch anderes und nicht minder Wesentliches hinzutreten.

In der Tat haben wir Denkmittel zur Verfügung, die uns erlauben, aus der unermesslichen Mannigfaltigkeit des mathematisch-Wirklichen eine Auswahl zu treffen, die unserer Absicht des Erkennenwollens besser entspricht als das Gerathewohl blossen Weiterschliessens. Das Wichtigste davon ist die Phantasie.

Unter Phantasie ist hier zu verstehen ein undisziplinertes, triebhaftes Denken, ein Denken, das sich um die Regeln der Logik nicht allzuviel kümmert, also vielleicht Richtiges und Falsches kritiklos vermischt und und bald dieses bald jenes vor Augen zaubert. Eine schwer zu analysirende, oft unterhalb der Bewusst-

seinsschwelle verlaufende [1] Tätigkeit unseres Geistes, deren ganze, aber nicht zu unterschätzende, Bedeutung für die Wissenschaft darin besteht, dass sie uns Motive für die eigentliche Forschung liefert. Wir bilden uns, auf Grund von Kenntnissen, die wir schon haben, eine mehr oder minder deutliche, vielleicht nur sehr verschwommene, Vorstellung von dem, was erwartet werden darf, wenn wir in einer geeigneten Richtung weiterschliessen werden. Und veranlasst durch solche Vorstellungen suchen wir zu ermitteln, ob das Vermutete wirklich ist: Jetzt tritt das logische Denkverfahren in sein Recht, die Phantasiegebilde werden, wenn anders der Denkapparat des Mathematikers und sein Charakter in guter Verfassung sind, einer strengen Prüfung unterworfen.

In vielen Gebieten ist die mehr oder minder lebhafte Phantasie des Mathematikers tatsächlich das Einzige, das richtungbestimmend in die Forschung eintritt. Wir sind aber nicht blosse Schemen, die weiter nichts tun als denken, sondern wir finden uns hineingestellt in die Körperwelt, und diese liefert uns ebenfalls Motive der Forschung. Wir glauben in Zusammenhängen namentlich von Gegenständen der Physik, wie die Erfahrung sie uns kennen lehrt, mehr oder minder scharfe Bilder mathematischer Abhängigkeiten zu erkennen - solcher,die auch ohnedem würden betrachtet werden können, auf die wir aber, als blos denkende Wesen, vielleicht gar nicht verfallen wären. Die gesamte theoretische Physik ist ihrem mathematischen Inhalt nach auf eben diese Art zustande gekommen. Auch in solchen Fällen haben wir gewissenhaft zu prüfen, ob das auf Grund der Tatsachen der Empirie Vermutete zutrifft, ein mathematisch-Wirkliches ist - was ausnahmslos

---

1) Vgl. H. P o i n c a r é, 1914, S.41 - 47.

Idealisierungen des physisch-Wirklichen voraussetzt, da die Überlagerung mannigfachster und verschiedengearteter Vorgänge in aller Erfahrung wirkliche Präzision ausschliesst.

Durch ein Zusammenspiel dieser zwei Arten von Motiven mit logischem Denken ist alles entstanden, was wir heute als gesicherten Bestand der mathematischen Wissenschaft betrachten können.

Man kann vielleicht sagen, ja es ist sehr wahrscheinlich, dass alles Naturgeschehen sich in Formen abspielt, die in den Möglichkeiten der Mathematik enthalten sind - nur dass wir das in den wenigsten Fällen, und in keinem Fall a priori zu erkennen vermögen, also niemals so, wie K a n t es gewollt hat. Die Ansichten der Pythagoräer enthielten, mystisch wie sie waren, doch wohl den Kern einer richtigen Einsicht, derselben, die die Forschungsrichtung der heutigen Molekularphysik bestimmt.

Wo immer sich Ähnliches und eben darum von uns begrifflich-Zusammengefasstes wiederholt, da finden wir in der Natur die Zahl "realisiert". Jeder konkrete Körper ist aus einer bestimmten Zahl von Atomen zusammengesetzt, jedes Atom aus einem Kern und einer gewissen Zahl von Elektronen, sagt die Physik. Mag darunter dieses oder jenes zu verstehen sein, mögen die Theorien wechseln, wie sie es jetzt mit schwindelerregender Schnelligkeit tun, wir dürfen überzeugt sein, dass die Zahl, die "natürliche" Zahl, niemals von ihrem Thron gestossen werden wird, ja dass sie eine noch weit grössere Bedeutung erlangen wird als bisher schon. Wir haben die überraschende Auferstehung der P r o u t'schen Hypothese erlebt, die viele schon endgültig begraben hatten.

Auch den allgemeinen Begriff der reellen Zahl finden wir teilweise "realisiert" in Wellenlängen und Schwingungsdauern, überhaupt bei allen Messungen, also in Form physikalischer Grösser (Quanten).

Wenn wir feststellen, dass alle Messungen - unsere Messungen - mit Ungenauigkeiten behaftet sind (so dass wir, praktisch, schon mit rationalen Zahlen, Dezimalbrüchen von wenigen Stellen auskommen), so behaupten wir doch damit keineswegs, dass dem, was wir in der Natur finden, der Charakter des Exakten, zahlenmässig genau Ausdrückbaren, an sich schon abgehe.

Der mathematische Begriff des Kontinuums, wie er durch die Wertsysteme von einer oder mehreren Veränderlichen dargestellt wird, ist in besonderen Fällen "realisiert" (in physische Realität übersetzt oder auf sie abgebildet) in der Zeit und im Raume der Physik, die sich uns ohne weiteres als Kontinuen darbieten. Eben dieses hat K a n t und andere dazu verleitet, in dem, was sie unter Geometrie verstanden, eine Wissenschaft "vom Raume", und in der Arithmetik eine Wissenschaft "von der Zeit" zu erblicken.

Ausserdem finden wir, freilich sehr viel unvollkommener, Kontinuen auch im Psychischen. Unsere Farbenempfindungen, sofern wir solche haben (wenn wir nämlich nicht ganz farbenblind sind), erscheinen uns als ein Kontinuum, das sich ebensowenig als Raum und Zeit atomisieren lässt, und die Tonempfindungen und noch so manches andere sind in gleicher Weise zu beurteilen. Ist dem so,

ist also die Welt nicht ein Chaos, in das erst wir Ordnung hinein tragen, so dürfen wir uns natürlich nicht wundern, die Ordnung, die schon da ist, auch zu finden - soweit es nämlich die Mängel unseres Verstandes und unserer sonstigen Erkenntnismittel erlauben. Und da wir selbst ein Teil der Natur sind, so dürfen wir uns auch nicht wundern, etwas von der Ordnung, die im Physischen besteht, auch im Psychischen zu finden. Wäre dem anders, existierte also - statt der sogenannten prästabilierten Harmonie von L e i b n i z, einem meines Erachtens mystischem Begriff - kein "psychophysischer Mechanismus"(W e n t s c h e r), weder bei Menschen noch anderen Tieren, so könnte nicht ein einziges, falls es in's Dasein getreten wäre, sich in der Welt behaupten. Wir erkennen also in der genannten dazu immer unvollkommenen Harmonie eines der vielen Scheinprobleme, mit denen die philosophische Literatur angefüllt ist. Statt eines Problems finden wir ein Produkt der Entwickelung der Tierwelt in der Zeit (dessen Zustandekommen nun ein wirkliches Problem ist, nur kein Problem der Philosophie).

Aber das Reich der idealen Gegenstände ist sehr viel umfassender als alles, was sich im Physischen findet; wie die Mathematik es unzweifelhaft macht, die Punktkontinuen("Räume") von beliebig vielen Dimensionen und anderes kennt, das schwerlich mit Naturdingen in Verbindung gebracht werden kann (wie z.B. die perfekten nirgends-dichten Punktmengen).

Die Analogie, die wir zwischen Behauptungen der Mathematiker und solchen der Naturforscher festgestellt haben, kann sich nicht erstrecken auf die eigentliche Methode der Forschung.

Die Mathematik ist, wie gesagt, keine Erfahrungswissenschaft.

Dass sie - schon oft - für eine solche gehalten worden iat, beruht auf der Verwechselung der Begriffe Grund und Motiv.

Dass, wie alles Denken, so auch das Erkennen von Mathematischem mit Erfahrungen anhebt, dass wir mit Hilfe von Äpfeln oder Nüssen zur Kenntnis der Zahlen kommen, hat mit der Geltung mathematischer Urteile, ihrem Richtig oder Falsch, gar nichts zu tun.

Daher steht die Ansicht eines Empirikers wie P a s c h zur realistischen wenigstens nicht in einem unversöhnlichen Gegensatz. Der Empiriker richtet, soweit er als Empiriker spricht, sein Augenmerk auf Psychisches und Physisches, auf das Zustandekommen mathematischer Gedanken, wobei ihre Geltung gar nicht in Frage steht, vielmehr vorausgesetzt wird. Es ist dies ein Problem der Erkenntnistheorie, das besonders auch den Erzieher angeht, der sich fragen muss, wie ein jugendlicher Geist in der Richtung auf Mathematisches am besten entwickelt werden kann.

Das Reich der idealen Gegenstände finden wir nicht vor uns ausgebreitet wie die Körperdinge. Woran erkennen wir nun, dass wir nicht im Irrtum sind, dass irgend einer der Form nach mathematischen Behauptung eine Wirklichkeit entspricht?

Hier gibt es tatsächlich ein Wahrheitskriterium. Es besteht in dem Nachweis einer lückenlosen Syllogismenkette, die ausgehend von dem Einfachsten, das uns unmittelbar gewiss, wirklich auch noch von Niemanden bezweifelt worden ist (von den elementarsten Eigenschaften der natürlichen Zahlen) nach Auflösung aller dazwischengeschalteten zusammengesetzten Begriffe zu entlegeneren Einsichten hinführt. Aber freilich hat dieses Kriterium keine allzugrosse praktische Bedeutung, da die restlose Auflösung unserer Denkoperationen in Syllogismenketten zu unerträglichen Weitschweifigkeiten führt und nur in einzelnen Fällen durchführbar ist [1].

Wir sind daher in der Mathematik, ebenso wie in anderen Wissenschaften, dem Irrtum unterworfen. Immerhin wird unsere Zuversicht in die Wahrheit des Erkannten gesteigert, wenn wir einen Fehlschluss in unseren Überlegungen auch bei wiederholtem Durchdenken nicht zu entdecken vermögen. Indessen hat die Erfahrung gelehrt, dass wir, besonders bei Rechnungen geneigt sind, an derselben Stelle den gleichen Fehler zu machen. Daher ist wohl wichtiger noch ein anderes Anzeichen: Dass wir, wie es oft in der Mathematik der Fall ist, auf ganz verschiedenen Wegen zu dem gleichen Ergebnis kommen. Eben hierauf beruht das Vertrauen, das die meisten Mathematiker in die Hauptergebnisse der heutigen Analysis setzen: Neue Beweise bekannter Sätze sind mit nichten

---

1) Siehe meine Schrift Denken und Darstellung, zweite Auflage 1928.

überflüssig; besonders sind sie es natürlich dann nicht, wenn sie einfacher sind als die schon bekannten.

B o l z a n o hat ausgesprochen, dass es für einen mathematischen Satz nicht mehrerlei Beweise geben kann, wenn man von der Reihenfolge der vollzogenen Urteile absieht (1810, II, § 30).

Ich will das nicht diskutieren, glaube jedoch, dass die Wissenschaft mit diesem Gedanken nicht viel anfangen kann. Dass die Mathematik überhaupt fortschreitet, beruht ja gerade darauf, dass in ihr zusammengesetzte Begriffe (wie z.B. der Begriff Kontinuum) immer wieder die Rolle von einfachen übernehmen, und bei weiterer Verwendung nicht mehr zergliedert zu werden brauchen. Mag es sich theoretische immerhin so verhalten, wie B. sagt, so würde doch in jedem auch nur einigermassen verwickelten Falle der Nachweis dafür zu sehr grossen Umständlichkeiten führen, und in grösserem Maasstab würden solche Versuche geradezu auf eine Hemmung des Fortsxhrittes hinauslaufen; was natürlich nicht der Meinung B o l z a n o's entsprechen würde.

Der Quellen des Irrtums sind nicht wenige. Sie lassen sich nicht reinlich trennen, es können aber etwa die folgenden aufgezählt werden(teilweise nach M ü l l e r - F r e y e n f e l s):

Mangel an Umsicht und Urteilskraft, insbesondere Mangel an Selbstkritik, Unterschätzung der Leistungen anderer, überhaupt Oberflächlichkeit (Übersehen von Fehlerquellen), Vorurteile, Suggestibilität, Autoritätsglaube; Ermüdung, Beunruhigung, zeitweiliges Versagen der Aufmerksamkeit oder des Gedächtnisses (Begriffsverwechselung), Übereilung (vorschnelle Verallgemeinerungen), Mangel an Geduld und daher Unfähigkeit zu systematischem Denken, und Mangel an Einsicht in dessen Notwendigkeit 1), Mängel der Sprache und (viel häufiger!) ungenügende Beherrschung der Sprache, Mangel an Sinn für Genauigkeit des Ausdrucks, auch bei richtiger Einsicht (Hang zu Paradoxien), und oft auch unverschuldete Unkenntnis.

(In anderen Wissenschaften kommen noch hinzu: Unvollkommenheit der Sinneswahrnehmung, Sinnestäuschungen, ungenaue Beobachtung, Mangelhaftigkeit der Instrumente, Vertrauensseligkeit gegenüber tatsächlichen Angaben.)

In allen Fällen ist es ohne Zweifel nötig, sich nach Möglichkeit davon zu überzeugen, dass die einführenden Definitionen (solche zusammengesetzter Begriffe) nicht an inneren Widersprüchen kranken. Zum Glück liegt aber in der Mathematik die Sache so, dass Zweifel dieser Art in vielen Fällen nicht auftreten können.

Widerspruchsvolle Definitionen beziehen sich nicht auf das Reich der idealen Gegenstände. Sind sie als widerspruchsvoll er-

---

1) Nach F. K l e i n ist systematisches Denken eine Alterserscheinung.

kannt, so scheiden sie aus der weiteren Darlegung aus.

In dem Gesagten ist schon enthalten:

Unzusammenhängende Tatsachen kann der Mathematiker, abweichend von Vertretern aller anderen Wissenschaften, überhaupt nicht feststellen. Nur was mit der Wurzel der mathematischen Wissenschaft, dem Zahlbegriff, lückenlos zusammenhängt, darf als gesichert gelten, alles andere ist hypothetisch und bestenfalls wahrscheinlich.[1] Ob aber ein lückenloser Zusammenhang besteht, - ein Zusammenhang, dessen Gedankenbild eine Kette einfacher Syllogismen und widerspruchsfreier Definitionen sein muss - kann unter Umständen schwer zu entscheiden sein.

Zwar kann auch der Mathematiker, der etwa einen zahlentheoretischen oder geometrischen Satz vermutet, experimentieren, mit Zahlen oder Figuren. Das Ergebnis aber ist bestenfalls eine Widerlegung, sonst immer ein Non liquet [2].

So tastet sich der Mathematiker mit Phantasiespiel, Schlüssen, Definitionen und Kritik - die natürlich wiederum aus einem Schliessen besteht, - an seinen Gegenständen herum, die ihm auf keine andere Art zugänglich sind.

VII.

Der psychologische Einwand. Willkürliches in der Mathematik.

Gegen das bis jetzt Vorgetragene kann ein Bedenken erhoben werden, das sich etwa folgendermaassen formulieren lässt:

---

1) Ich greife hier ein wenig vor. (Siehe Abschnitt XII.)

2) Dieses übersehen die circle squarers. Irgend drei gezeichnete Linien schneiden sich anscheinend "in einem Punkte"; woraus dann gefolgert wird, dass die entsprechenden mathematischen Linien (Geraden und Kreise) sich wirklich in einem Punkt schneiden.

kannt, so scheiden sie aus der weiteren Betrachtung aus.

In dem Gesagten ist schon enthalten:

Unzusammenhängende Tatsachen kann der Mathematiker, abgesehen von Vertretern aller anderen Wissenschaften, überhaupt nicht feststellen. Nur wer mit der Hilfe der mathematischen Wissenschaft dem Zahlbegriff, Ursachlos zusammenhängt, darf als gesichert gelten, alles andere ist hypothetisch und bestenfalls wahrscheinlich.[1] Ob aber ein lückenloser Zusammenhang besteht, - ein Zusammenhang, dessen Gedankenbild eine Kette einfacher Syllogismen und widerspruchsfreier Definitionen sein muss - kann unter Umständen schwer zu entscheiden sein.

Zwar kann auch der Mathematiker, der etwa einen zahlentheoretischen oder geometrischen Satz vermutet, experimentieren, mit Zahlen oder Figuren. Das Ergebnis aber ist bestenfalls eine Widerlegung, somit immer ein Non liquet [2].

So tastet sich der Mathematiker mit Phantasiespiel, Definitionen, Definitionen und Kritik - die natürlich wiederum aus einem Schlussen besteht, - an seinen Gegenstänen heran, die ihm auf keine andere Art zugänglich sind.

VII.

Der psychologische Einwand.

Willkürlichkeit in der Mathematik.

Gegen das bis jetzt Vorgetragene kann ein Bedenken erhoben werden, das sich etwa folgendermassen formulieren lässt.

---

1) Ich greife hier ein wenig vor. (Siehe Abschnitt XII.)

2) Diese Übersetzen die cirkle carré. Irgend drei gezeichnete Linien nähern sich schliessend "in einem Punkte"; worauf dann gefolgert wird, dass die entsprechenden mathematischen Linien (Geraden und Kreise) sich wirklich in einem Punkt schneiden.

Wie kann der Inhalt der Mathematik etwas Objektives sein, wenn der Mathematiker doch die Freiheit hat, zu definieren wie er will (Widerspruchslosigkeit der Definitionen vorausgesetzt) und dann auch noch weiterzuschliessen, in welcher Richtung er will? Hält da nicht das Menschliche seinen Einzug in die Wissenschaft, ja sogar die von allerlei Zufälligkeiten bestimmte Geschmacksrichtung des Einzelnen, Dogmatismus und reine Willkür? Wird nicht dieses und jenes vielleicht nur darum untersucht, weil der berühmte X oder Y sich dafür interessiert hatte? Welche ungeheure Rolle spielt nicht das Historische im Bestande der mathematischen Wissenschaft?

Wird nicht hiermit die Frage nach dem Sinn unseres Tuns ad calendas graecas verschoben?

Ich muss gestehen: Wenn es darauf keine Antwort gäbe, möchte ich nicht Mathematiker sein.

Aber bedeutende Forscher von sonst sehr verschiedenen Ansichten sind, so muss es mindestens scheinen, anderer Meinung. G. C a n t o r hat die "Freiheit" der Mathematik betont, und sehr verdiente Mathematiker haben, wie wir schon gesehen hatten, die mathematischen Begriffe als reine Produkte menschlicher Geistestätigkeit betrachten wollen.

Die erwähnte Äusserung C a n t o r's war jedoch nicht gegen den Realismus gerichtet, sondern gegen K r o n e c k e r's allzu engherzige Auffassung der Mathematik. C. war sogar Realist, ziemlich genau im Sinne der vorausgehenden Schilderung, wenn auch sein Sprachgebrauch schwankt; nur dass er nicht auf den Gedanken gekommen zu sein scheint, dem Mathematischen eine besondere (metaphysische) Seinssphäre zuzuerkennen [1].

1) Vgl. Grundlagen der allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, 1883, S.18, 19, 44.

Bei P o i n c a r é liest man aber sogar[1]:

> Alles, was nicht Gedanke ist, ist das reine Nichts ... Zu sagen, dass es etwas anderes gibt als den Gedanken, ist also eine Behauptung, die gar keinen Sinn haben kann.

Es ist dies einer der erstaunlichsten Fälle von philosophischem Dilettantismus; nicht an sich, denn es gibt vieles derart, sondern weil man von einem Forscher vom Range P o i n c a r é's anderes erwarten durfte. Konnte P. glauben, dass seine Bücher, und die Lehren seiner Bücher, weiter nichts als Gedanken, mithin seine Gedanken sind, und warum schrieb er dann? Und konnte er glauben, dass die Gedanken seiner Leser, also z.B. die Ablehnung seiner Ansichten, ebenfalls seine Gedanken wären? Oder zweifelte er an der Existenz seiner Leser und seiner eigenen Existenz? Wie konnte er denn zweifeln, wenn er gar nicht existierte? Auch Mathematik und Physik schützen vor Torheit nicht!

Die von G. C a n t o r sogenannte Freiheit hat mit dem, was manche als Willensfreiheit glauben "verstehen" zu können, gar nichts zu tun. C. meinte, dass Mathematiker,gleich anderen, sich mit irgend welcher Motivierung für bestimmte Forschungsrichtungen und Probleme entscheiden, und dass man ihnen keine Steine in den Garten werfen soll. Von einer ähnlichen Freiheit der Begriffsbildung aber kann, wie C a n t o r selbst hervorgehoben hat, nur in einem beschränkten Sinne die Rede sein. Begriffe dienen ja, wie ihr Name es sagt, zum Begreifen, also zu einem Zweck. Dann aber sind sie nicht nur einer Kritik unterworfen, die in Worten

---

1) Wert der Wissenschaft, Deutsch von E. W e b e r, 1921, S.208. Der Kommentator H. W e b e r hat bedauerlicher Weise diese Äusserung ohne Widerspruch gelassen.

wie zulässig, unzulässig, sinnvoll, sinnlos zum Ausdruck kommt. Sie können vielmehr auch zweckentsprechend oder unzweckmässig, für uns wertvoll oder wertlos sein, mit Zwischenstufen.

Wie der Mineraloge, der einen Schnitt durch einen Kristall macht, um dessen Struktur zu erforschen, nicht jede Schnittführung brauchen kann, so muss auch der Mathematiker unter seinen Durchschnitten durch den Kristall der Mathematik, eben den Begriffsbildungen, eine Auswahl treffen, nach dem Mehr oder Weniger ihrer Leistungsfähigkeit. Sie sollen ihm und anderen eine möglichst reiche Erkenntnis vermitteln. Das gelingt mehr oder minder gut, und oft gelingt es schlecht genug, besonders auf den ersten Wurf: Wie vieles haben nicht Mathematiker geändert oder ganz aufgegeben, und wie vieles mehr ist niemals an das Licht der Öffentlichkeit gekommen!

Man hat die Tätigkeit des Mathematikers oft mit der des Künstlers, insbesondere des Bildhauers verglichen. Während aber dieser die Struktur seines Materials gar nicht benutzt, will im Gegenteile der Mathematiker, gleich dem Naturforscher, eine zunächst verborgene Struktur erkennen und sichtbar machen.

Nicht alle mathematischen Begriffe sind so durch die Natur der Sache bestimmt, wie etwa der Begriff der natürlichen Primzahl es ist. Es bieten sich vielmehr gar nicht selten ihrer mehrere dar, die einigermaassen dasselbe leisten. In solchen Fällen kommt es dann auf die Bewertung der Begriffe an und auf eine unter ihnen zu treffende Wahl. Aber auch abgesehen von der Fehlbarkeit unserer Urteile braucht diese Wahl nicht eindeutig bestimmt zu sein (so wenig als die Schnittebenen des Mineralogen es sind). Insofern bleibt wirklich ein gewisses Maass von Zufall und Willkür zurück. Dieser Zufall und diese Willkür besagen

jedoch nicht mehr, als dass man zu denselben Einsichten von verschiedenen Ausgangspunkten her kommen und dass man sie durch dieses oder jenes Gefüge von Definitionen und Schlüssen darstellen kann. Nur die Sprache, in der mathematische Gedanken ausgedrückt werden ist der Variierung fähig, das, worauf es ankommt, der Inhalt richtiger mathematischer Aussagen, ist es nicht. Verschiedene Systeme von Begriffen sind äquivalent, wenn sie denselben Gedankeninhalt umspannen und dieselbe Wahrheit zum Ausdruck bringen.

Der Inhalt aller widerspruchsfreien mathematischen Begriffe, derer, die wir annehmen und derer, die wir aus irgend welchen Gründen nicht benutzen, ist nach dem Gesagten bereits da, er existiert, ganz unabhängig von unserem Wissen und Nichtwissen, im Reiche der idealen Gegenstände; gerade so wie die ebenfalls mehr oder minder brauchbaren Schnittebenen der Kristalle in einem sogar physikalischen Sinne schon da und vor anderen ausgezeichnet waren, ehe es noch Mineralogen gab, die einen Kristall untersuchen konnten.

Es bleibt schliesslich von den erhobenen Bedenken dieses übrig, dass die Richtung der mathematischen Forschung jederzeit durch eine Menge von Suggestionen und anderen Zufälligkeiten bestimmt wird. Das trifft zu, bezieht sich indessen so offenbar auf unsere Kenntnis des Mathematischen, dass es als ein ernstlicher Einwand nicht betrachtet werden kann. Da der Zufall bald in dieser, bald in jener Richtung wirkt, so ist die Annahme gerechtfertigt, dass Einseitigkeiten im Laufe der Zeit ausgeglichen werden. Der Wechsel geistiger Moden, oft eine verdriessliche Erscheinung, hat doch dieses Gute, ein allzu einseitiges Wachstum des Baumes der Wissenschaft zu erschweren. Wir dürfen wohl glauben, dass im Laufe längerer Zeitabschnitte die Entwickelung der

mathematischen Wissenschaft durch eine sachliche Notwendigkeit (divina quadam necessitate) bestimmt wird.

Die dem erörterten Einwand zu Grunde liegende Meinung dürfte übrigens daraus entstanden sein, dass (ganz allgemein) das Finden von Begriffen nicht automatisch erfolgt, sondern eine Spannung der Aufmerksamkeit erfordert, also mit einer Betätigung des Willens verbunden ist. (Damit ist nicht gesagt, dass wir uns dieses Umstandes immer bewusst sind. Ich sage nur, dass wir uns seiner bewusst werden, sobald wir auf ihn achten.) Man kann vielleicht noch den Einwand versuchen, dass gewisse Feststellungen, die sich auf das Reich des idealen Gegenstände beziehen, öfter in Form von Werturteilen auftreten, also eine Kritik aus der Mathematik selbst zu enthalten scheinen, die natürlich, wenn sie etwas Objektives ist, gar keiner Kritik unterliegen kann. "Dies ist ein wichtiger Satz", behauptet jedoch nur;

Dieser Sachverhalt kehrt häufig wieder. Für unser Erkennen: Diese Voraussetzung, diese Schlussweise, diese Folgerung oder wenigstens sehr ähnliche, kehren wieder.

Alle Einwände, die sich gegen den Psychologismus überhaupt richten, richten sich auch gegen die Mathematischen Schöpfungsideen. Gibt man diese einmal zu, so hört jeder Anspruch der mathematischen Geistesbetätigung auf Allgemeingültiges ihrer Ergebnisse zunächst auf. Es gibt dann nicht nur so viele "Mathematiken" (Ausdruck von S p e n g l e r) als "Kulturen", sondern so viele, als es Mathematiker gibt. Was in dem Kopf des einen vorgeht, ist ja nie dasselbe, wie was der andere denkt. Es gibt dann keine Mathematik als Wissenschaft mehr. Als Retter tritt dann der Konventionalismus auf den Plan. Normal-konstruierte Manschen werden, so meint man wohl, sich über Mathematisches

verständigen können. Aber wer ist normal? Zwischen gesund und krank lässt sich keine Trennungslinie ziehen! [1])

Wir werden also die Mathematik, den Stoff der Überlegungen der Mathematiker, immer zu unterscheiden haben von dem, was in Zeitschriften und Lehrbüchern steht; was im Grunde selbstverständlich ist, aber oft genug übersehen wird. Und diese Mathematik ist nicht etwas, das heute so sein könnte und morgen anders. Ihre Gegenstände haben ein völlig zeitloses, oder, wenn man will, ewiges Sein. Ihre Zusammenhänge sind etwas, das nicht einmal (wie beispielsweise die Gravitation) bei fehlerfreiem Denken anders gedacht werden kann. Die Mathematik, nun als Lehre von diesem Seienden, hat daher einen höheren Erkenntniswert (eine höhere Dignität) als alles, was uns etwa Physiker oder gar Historiker lehren können. (Dass sie darum wertvoller sein müsste als alles andere, folgt nicht, soll aber ausdrücklich gesagt werden. Erkenntniswert ist nicht Wert schlechthin.)

Hiermit glaube ich von dem Relativismus, Psychologismus, Anthropologismus oder wie der besprochene Ismus sonst noch genannt werden mag, einstweilen Abschied nehmen zu dürfen. Hinzugefügt sei aber noch Einiges über die Rolle, die dem Willkürlichen im mathematischen Denken wirklich zukommt.

Dass die mathematische Zeichensprache in hohem Maasse willkürlich ist und sein muss, versteht sich von selbst. Sie unterliegt also einer Kritik; ebenso wie die Umgrenzung der Begriffe kann sie mehr oder minder brauchbar sein. Sie kann Gedanken reinlich zum Ausdruck bringen oder mit Nebendingen belasten. Ähnliches gilt von dem Methoden der mathematischen Wissenschaft.

---

1) Siehe etwa F. L e n z, Menschliche Erblichkeitslehre, Dritte Auflage, 1927, S.508, 519.

Wir reden von Methoden, im Gegensatz zu Kunstgriffen, wenn wir aussichtsreiche Wege bezeichnen wollen, solche von denen aus nicht nur hier oder dort etwas zu sehen ist. Solche Methoden auszubilden, hat man längst als eine Hauptaufgabe der Wissenschaft erkannt. Sie sind eine Forderung der Ökonomie des Denkens. Und mit einem Mehr oder Minder von Güte der Methodik hängt aufs Engste das zusammen, was man Schönheit der Mathematik oder auch Eleganz nennt: Eben das, was einige, die sich durch besondere Höflichkeit auszeichnen, glauben den Schustern und Schneidern überlassen zu sollen.

Einen hoch entwickelten Schönheitssinn haben, wie überall, so in der Mathematik, die Griechen betätigt. Sie sind die erfolgreichsten Schönheitssucher gewesen in dieser unserer Menschenwelt. Uns Neueren aber gelingt es nur mangelhaft, es ihnen darin nachzutun. Es dringt zu vieles auf uns ein und die Wissenschaft ist zu schwer geworden, als dass alles, was da wünschenswert ist, sich mit einem male könnte erreichen lassen. Diesen Zustand hatte schon L e i b n i z vor Augen, der, soweit er in anderer Hinsicht vom Geiste der Griechen entfernt geblieben ist, doch ein lebendiges Gefühl für die Schönheit der Mathematik bewiesen hat.

Von ihm stammen die wunderbaren Zeichen

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{und} \quad \int f(x)dx \ ,$$

aber auch die Anfänge der Determinantentheorie gehen auf ihn zurück. L e i b n i z war wohl auch der erste, der an einer Anhäufung blosser Hilfsbegriffe Anstoss nahm, und für die Geometrie als Ideal hinstellte, dass gewissermaassen mit den Begriffen selbst, statt mit blossen Koordinaten gerechnet werden sollte.

Damit war eine Forschungsrichtung, wenn auch noch nicht klar bezeichnet, so doch wenigstens geahnt, in der sich später die (heute überholten)Versuche von H. G r a s s m a n n bewegt haben, und in der dann, wenn auch in einem sehr engen Gebiet, auf Grund der Entdeckungen von A r o n h o l d und C l e b s c h, jenes Ideal tatsächlich realisiert werden konnte, durch die symbolische Methode der Invariantentheorie.

Ähnliche Tendenzen sind auch in anderen Gebieten der neueren Mathematik zu bemerken, so in der Theorie der analytischen Funktionen und der komformen Abbildung, in der nach ihrem Entdecker G a l o i s benannten Theorie algebraischer Gleichungen, in Teilen der Zahlentheorie und anderem. Als ein Beispiel, in dem bei einem speziellen Gegenstand Zurückdrängung alles Zufälligen, Nebensächlichen, Störenden, und damit wirkliche Schönheit wenigstens in den Grundlagen erreicht zu sein scheint, mag noch W e i e r s t r a s s's Theorie der elliptischen Funktionen genannt werden[1].

Im Ganzen wird von der neuesten Mathematik wohl leider zu sagen sein, dass sie nicht nur notgedrungen von dem L e i n i z'schen Ideal entfernt geblieben ist, sondern dass auch bei vielen ein lebendiges Interesse für eine Verbesserung der Wissenschaft im Sinne einer Zurückdrängung des Willkürlichen zu vermissen ist. Wir haben eine ungeheure Menge von Anfängen - die keineswegs alle sehr verheissungsvoll aussehen - und allzuvieles bleibt in halbfertigem Zustande liegen, da der häufige Wechsel geistiger Moden sich immer neuen Problemen zuwendet. So ist es selbst der Theorie der A b e l'schen Funktionen ergangen, die eine der

---

1) Dieses fühlbar zu machen, habe ich mich in verschiedenen Arbeiten bemüht, ohne damit viel Erfolg gehabt zu haben. Einiges davon habe ich neuerdings vervollständigt und in der Bezeichnung verbessert. (Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd.35, 1928.)

fruchtbarsten und besonders in ihren Anwendungen auf die algebraische Geometrie schönsten Methoden der Mathematik darstellt.

Es wäre meines Erachtens dringend erwünscht, dass einige Mathematiker mehr sich um den schon vorhandenen Stoff bemühten, und danach trachteten, ihn möglichst objektiv zu gestalten, ihn also von persönlich-Zufälligem, von allerlei historischem Ballast zu befreien. Ein selbst nur bescheidenes Etwas so gut zu machen als nur irgend möglich, den feineren Schliff da, wo es angeht, auch wirklich anzubringen, scheint mir eine nicht minder wichtige Aufgabe zu sein als die Produktion des in einem engeren Sinne und meistens allein so genannten Neuen.

Es versteht sich übrigens, dass wer immer Vorhandenes wesentlich verbessert, auch zu im engeren Sinne so genannten Neuem gelangen muss. Dies ist das Kriterium wertvoller Leistungen und wird es immer bleiben.

Die Ziele der Mathematiker sind sehr verschieden, und es ist gewiss gut, dass es so ist. Die griechischen Mathematiker haben sich überall konkrete Probleme gestellt, obwohl - wie sich deutlich erkennen lässt - an umfassenderen Ideen bei ihnen kein Mangel war. Die Griechen haben Wert darauf gelegt, die Lösungen ihrer Aufgaben bis zu Ende durchzuführen. Auch in der neueren Mathematik haben wir noch typische Repräsentanten dieser Geistesrichtung, wie namentlich G a u s s und H. A. S c h w a r z. Man hat aber allgemein auch den ökonomischen Wert des Zusammenfassens erkannt. Der Kalkül der Infinitesimalrechnung, die analytische Mechanik von L a g r a n g e und die Theorie der algebraischen Gleichungen von G a l o i s sind klassische Beispiele.

Natürlich darf über dem Zusammenfassen der Sinn für das

Konkrete nicht verloren gehen, in dem schliesslich alle umfassenderen Gedanken wurzeln, und um dessentwillen die sogenannten allgemeinen Lehrsätze und Methoden ja auch da sind. Die Ausschaltung von Zufälligem und Willkürlichem wird sich bei speziellen Problemen am ehesten erreichen lassen. Jedenfalls ist es ein Irrtum, dass man mit der Einsicht in die Lösbarkeit eines Problems immer auch die Lösung, und zwar eine sachgemässe Lösung, schon in der Tasche hat. Die Wertschätzung der sogenannten Allgemeinheit ist in neuerer Zeit sehr übertrieben worden. Manche brauchen gar die Worte allgemein und speziell im Sinne von Lob und Tadel. Besonders jüngere Mathematiker sind in "Verallgemeinerungen" gross. Man entfernt sich weit von dem Geiste der klassischen Mathematik, der namentlich in den Schriften des Princeps Mathematicorum verkörpert ist, wenn man alles nur aus der Ferne betrachten will und sich mit einer undeutlichen Vorstellung des Konkreten begnügen zu können glaubt. Ich halte eine solche Auffassung der Mathematik für nicht besser als die ebenfalls verbreitete Scheuklappenmathematik, die in engen Problemkreisen stecken bleibt und sich wichtigste Zusammenhänge entgehen lässt. Das Abstrakte ist gut und das Konkrete ist auch gut, jedes an seinem Platze. Man kann auf die eine wie auf die andere Art gründlich und oberflächlich sein.

VIII.

Das Nichts und die Null.

Die rationalen, negativen und Gauss'schen Zahlen.

Nachdem nun, wie ich zu hoffen wage, die Auffassung der Mathematik als einer Wissenschaft von Wirklichem und nicht Psychologischem hinreichend gefestigt ist, soll ihr wichtigster

Begriff, der der Zahl, noch besonders gewürdigt werden. Als Einleitung dazu setzen wir zunächst die Erörterung des Existenzbegriffs nach einer bisher nicht betrachteten Richtung fort.

In der Mathematik kommen neben bejahenden auch <u>verneinende Urteile</u> vor. Mathematiker sagen z.B.: "Es gibt keine drei natürlichen Zahlen x, y, z, für die $x^3 + y^3 = z^3$ ist." Und sie sagen: "Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat gleich - 1 ist".

In solchen Behauptungen werden widersinnige Annahmen zurückgewiesen, darunter solche, die, wie die ~~meist~~ zuerst genannte, nicht ohne weiteres als widersinnig zue erkennen sind - Vermutungen über die Wahrheit. Ähnlich, zum Beispoel, in der Physik (Chemie): Es gibt (wie es scheint) keine Isotopen des Wasserstoffs und mancher anderer Elemente. Da irrige Vermutungen fortwährend auftauchen, so kann die Wissenschaft ausdrücklicher Verneinungen nicht entraten. Das Vermuten kann aber auf Richtig und Falsch gar keinen Einfluss haben. Ein vollkommen einsichtiges Wesen, das <u>als Fiktion</u> - gleich anderen Fiktionen - auch in der Erkenntnistheorie zulässig ist, würde wohl Fragen wie die nach ganzzahligen Lösungen der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ gar nicht stellen. Für uns Menschen liegt die Sache anders, und namentlich können wir das indirekte Beweisverfahren nicht entbehren. (Siehe Abschnitt XVIII.) Wir sagen in solchen Fällen: Es gibt nichts derart. Eine Existentialbehauptung wird negiert.

Der Begriff <u>Nichts</u>, so unvermeidlich er der Wissenschaft wie im Leben der Menschen ist, hat mit keiner Art von Wirklichkeit etwas zu tun, weder mit Physischem, noch mit Psychischem, noch Idealem. Er ist ja gerade die Verneinung alles Wirklichen.

Er ist <u>eine Fiktion</u>, vermutlich entstanden aus dem Bedürfnis, schon vorhandene Sprachformen, in denen ein <u>Etwas</u> vorkommt,

auch im Falle der Verneinung beizubehalten - also, wenn man will, ein Produkt der Bequemlichkeit. (Nichts = nicht Etwas). Eine Erfindung ist das Nichts nur insofern nicht, als sein Begriff, der wohl in allen Sprachen vorkommen wird, schwerlich jemals mit bewusster Absicht gebildet worden ist. Das Nichts trägt aber trotzdem das Gepräge der Erfindung - wie die Sprachen selbst [1]. Keinesfalls kann man es eine Entdeckung nennen, da ihm eben "nichts" Objektives, kein Seiendes entspricht.

Wenden wir uns nun zur Mathematik, so finden wir sogleich einen verwandten Begriff, über dessen Kennzeichnung keinerlei Zweifel aufkommen kann:

Die Null ist eine Erfindung, lediglich ein technisches Hilfsmittel, das der Praxis des Rechnens dient.

Man sieht das ohne weiteres, wenn man bedenkt, dass eine Gleichung der Form a - b = 0 dasselbe aussagt wie die Gleichung a = b, in der keine Null vorkommt.

Das Gleiche gilt von mehreren Arten von "Zahlen", deren sich die Mathematiker bedienen: Den gebrochenen ("rationalen") Zahlen, den negativen, den irrationalen, den "imaginären" und "idealen" Zahlen, und noch anderen. Sie alle sind Erfindungen. Alles, was sich mit ihrer Hilfe ausdrücken lässt, würde sich auch anders ausdrücken lassen: Nämlich unter Verwendung nur natürlicher Zahlen: Freilich sehr viel umständlicher, meistens so viel umständlicher, dass kaum Jemand im Ernste daran denken wird, den wirklichen Sachverhalt immer wieder sichtbar zu machen: Das würde ganz unerträglich sein.

---

1) Man lese die bewunderungswürdige Auseinandersetzung über die Anfänge der menschlichen Sprache bei B o l z a n o (1837, § 285,7).

Der Zweck aller dieser Vorkehrungen ist immer: Uns das Denken und den wissenschaftlichen Verkehr zu erleichtern. Und der Sinn der mit ihrer Hilfe zustande kommenden Aussagen ist immer gleichartig: Sie alle beziehen sich, trotz gegenteiligen Anscheins, nicht auf die genannten Hilfskonstruktionen, und noch weniger auf blosse Zeichen, Figuren auf Papier, sondern auf das Reich der idealen Gegenstände, in letzter Linie auf natürliche Zahlen, aus denen sich die anderen Arten von Zahlen zusammensetzen.

Die genannten Zahlbegriffe, mit alleiniger Ausnahme der natürlichen Zahlen, sind, sofern sie Zahlen genannt und als solche behandelt werden, Fiktionen. Sie alle aber haben, abweichend von Fiktionen der Physik (Massenpunkten, Kreisprozessen, absolutschwarzen Körpern u.s.w.), eine reale Bedeutung: Sie vertreten Komplexe (Gesamtheiten, Mengen oder Klassen) natürlicher Zahlen.

Es erscheint nützlich, dies an den einfachsten Beispielen zu erläutern (Vgl. die Literaturangaben E n r i q u e s und namentlich H ö l d e r). Das Rechnen mit natürlichen Zahlen und die Art wie es, rein arithmetisch, zu entwickeln ist, setze ich als bekannt voraus. (Siehe wiederum H ö l d e r, oder etwa R u s s e l l, 1923, Kapitel I.) Doch wird die Bemerkung am Platze sein, dass die "Folge" der natürlichen Zahlen,

$$1, 2, 3, \ldots n, n + 1, \ldots$$

mit einer zeitlichen Folge (dem sogenannten Durchlaufen der Folge oder vielmehr eines Stückes von ihr) nichts zu tun hat.

Ebenso bei den weiterhin zu betrachtenden "Folgen", für die die Bemerkung nicht wiederholt wird. (Vgl. auch S.00.)

Die Frage, wie eine Folge von Dingen (Gegenständen des Denkens) beschaffen sein muss, damit sie eindeutig-umkehrbar auf die Folge der natürlichen Zahlen abgebildet werden kann, ist von G. P e a n o beantwortet worden. Siehe darüber G e n o c c h i - P e a n o, 1899, Anhang II. Die dort gegebene

Darstellung ist, wegen der Verwendung des sogenannten Logikkalküls nicht gerade bequem zu lesen. Meinem Geschmack und wohl auch dem mancher meiner Leser entspricht besser eine Darstellung wie die von A. L o e w y. (Lehrbuch der Algebra, 1915, § 1.)

Die positiven rationalen Zahlen.

Dass die üblicher (und zweckmässiger) Weise in der Form von Quotienten $\frac{p}{q}$ geschriebenen (positiven) rationalen Zahlen in Wirklichkeit geordnete Paare p, q von natürlichen Zahlen, insbesondere von teilerfremden Zahlen sind, ist schon den griechischen Mathematikern vollkommen geläufig gewesen, und geht eben aus der Schreibart $\frac{p}{q}$ unzweideutig hervor. Das elementare Rechnen mit solchen rationalen Zahlen ist danach, deutlicher gesagt, ein Rechnen mit "Klassen" (Komplexen) von Paaren natürlicher Zahlen, da immer dann, wenn p und q teilerfremd sind, dem Paar cp, cq dieselbe Bedeutung beigelegt wird, wie dem Paar p, q. Die einzelnen natürlichen Zahlen ordnen sich den (positiven) rationalen Zahlen unter als Paare p, 1. Dies wird terminologisch dadurch zum Ausdruck gebracht, dass man die natürlichen Zahlen auch als positive "ganze" Zahlen bezeichnet, im Gegensatz zu den "gebrochenen" rationalen Zahlen ($q \neq 1$, p und q teilerfremd).

Die positiven rationalen Zahlen bilden eine geordnete Menge Das heisst, zwischen je zweien von ihnen, $a = \frac{p}{q}$ und $b = \frac{r}{s}$ besteht immer eine der drei Beziehungen:

$$a < b,\ a = b,\ a > b,$$

das heisst

(*) $$ps < qr,\ ps = qr,\ ps > qr.$$

Ferner sind, wie bei den natürlichen Zahlen, die durch die Zeichen $<$, $>$ ausgedrückten Beziehungen zu einander invers; das heisst, $a < b$ besagt dasselbe wie $b > a$. Und jede dieser beiden Beziehungen ist transitiv; das heisst, aus $a \leqq b$, $b \leqq c$ folgt $a \leqq c$.

Zwischen je zwei verschiedenen rationalen Zahlen liegen unendlich viele andere, in moderner Terminologie: Die Menge der rationalen Zahlen ist in sich-dicht, Und keine rationale Zahl hat eine bestimmte (unmittelbare) Nachfolgerin oder Vorgängerin.

Die griechischen Mathematiker scheinen in ihren theoretischen Überlegungen ausschliesslich mit Formeln des Typus (*) gearbeitet zu haben. Der Grund dafür scheint gewesen zu sein, dass sie nicht darauf verzichten wollten, die Wirklichkeit der natürlichen Zahlen immer vor Augen zu haben. So entgingen sie dem Einwand, die Einheit aus Teilen zusammenzusetzen, und zwar bald aus diesen, bald aus jenen.
Wir können heute das Bruchrechnen auch in der Theorie nicht mehr entbehren, da die Sprache der Griechen für unsere Bedürfnisse zu schwerfällig ist. Aber der Gebrauch einer vereinfachten Sprache schneidet uns nicht die Einsicht ab, dass wir es bei den rationalen Brüchen in Wirklichkeit mit Paaren natürlicher Zahlen zu tun haben.

Die ganzen Zahlen.

Eine zweite Art des Rechnens mit geordneten Paaren von natürlichen Zahlen liegt nicht ebenso nahe wie die zuerst betrachtete, und soll daher ausführlicher abgehandelt werden.

Wir gehen von einem sehr einfachen Gedanken aus, den man aber - wie D i r i c h l e t in einem ähnlichen Falle schmunzelnd gesagt haben soll - "haben muss". Die Alten hatten ihn anscheinend nicht, und viele Neuere haben ihn auch nicht.

Wir bemerken, dass jede natürliche Zahl (unter anderen) mit zwei "Klassen" von Paaren natürlicher Zahlen verbunden ist, nämlich mit geordneten Paaren der Form $a + x, x$ und mit Paaren der Form $x, a + x$. Die folgende hieran anknüpfende Entwickelung führt uns zur Definition der Null und der negativen Zahlen. (Wer von seinem Schulunterricht her zu wissen glaubt, was die Null und negative Zahlen sind - Thermometergrade oder Strecken auf einer Geraden - wird gebeten, Gedanken dieser Art womöglich völlig auszuschalten.)

(1). Wir erklären eine Gleichheit zu nennende Aequivalenz

zweier (geordneter) Zahlenpaare a, b und a', b' durch die Formel

a, b = a', b' , wenn a + b' = b + a': [1]

(Hier darf man nicht etwa schreiben wollen a - a' = b - b', was eine petitio principii enthalten würde).

Es folgt dann aus a, b = a', b' und a', b' = a'', b'' dass auch a, b = a'', b'' ist; wie es bei einem richtig gebildeten Aequivalenzbegriff sein muss.

(2) Die Zahlenpaare sind also auf unendlich viele "Klassen" verteilt, deren jede alle Zahlenpaare enthält, die irgend einem von ihnen gleich sind. Und zwar ist

I. Wenn $a > b$:

$$a + x, b + x = a - b + y, y$$

II. Wenn $a = b$:

$$a + x, b + x = y, y$$

III. Wenn $a < b$:

$$a + x, b + x = y, b - a + y$$

(3) Dies legt den Gedanken nahe, auch den Klassen von Zahlenpaaren Zeichen zuzuordnen. Wir führen das in drei Schritten aus, indem wir ~~meist~~ zuerst scharfe Klammern statt der geschweiften zur Bezeichnung der Klassen benutzen, und dann die so erhaltenen Klassenzeichen noch zweimal durch einfachere ersetzen. Die beiden ersten Schritte sind $\{\cdots\} \to [\cdots]$ und

I. $[a - b + y, y] = ((a - b))$,

II. $[y, y] = (0) = (- 0)$,

III. $[y, b - a + y] = (- (b - a))$.

---

1) Es ist in diesem Falle eine nutzlose Umständlichkeit, erst a, b ~ a', b' zu schreiben und nachher die Bezeichnung zu ändern.

Setzen wir dann noch im Falle I $a - b = c$ und im Falle III $b - a = d$, so haben wir in diesen beiden Fällen für jede Klasse ein einfaches Zeichen, und für den Fall II eine doppelte Bezeichnung:

I. (c), II. (0) = (- 0), III. (- d).

Offenbar kann man dann, wenn man will, auch die Klassen I mit der Klasse II, und ebenso die Klasse II mit den Klassen III in einem einzigen Zeichen zusammenfassen:

I, II : Wenn $a \geqq b$,

dann $[a + y - b, y] = (c)$,

II, III : Wenn $a \leqq b$,

dann $[y, b + y - a] = (- d)$.

Wenn also $a = b$ ist, so ist für c oder d das Zeichen 0 einzusetzen; die Zeichen (0) und (- 0) bedeuten, wie zuvor, dasselbe, nämlich die Klasse II. Natürlich sind alle diese Festsetzungen rein-konventionell: Nichts würde im Wege stehen, irgend welche andere hinreichend deutliche Zeichen zu benutzen, wie etwa

I. ($\underline{c}$) , II. ($\underline{a}$) = ($\overline{a}$) , III. ($\overline{d}$) :

Worauf es ankommt, ist nur, dass bei Erklärung der neuen Zeichen ausschliesslich Additionen und solche Subtraktionen benutzt werden, die sich im Bereich der natürlichen Zahlen ausführen lassen. Wir bleiben aber bei dem zuerst ausgeführten System von Zeichen. Der Leser mag festhalten, dass das - -Zeichen, wo es in fetter Klammer steht, (- d) = (- (b - a)), mit Subtraktion zunächst nichts zu tun hat; er wird gut tun, zu lesen: "Strich d", "Strich b minus a". Es gilt dann, unter anderem, noch die Regel:

Wenn (x) oder (- x) Zeichen ist für die Klasse $[a, b]$ der Paare $\{a, b\}$, so ist (- x) oder (x) Zeichen

für die Klasse $[b, a]$ der Paare $\{b, a\}$.

Der Fall II, in dem (x) und (- x) dasselbe bedeuten, soll Nullklasse genannt werden.

(4) Wir erklären jetzt zwei Operationen, die Addition und Multiplikation der beschriebenen Zahlenpaare heissen sollen, durch die Formeln:

$$\{a_1, b_1\} + \{a_2, b_2\} = \{a_1 + a_2, b_1 + b_2\}$$

und

$$\{a_1, b_1\} \cdot \{a_2, b_2\} = \{a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2\}.$$

Man sieht dann ohne weiteres, dass mit diesen Operationen entsprechende Operationen verknüpft sind, die nicht einzelne Zahlenpaare, sondern die zugehörigen Klassen verknüpfen, und mit denselben Worten und entsprechenden Zeichen verbunden werden können:

$$[a_1, b_1] + [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] ,$$

$$[a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] = [a_1 a_2 + b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2] .$$

(5) Nunmehr ergeben sich, ausser den trivialen sogenannten Kommutationsgesetzen der Addition und Multiplikation, sowohl für die Zahlenpaare selbst wie auch für die Klassen, denen sie angehören, die bekannten formalen Regeln, die als Distributionsgesetz und Assoziationsgesetz bezeichnet werden oder doch so genannt werden sollten [1]. Im Falle der Klassen:

---

1) Gewöhnlich spricht man von einem "distributiven" und "assoziativen" Gesetz. Mathematiker gehen leider häufig mit der Sprache schlecht um. Man spricht sogar von dem Nachfolger einer Zahl, ganz als ob diese, in unserer Sprache, männlichen Geschlechtes wäre.(!).

$$[a_1, b_1] . ([a_2, b_2] + [a_3, b_3])$$
$$= [a_1, b_1] . [a_2, b_2] + [a_1, b_1] . [a_3, b_3] ,$$

$$[a_1, b_1] . ([a_2, b_2] . [a_3, b_3])$$
$$= ([a_1, b_1] . [a_2, b_2]) . [a_3, b_3]$$
$$= [a_1, b_1] . [a_2, b_2] . [a_3, b_3] .$$

(6) Wir schreiben jetzt die Definitionsgleichungen der Addition und Multiplikation der Klassen in der unter Nummer (3) eingeführten Bezeichnung nochmals auf, und erhalten:

$$(c_1) + (c_2) = (c_1 + c_2) ,$$
$$(c_1) + (-d_2) = (c_1 - d_2) , \text{ wenn } c_1 \geq d_2 ,$$
$$(c_1) + (- d_2) = (-(d_2 - c_1)) , \text{ wenn } c_1 \leq d_2 ,$$
$$(- d_1) + (- d_2) = (-(d_1 + d_2)) ;$$

$$(c_1) . (c_2) = (c_1 c_2) ,$$
$$(c_1) . (-d_2) = (- c_1 d_2)$$
$$(- d_1) . (c_2) = (- d_1 c_2)$$
$$(- d_1) . (- d_2) = (d_1 d_2) .$$

Insbesondere gilt

$$(x) + (0) = (x) = (x) + (- 0),$$
$$(-x) + (0) = (-x) = (-x) + (- 0),$$
$$(x) + (1) = (x + 1), \quad (x) + (- 1) = (x - 1)$$
$$(- x) + (1) = (-(x-1)), \quad (- x) + (- 1) = (-(x + 1))$$
$$(x) + (- x) = (0) = (- 0) ,$$

$$(0) . (x) = (0) = (0) . (- x) ,$$
$$(1) . (x) = (x), \quad (1) . (- x) = (- x) ,$$
$$(- 1) . (x) = (- x), \quad (- 1) . (- x) = (x) ,$$
$$(- 1) . (- 1) = (1) .$$

Hierin ist unter anderem enthalten, dass jede unserer Klassen - jedes (x) oder (- x) - eine (unmittelbare) Nachfolgerin (x + 1) oder (- (x-1)) hat - wie schon bei den natürlichen Zahlen - aber auch, abweichend von den natürlichen Zahlen, deren Reihe mit 1 beginnt, immer auch eine (unmittelbare) Vorgängerin: (x - 1) oder (- (x + 1)).

Es steht nun nichts im Wege, die schon vereinfachte Bezeichnung für unsere Klassen von Zahlenpaaren nochmals zu vereinfachen, nunmehr durch Weglassen der fettgedruckten Klammern. Dann aber erhalten wir genau die Regeln des Rechnens mit "ganzen" Zahlen, die "positiv" oder "Null" oder "negativ" sein können. Versetzen wir uns also in Gedanken in den Zustand von Jemanden, der von der Null und von negativen Zahlen noch gar nichts gehört hat, so sehen wir, dass wir hier eine Definition dieser "künstlichen Zahlen" mit Hilfe natürlicher Zahlen vor uns haben.

Wir heben hervor:

Die Addition und Subtraktion "ganzer Zahlen" decken sich, zusammengenommen, vollständig mit der "Addition" von Klassen von Zahlenpaaren $\{a, b\}$, und ebenso deckt sich die Multiplikation solcher "Zahlen" mit der "Multiplikation" der Klassen. Die auf die Klassen bezüglichen Operationen haben ~~haben~~ es ausschliesslich mit natürlichen Zahlen zu tun.

Zum Beispiel hat, wenn
$0 < a < b$ ist, die Formel

$$a - b = - (b - a)$$

die Bedeutung

$$\{a + x, b + x\} = \{y, b - a + y\},$$

wo nur noch natürliche Zahlen vorkommen; und ebenso hat die Formel

$$(- a).(- b) = a\ b$$

die Bedeutung

$$\{x, a + x\} - \{y, b + y\} = \{a\,b + z, z\},$$

wo wieder nur natürliche Zahlen vorkommen; u. s. w. Der Anstrich des Geheimnisvollen, den ältere Mathematiker, ganz mit Recht, namentlich an der Formel

$$(- a).(- b) = a\,b$$

als störend empfunden hatten, ist vollständig verschwunden [1].

Ferner lassen sich auch durch die Worte kleiner und grösser, oder durch die Zeichen $<$, $>$ auszudrückende Beziehungen für unseren Fall erklären. Ist $A_1 = [a_1, b_1]$ und $A_2 = [a_2, b_2]$, so schreiben wir

$$A_1 \lessgtr A_2,$$

wenn entsprechend

$$a_1 + x - b_1 \lessgtr a_2 + x - b_2$$

und x als natürliche Zahl so gewählt ist, dass die vorkommenden Subtraktionen ausführbar werden. Das heisst A_1 soll kleiner (grösser) als A_2 heissen, wenn A_2 in der Reihe von Klassen von Zahlenpaaren auf A_1 folgt, (der Klasse von A_1 vorhergeht). Es ergeben sich dann ohne weiteres alle formalen Regeln des Rechnens mit Ungleichheiten. Zum Beispiel $-a < 0 < b$; $-a > -b$, wenn $a < b$; $-a\,c > -b\,c$, wenn $a < b$, und a, b, c natürliche Zahlen sind.

Die ganzen Zahlen bilden also, wie die natürlichen, eine geordnete Menge. Nur hat unter den ganzen Zahlen eine jede nicht

---

1) Wir sehen hier schon, wie oberflächlich der von H. W e y l verfasste Artikel "Philosophie der Mathematik" im Handbuch der Philosophie abgefasst ist, da er nicht einmal eine Erklärung der negativen Zahlen enthält, die doch wirklich sehr nötig ist.
H. H a n k e l hat noch 1867 behauptet, dass "in der formalen Mathematik" die Formel (- a).(- b) nicht bewiesen werden kann. Versteht man die "formale" Mathematik auf diese Art, so hat man hier das stärkste Argument, das sich gegen sie in's Feld führen lässt.

nur Nachfolgerinnen, sondern auch Vorgängerinnen, und zwar je eine unmittelbare.

Die vorgetragene Definition der Null und der negativen ganzen Zahlen ist meines Erachtens die Definition dieser Begriffsbildungen. Jede andere, die logisch einwandsfrei ist, muss mit ihr gleichbedeutend sein, sich auf sie zurückführen lassen (Vgl. H ö l d e r a.a.O.).

Die allgemeinen rationalen Zahlen.

Die zur Erklärung der positiven rationalen und der ganzen Zahlen dienenden Operationen lassen sich verbinden und hintereinander ausführen. Wir haben nur die in unserer letzten Betrachtung zu Anfang eingeführten natürlichen Zahlen a und b durch ~~durch~~ rationale positive Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{r}{s}$ zu ersetzen ($q > 0$, $s > 0$). Wir gelangen auf diese Art zum allgemeinen Begriff der rationalen Zahl, die "positiv", "Null" oder "negativ" sein kann.

Die allgemeinen rationalen Zahlen sind also abkürzende Bezeichnungen für ~~die Bedeutung gewissen natürlicher Zahlen~~ Komplexe ("Klassen") von natürlichen Zahlen. Sie haben die Bedeutung von gewissen Quadupeln natürlicher Zahlen.

Bedeutet jetzt c irgend eine rationale Zahl, $= \frac{p}{q}$, so folgt

$$\frac{-p}{-q} = c, \quad \frac{p}{-q} = -c, \quad \frac{-p}{q} = -c.$$

Wie schon die positiven rationalen Zahlen, und ebenso die ganzen Zahlen, so bilden auch die allgemeinen eine geordnete Menge. Das heisst, wenn A, B zwei beliebige rationale Zahlen sind so ist immer

$$A < B \quad \text{oder} \quad A = B \quad \text{oder} \quad A > B,$$

wobei der erweiterte Sinn der Zeichen $<$, $=$, $>$ ähnlich wie zuvor mit Hilfe ganzer und schliesslich natürlicher Zahlen zu

erklären ist. Und wie die ~~praktisch~~ positiven rationalen Zahlen, so liegen auch die allgemeinen "überall dicht", und keine hat eine unmittelbare Vorgängerin oder Nachfolgerin.

Die G a u s s'schen Zahlen.

"Komplexe Zahlen", und zwar die sogenannten gemeinen, werden heutzutage in jedem Lehrbuch der Funktionentheorie abgehandelt. Ich setze die Art ihrer Einführung als bekannt voraus, und betrachte zunächst nur solche,

$$((A, B)) = A + B.i,$$

deren "Koordinaten" A, B irgend welche rationale Zahlen sind. Sie mögen, da G a u s s zuerst ihre Bedeutung erkannt hat, G a u s s'sche Zahlen heissen und "ganze" G a u s s'sche Zahlen, wenn A und B überdies ganze Zahlen sind [1].

Aus dem Vorhergehenden und den Rechnungsregeln

$$((A_1, B_1)) + ((A_2, B_2)) = ((A_1 + A_2, B_1 + B_2)),$$

$$((A_1, B_1)) . ((A_2, B_2)) = ((A_1A_2 - B_1B_2, A_1B_2 + B_1A_2))$$

ersieht man, dass die ganzen G a u s s'schen Zahlen Komplexe (Klassen) von Quadrupeln, die allgemeinen G a u s s'schen Zahlen Komplexe von Oktupeln natürlicher Zahlen sind.

Es ist heute schwer zu verstehen, aus welchem Grunde gerade die komplexen Zahlen den Mathematikern lange Zeit hindurch Schwierigkeiten geboten haben, ja sogar unbegreiflich geblieben sind, und zwar auch solchen, die sich mit den sicher viel weniger leicht zugänglichen negativen Zahlen längst abgefunden hatten. So verhält es sich jedoch wirklich.

L e i b n i z hatte die "imaginären" Zahlen (B ≠ 0) ein miraculum, idealis mundi monstrum [2], pene inter Ens et non-Ens Amphibium genannt, und auch N e w s t o n, d' A l e m b e r t und E u l e r scheinen sich nicht damit zurecht gefunden zu haben, ebenso Anfangs C a u c h y [3]. Es haben aber

---

1) D e d e k i n d hat in seinen Vorlesungen über Zahlentheorie (4.Auflage, 1894, S.430) eine noch etwas einfachere Terminologie, die ihn aber mit sonstigem Sprachgebrauch in Kollision bringt. Er würde wohl gegen die vorgeschlagene kleine Änderung nichts einzuwenden gehabt haben.

2) M. C a n t o r übersetzt: Missbegurt der Ideenwelt.

3) H. W e b e r, Encyclopaedie der elementaren Algebra und Analysis, Zweite Auflage, 1906, S.164.

auch B o l z a n o (1837) und F r e g e (sogar noch 1884) die reale Bedeutung des "Imaginären" nicht erkannt. Bei R. H a m i l t o n und C a u c h y finden wir jedoch den wirklichen Sachverhalt ausdrücklich angegeben (1847). G a u s s freilich hatte unzweifelhaft schon früh die richtige Einsicht. Die Sache muss ihm aber wohl als selbstverständlich vorgekommen sein, weshalb die Wendung "komplexe Zahl = Paar reeller Zahlen" bei ihm nicht erscheint.

Viele, und unter ihnen bedeutende Denker, scheinen also lange Zeit hindurch nicht auf den Gedanken verfallen zu sein, dass in den Verknüpfungsregeln der gemeinen komplexen Zahlen eine durch die Natur der Dinge selbst gegebene Erweiterung des gewöhnlichen Zahlenrechnens zu erblicken ist, und dass die Widersprüche verschwinden, sobald man sich nur entschliesst, schon eine einzelne Zahl als Spezialfall eines Zahlenpaars aufzufassen, nach dem Schema

$$((A, 0)) = A + 0 . i = A.$$

Was uns, oder wenigstens den Schreiber dieser Zeilen, an diesem historischen Sachverhalt besonders interessiert, ist sein Zusammenhang mit B o l z a n o's "Sätzen an sich". Wenn nämlich, wie B o l z a n o glaubte, widerspruchsvolle aber nützliche Begriffe in der Mathematik zugelassen werden dürfen, so müssen sie überall zugelassen werden 1). Man kann dann Aussagen wie dieser "Der Kreis ist viereckig" ein Recht auf Betrachtung nicht unbedingt absprechen. Tatsächlich führt B. dieses auch sonst bei Logikern beliebte Beispiel an.

In einem früheren Abschnitt waren die "Sätze an sich" abgelehnt worden, mit der Begründung, dass sie entbehrlich sind. Jetzt sehen wir, dass sie noch eine andere und viel bedenklichere Seite haben. Die "Sätze an sich" bilden eine Etappeauf dem Wege zu V a i h i n g e r's Philosophie des A l s O b, einer pragmatistischen Ausartung der idealistischen Philosophie.

Diese auch als Fiktionalismus bezeichnete Art von Philosophie habe ich abfällig kritisiert. (R.W.VI). Ich habe damals (1923) nicht gewusst, oder nicht gegenwärtig gehabt, dass der Begriff "widerspruchsvoller aber nützlicher" Aussagen sich auch bei B o l z a n o findet. Sonst hätte das erwähnt werden müssen, da es zur Entlastung V a i h i n g e r's dienen kann.

In der auf Seite 00 zitierten Dissertation von S. T h e o b a l d wird gesagt, dass der besprochene Mangel der Philosophie B o l z a n o's auf seine zu einseitige Beschäftigung mit Mathematik zurückzuführen ist. Hieran ist Wahres. Die wirkliche Ursache von B.'s Missgriff war aber wohl nur der Umstand, dass dieser um unsere Wissenschaft sehr verdiente Forscher von Mathematik gleichwohl eine nicht ganz zutreffende Vorstellung hatte.

Ich glaube mit B o l z a n o, dass eine möglichst intensive Beschäftigung mit Mathematik dem Philosophen nur Nutzen bringen kann. Wirklich schädlich sind nur die in der philosophischen Literatur allerdings ungemein häufigen Missverständnisse,

---

1) Vgl. Wissenschaftslehre, § 70, Anmerkung 2: "Wieviel wichtige, den widersprochenen Begriff $\sqrt{-1}$ enthaltende Lehrsätze stellt nicht die Analysis auf". Dass B. mit diesem Gedanken selbst nicht zufrieden war, sieht man aus der Anmerkung zu § 85, am Schluss.

die meistens eben davon herrühren, dass die mathematischen Interessen der Philosophen noch nicht genug intensiv waren. Allerdings wird von einer ausgedehnten Wissenschaft keine genügende Vorstellung sich bilden können, wer sich nicht an ihrem Fortschritt beteiligt.

Was im Vorhergehenden über die negativen Zahlen vorgetragen worden ist, entspricht weder deren historischem Ursprung, noch dem, was man noch jetzt in Lehrbüchern der Arithmetik finden kann. Es entspricht aber, wenn ich nicht irre, dem Geiste der Mathematik der Griechen, die der Meinung waren, dass das, was definiert werden kann, auch definiert werden soll. Es entspricht ihm, abgesehen von einem einzigen, wie mir scheint, theoretisch-nebensächlichen aber praktisch sehr bedeutungsvollen Punkt. Die griechischen Mathematiker haben nämlich von Fiktionen keinen Gebrauch gemacht - auch nicht von blos terminologischen - und sie würden vielleicht nicht damit einverstanden gewesen sein, das Zahl zu nennen, was in Wirklichkeit eine Klasse (oder Menge) von Zahlenpaaren ist, So aber ist es allgemein Brauch in der heutigen Mathematik; und es würde ein ganz vergebliches Beginnen sein, eine so ungemein bequeme und nützliche Sprachform wieder abschaffen zu wollen.

Eine von den hier vertretenen Ansichten oder verschiedene wird von B. R u s s e l l befürwortet. Bei ihm liest man (1923, auf Seite 64):

> "Einer der Irrtümer, die die Aufstellung von korrekten Definitionen (für die verschiedenen Arten von Zahlen) verhindert haben, ist die allgemeine Auffassung, dass jede Erweiterung einer Zahl (soll heissen des Zahlbegriffs) die früheren Arten als spezielle Fälle umfasst".

Kann man nicht sehr wohl wissen, dass -1 und $\sqrt{-1}$ nicht Zahlen im ursprünglichen Sinne des Wortes sind, und sie dennoch Zahlen nennen? Die wissenschaftliche Terminologie wird durch Zweckmässigkeitsgründe bestimmt, und diese verlangen, dass z.B. A + Bi im Falle B = 0 mit A identifiziert wird. Das ganze Buch R u s s e l l's ist voll von solchen nutzlosen Spitzfindigkeiten!

Es heisst dann bei R. noch:

> "Wenn man einen Augenblick nachdenkt, so ist es klar, dass + 1 und - 1 Beziehungen sein (?) müssen".

Was R. meint, sind die Operationen des Addierens und Subtrahierens, und diese vermitteln gewiss die schon angeführten Beziehungen von Zahlenpaaren. Aber was die gewöhnlich ebenfalls durch das Zeichen - 1 dargestellte "negative Einheit" an sich bedeutet, ist damit auch dann nicht gesagt, wenn man die Bedeutung der positiven Einheit als gegeben hinnimmt. Hier scheint mir eine Lücke vorzuliegen 1). Ich meine, wir alle wissen, was natürliche Zahlen sind, wenn wir es auch ebenso wenig sagen können, als wir etwa sagen können, "was Existenz ist". Aber was negative Zahlen sind, lässt sich dann sagen,und in einer Grundlegung der Mathematik darf diese Definition nicht fehlen.

R. freilich hat gerade für die natürlichen Zahlen, wie er glaubt, eine Definition, und diese hat kein geringes Aufsehen erregt. Sie sind Mengen von Mengen:

---

1) Ebenso bei L o e w y.

"Die Zahl einer Menge ist die Menge aller ihr ähnlichen Mengen" 1).

Dies ist nach meinem Dafürhalten eine geradezu monströse Definition. Sie unterliegt dem schon von F. H a u s d o r f f geltend gemachten Einwand, dass in ihr bereits die Einheit als "Menge aller Dinge", also mit Hilfe eines widerspruchsvollen Begriffs erklärt wird (S.000). Ausserdem gibt man sich, wie mir scheint, einer Täuschung hin, wenn man meint, die Anzahl der Elemente einer Menge erklären zu können, ohne den Zahlbegriff schon zu haben. Das Bestreben, Begriffe zu reduzieren, ist sehr gerechtfertigt, es gibt aber dafür Grenzen. Eine solche Grenze ist der Begriff der natürlichen Zahl, der sich nicht reduzieren lässt, auch nicht auf den Begriff der endlichen Menge, in der tatsächlich der Zahlbegriff schon steckt, trotz D e d e k i n d und anderen.

Nach R. sind ferner nicht nur (wie hier) die künstlichen "Zahlen" der Arithmetik Fiktionen ("logische Fiktionen"), sondern auch schon die natürlichen. Warum, erfahren wir nicht (S.140; ebenso übrigens auch die Mengen, S.14). Damit wird, für R u s s e l l, die ganze Mathematik zu einem System von Fiktionen. Fiktionen bedürfen nun, wie V a i h i n g e r, der Fiktionalist κατ' ἐξοχήν, mit Recht gesagt hat, der Justifikation. Die sonst nur von Laien gestellte Frage: Wozu das alles? erscheint hier als berechtigt. Sie wird von R. damit beantwortet, dass er bei seinen Erklärungen fortwährend auf die Körperwelt verweist. Er ist also Empirist, Psychologist. Indessen kommt er, am Schluss des zitierten Buches (S.206), doch zu der Einsicht, dass die logischen Sätze, zu denen auch bei ihm die mathematischen gehören, a priori erkannt werden können. Das überhebt mich wenigstens an dieser Stelle der Mühe, mich weiter mit ihm auseinanderzusetzen.

Noch viel mangelhafter als bei R u s s e l l ist die Behandlung der negativen Zahlen in Elementarbüchern. Ich nenne nur eines der verbreitetsten: H. W e b e r, Enzyklopaedie der Elementarmathematik (Zweite Auflage, 1906, S.34). Dort heisst es:

> Wir denken uns die Reihe der natürlichen Zahlen ... ein zweites Mal, und wenden diese zweite Reihe zur Zählung von Dingen an, die mit den Dingen, die wir durch die erste Zahlenreihe gezählt haben, in einer gewissen gegensätzlichen Beziehung stehen (!), wie etwa Dinge, die rechts liegen und Dinge, die links liegen (!), Thermometergrade über dem Gefrierpunkt und unter dem Gefrierpunkt (!), Vermögen und Schulden (!)....

Auf diese Art haben wohl wir alle als Kinder uns mit den negativen Zahlen abgefunden. Auch will ich offen gestehen, dass ich selbst nicht weiss, wie so etwas ohne Schaden für die Sache auf einen unentwickelten Verstand zugeschnitten werden kann. Aber in einem Werk, dass für Lehrer bestimmt ist und Anspruch auf Wissenschaftlichkeit erhebt, sollte man derartiges denn doch nicht finden dürfen 2). Was hat bisher die Kritik dazu gesagt?

Im Wesentlichen ebenso wie W e b e r verfährt auch noch A. L o e w y in seinem Lehrbuch der Algebra (1915, S.6).

---

1) Ebenso vorher schon, wie R. auch sagt, F r e g e.

2) Auch sonst bestehen Bedenken, besonders gegen den von J. W e l l s t e i n bearbeiteten geometrischen Abschnitt.

Schliesslich noch eine allgemeinere Bemerkung zur weiteren Aufhellung der hier vertretenen Lehre von den Zahlen!

Neuerdings macht sich immer mehr die Tendenz geltend, als Hauptsache am Zahlenrechnen die formalen Verknüpfungsgesetze zu betrachten. Soe lesen wir bei H. H a s s e:

> Die inhaltliche Bedeutung der in den Gleichungen vorkommenden Zeichen als Zahlen ist für den Formalismus, der zur Auflösung führt, ebenso gleichgültig wie etwaige Benennungen. Das Wesentliche sind allein die formalen Regeln, nach denen mit jenen Zeichen gerechnet wird ...

Auch sonst stellt dieser Autor dem, was sonst üblich war und von ihm als veraltet betrachtet, übrigens (im Falle der G a l o i s'schen Theorie) keineswegs ganz richtig wiedergegeben wird, eine "moderne", rein-formalistische Auffassung der Mathematik gegenüber 1). Da in den letzten Jahren in Deutschland nicht weniger als vier Lehrbücher der Algebra erschienen sind, die den gleichen Standpunkt einnehmen, so hat diese Ansicht, die allen Fortschritt in einer immer weiter getriebenen Abstraktion zu suchen scheint, zur Zeit bei uns Oberwasser. Zum Glück gibt es aber auch noch anderes 2).

Ganz gewiss ist es eine Hauptsache in der Mathematik, dass gleichartige Zusammenhänge immer wieder (unendlich-vielfach) wiederkehren. Vieles davon aber ist schlechthin trivial, und von dem, was nicht trivial ist, vermisst man nicht weniges gerade in den Schriften der Formalisten, die mit Geschick besonders alles Geometrische zu vermeiden wissen. Systematisieren ist nötig, braucht aber nicht mit einer Verengerung des Gesichtskreises verbunden zu sein.

Auch eine Hauptsache, und zwar eine grosse Hauptsache, scheint mir, im Gegensatz zu solchen Tendenzen, dass das inhaltliche Denken nicht zurückgesetzt wird und dass namentlich die zentrale Stellung der natürlichen Zahlen nicht verdunkelt wird. Womit kann das Interesse, das wissenschaftliche Interesse, eines Zeichenspiels motiviert werden, wenn nicht durch die inhaltliche Bedeutung, die ihm zukommt?

Hält man sich das nicht gegenwärtig, so kommt man in Gefahr böser Entgleisungen. So heisste es in der Algebra von O. P e r r o n (I, 1927) auf Seite 22:

> Wir wollen... gewisse Zeichen einführen, die an und für sich gar keine Bedeutung haben (!), die aber eine gewisse Bedeutung gewinnen (?) durch die Verabredung, dass wir mit ihnen wie mit Zahlen rechnen wollen.... Solche Zeichen heissen Variable und Unbestimmte. Eine Variable in diesem Sinn kann nicht

---

1) Höhere Algebra, I, 1926, S.6 und J.B.d.D.M.V., Bd.37, 1928, S.121.

2) Siehe z.B. die Höhere Algebra von L. E. D i c k s o n, deutsch von E. B o d e w i g, 1929.
Besonders haben F. K l e i n und sein Schüler R. F r i c k e sich um der Geometrie entstammende Probleme der Algebra und Funktionentheorie verdient gemacht. Die von F r i c k e gezeichneten Figuren sind unübertrefflich.

weiter definiert werden, sondern sie entsteht einfach durch Schöpfungsakt (!!), indem wir ein Zeichen hinzuschreiben und erklären, so solle eine Variable sein.

So steht also am Anfang dieser Algebra etwas, das fast aussieht wie ein Taschenspielertrick 1). Natürlich werden in dem übrigens wertvollen Buch später die Variablen durch das ersetzt, was sie wirklich bedeuten, nämlich durch Zahlen. So wird der zunächst angerichtete Schaden wieder gut gemacht.

Viel Schlimmer ist B. R u s s e l l entgleist, in dessen oft gerühmtem und desto weniger gelesenem Werke The Principles of Mathematics (1903) man auf Seite 7 Folgendes findet:

> "The proposition "x and y are numbers implies $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$" holds equally if for x and y we substitute Socrates and Plato"1).

Dies ist ein alter, auch bei uns üblicher Schulwitz, mit dem Lehrer der Denkträgheit ihrer Schüler zu Hilfe zu kommen suchen. Aber mehr als ein, dazu recht schwacher, Witz ist es entschieden nicht.

Und was soll man nun gar dazu sagen, dass man bei demselben Autor auf Seite 34 liest:

> Only a vulgar prejudice in favour of true propositions 2) stands in the way of replacing Socrates (in phrases as "Socrates is a man") by a number, a table, or a plum-pudding!!

Bei R u s s e l l, und ähnlich bei H i l b e r t, von dessen "Begründung" der Mathematik schon die Rede war (S.00), ist das Formelspiel, überhaupt das Logisieren, zu einem Sport geworden, der eine Art von selbständiger Existenz führt, und, gleich einem gespenstischen Raubtier, das inhaltliche Denken zu verschlingen sucht.

Man hat für diese Spielart der Mathematik das Wort Logistik geprägt. (Bei den Griechen bezeichnete λογιστικη, meistens die technische Rechenkunst, im Gegensatz zu ἀριθμητικη, dem durch inhaltliches Denken geleiteten Rechnen). Freilich ist der Begriff der Logistik einigermaassen fliessend. Als Logistiker gelten auch P e a n o und F r e g e, die den Formalismus ebenfalls sehr in den Vordergrund stellen, aber doch das inhaltliche Denken nicht aus den Augen verloren haben.

Es ist ohne Zweifel ein verlockendes Ideal, Begriffe durch Symbole zu bezeichnen, und immer dasselbe Symbol zu schreiben, wo derselbe Begriff auftritt, statt in den Wortsprachen die Bedeutung von Zeichen von dem Zusammenhang abhängig zu machen, in dem sie stehen. In der symbolischen Methode der Invariantentheorie ist dieses Ideal in einem beschränkten Gebiete verwirklicht. Ich habe mich aber nicht davon überzeugen können, dass die Ausführung eines solchen Gedankens unter sehr viel umfassenderen Voraussetzungen ebensogut gelungen ist und gleichen Nutzen bringt.

---

1) Auch damit kann ich mich nicht einverstanden erklären, dass von P e r r o n der Satz von der Existenz eines Erweiterungskörpers, in dem ein Polynon $x^n + a_1 x^{n-1} + .. + a_n$ in lineare Faktoren zerfällt, zum "sogenannten" Fundamentalsatz der Algebra in Gegensatz gebracht wird. Meines Erachtens ist das gerade der klare Sinn des Fundamentalsatzes.

2) Von mir hervorgehoben. Übrigens steht dieser Satz im Widerspruch zu dem, der auf Seite 00 zitiert worden ist.

Ja selbst unter so einfachen Umständen wie bei den elementarsten Eigenschaften der natürlichen Zahlen scheint mir die Formelsprache der Logistik hinter der Wortsprache zurückzustehen. Das Schlimmste ist, dass die Befürworter eines Logikkalküls sich über ihre Symbole nicht haben einigen können. So stellen sie ihre Leser vor die Alternative, entweder ihnen blindlings zu folgen oder gleich eine ganze Anzahl von Formelsprachen zu erlernen und eine Menge unnützer Übersetzungsarbeit zu tun. Das Bessere ist da, wie so oft, der Feind des Guten. Und schliesslich ist es meines Erachtens gar nicht richtig, dass man sich in den üblichen Sprachen, deren jeder ohnehin mehrere kennen muss, nicht klar ausdrücken kann. Wenn z.B. R u s s e l l (1923, S.207, 208) sagt "Zehn Menschen" habe dieselbe grammatikalische Form wie "weisse Menschen", man könne also auf den Gedanken kommen, das Zahlwort zehn sei ein Adjektiv, so wirkt das etwas komisch. Für ein solches Niveau schreibt Niemand, und am allerwenigsten tun es die Logistiker selbst, deren Schriften durchweg überaus beschwerlich zu lesen sind.

IX.

D i e r e e l l e n i r r a t i o n a l e n Z a h l e n u n d d i e g e m e i n e n k o m p l e x e n Z a h l e n.

Wie man von den rationalen Zahlen zu dem allgemeinen Begriff der reellen irrationalen Zahlen kommt, ist heute in jedem besseren Lehrbuch der Analysis zu lesen. Weil aber gerade gegen diesen Begriff sich Anfeindungen der sogenannten Intuitionisten richten, wird es gut sein, dass wir die hauptsächlichsten Tatsachen vor Augen haben, auf denen der allgemeine Begriff der reellen irrationalen Zahl beruht. Ich schliesse mich, abgesehen von einem Nebenpunkt, der auch sonst meistens bevorzugten Darstellung an, die in der mit Recht berühmt gewordenen Schrift D e d e k i n ds Stetigkeit und irrationale Zahlen vom Jahre 1872 zu finden ist.

Wir wissen zunächst nur um rationale Zahlen, die wir (da wir andere noch nicht kennen wollen) vorläufig Zahlen schlechthin nennen. Dass sie in Wirklichkeit Komplexe (Klassen oder Mengen) natürlicher Zahlen sind, mögen wir im Sinne behalten. x, y, z seien Zeichen für solche Zahlen.

Ist nun eine Zahl y gegeben, so werden damit alle Zahlen

auf drei Klassen $[x]$, $[y]$, $[z]$ verteilt, derart, dass immer $x < y < z$ ist - so mithin, dass die "Mittelklasse" $[y]$ nur aus der Zahl y selbst besteht. Wir entnehmen dann dem zuvor Gesagten, dass die Differenzen $y - x$ und $z - y$, und daher auch die Differenz $z - x$ bei geeigneter Wahl von x und z beliebig klein werden ($< \varepsilon$, wo ε eine vorgeschriebene positive Zahl ist).

Ausserdem mag es sein, dass auch noch Verteilungen aller Zahlen auf nur zwei Klassen $[x]$ und $[z]$ vorhanden sind, wobei dann wiederum die Differenz $z - x$ muss beliebig klein gemacht werden können, da anderenfalls die Zahlen nicht überall-dicht liegen könnten. Dass es solche Verteilungen wirklich gibt, zeigt man durch Beispiele. So gibt es keine Zahl $y = \frac{p}{q}$, die der Gleichung $y^2 = 2$ oder $q^2 = 2p^2$ genügte. Überdies kommen, wie leicht zu zeigen, die Differenzen der aufeinanderfolgenden Abkürzungswerte des Kettenbruchs

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}} \qquad \left\{1{,}1 + \frac{1}{2}\ ,\ 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}\ ,\ \dots\right\}$$

(die eben darum Näherungswerte heissen) einander beliebig nahe, und ebenso nähern sich ihre Quadrate unbegrenzt der Zahl 2. Die ersten dieser Werte (Zahlen) mögen angeführt werden; sie sind

$x_0 = 1$, $z_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = \frac{7}{5}$, $z_3 = \frac{17}{12}$, ...

In beiden Fällen sind die Zahlen-Klassen $[x]$ und $[z]$ durch eine Lücke getrennt, die im ersten Falle durch die Zahl y ausgefüllt ist. Wir nennen die Tatsache des Vorhandenseins dieser Lücke einen Schnitt durch die Gesamtheit der bis jetzt definierten Zahlen, und reden, je nach Umständen, von einem rationalen oder irrationalen Schnitt.

Es versteht sich, dass die rationalen Schnitte eine geord-

nete Menge bilden, wie die Zahlen y, denen sie entsprechen. Das heisst, ist $y_1 < y_2$, so gibt es immer unter den Zahlen x_2 solche, die grösser sind als jede der Zahlen x_1, und unter den Zahlen z_1 solche, die kleiner sind als jede der Zahlen z_{2i} in Zeichen etwa

(1) $[x_1] < [x_2]$, $[z_1] < [z_2]$:

Umgekehrt ist unter diesen Bedingungen (deren jede aus der anderen folgt) immer auch $y_1 < y_2$.

In dieses Schema ordnen sich nun auch die irrationalen Schnitte ein (was natürlich bewiesen werden muss). Das heisst, die in der Form von Ungleichungen angeschriebenen Beziehungen sind immer vorhanden, wenn $[x_1]$, $[z_1]$ und $[x_2]$, $[z_2]$ zwei verschiedene Schnitte bedeuten, wobei nur nötigenfalls die zur Unterscheidung der zwei Schnitte dienenden Indizes 1,2 vertauscht werden müssen: Es ist einerlei, ob beide Schnitte rational sind, oder nur einer oder keiner.

Die angeschriebenen Umgleichungen sagen also aus, dass in der Ordnung der Schnitte der mit dem Index 1 dem mit dem Index 2 vorangeht, oder, was dasselbe ist, dass der mit dem Index 2 auf den mit dem Index 1 folgt. Eben dieses lässt sich aber auch durch einfachere Symbole ausdrücken, nämlich immer durch eine Formel

(2) $y_1 < y_2$:

Wir haben dazu nur nötig, dann, wenn die Mittelklasse $[y_1]$ oder $[y_2]$ fehlt, oder beide Mittelklassen fehlen, die gleiche Formal als Abkürzung für die vorher umständlicher ausgedrückten symbolischen Ungleichungen einzuführen.

Versehen wir dann, der grösseren Deutlichkeit halber, vorübergehend das Zeichen Y mit einem Stern, wenn es einen irrationalen Schnitt präsentiert, so besteht, nötigenfalls nach Vertauschung der Indizes 1, 2 immer eine der Beziehungen ("Ungleichungen")

$y_1 < y_2$, $y_1^* < y_2$, $y_1 < y_2^*$, $y_1^* < y_2^*$,

wenn nur die beiden zusammengestellten Schnitte verschieden sind.

Hieraus entnehmen wir die Berechtigung, die Symbole y^*, die irrationalen Schnitten entsprechen, als Zahlen zu bezeichnen; und zwar werden wir sie irrationale Zahlen nennen, im Gegensatz zu den bis jetzt allein vorgekommenen Zahlen, die nunmehr wieder als rationale Zahlen zu bezeichnen sein werden. Das angeführte Beispiel liefert uns zwei solche "Zahlen", y^* und $-y^*$, oder nun wieder einfacher y und - y, wobei im zweiten Falle unter den Zahlen x, z sich zunächst diese befinden:

$z_0 = -1, x_1 = -\frac{3}{2}$, $z_2 = -\frac{7}{5}$, $x_3 = -\frac{17}{12}$ ....

Wir erfinden uns mithin zu jedem irrationalen Schnitt eine ihm entsprechende "Zahl", die dann offenbar eine Fiktion ist, geradeso, wie schon die rationalen Zahlen Fiktionen sind, die ja in Wirklichkeit die Bedeutung von Klassen von Quadrupeln natürlicher Zahlen haben. Wir erreichen dadurch, im einen Falle wie im anderen, eine Vereinfachung unserer Zeichensprache, eine formale Verbesserung des Rechnungsapparates, und bringen damit zum Ausdruck, dass zwischen den verwickelten Paaren von Mengen $[x]$, $[z]$ rationaler Zahlen trotz ihrer Verwickelung, einfache Gesetze herrschen. Worauf es aber hier zunächst ankommt, ist, einzusehen, dass wir in den sogenannten irrationalen Zahlen eine arithmetisch definierte Wirklichkeit vor Augen haben, eine Wirklichkeit, die ganz so wirklich ist, wie die natürlichen Zahlen selbst, aus denen sich alle "Schnitte" schliesslich zusammensetzen. Fiktiv ist nur die gebrauchte Terminologie.

Wir haben es jetzt wieder mit einem erweiterten Zahlenbereich zu tun, dem der reellen Zahlen; denn unter diesem Namen

werden wir die rationalen und irrationalen "Zahlen" zusammenfassen.

Nunmehr ergibt sich eine weitere Einsicht, eben die, auf der die theoretische Bedeutung der D e d e k i n d'schen Schnitte beruht. Wir können kurz sagen:

Die Menge der rationalen Zahlen ist lückenhaft; in der Menge aller reellen Zahlen sind ihre Lücken ausgefüllt, und zwar jede auf eine einzige Weise.

Die Lücken nämlich entsprechen den irrationalen Schnitten, und jedem von diesen hatten wir eine einzige fiktive Zahl, eine "irrationale" Zahl zugeordnet. Zu dem ausgeführten Beispiel eines Kettenbruches gehören alle Näherungswerte x_κ , $z_{\kappa+1}$ der "Unterklasse" $[x]$ und "Oberklasse" $[z]$ eines irrationalen Schnitts an, dem eine "Zahl" zugehört, die nunmehr deutlicher mit $\sqrt{2}$ bezeichnet werden kann [1]. Kürzer

$$\sqrt{2} = 1 + \left\{ \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \cdots \right\} \qquad \text{(ad infinitum)}$$

Der genaue Ausdruck der fundamentalen Tatsache, mit der wir es hier zu tun haben, ist enthalten in einigen Lehrsätzen, deren erster als B o l z a n o - W e i e r s t r a s s'scher Satz bezeichnet wird:

Jede unendliche und beschränkte Folge von reellen Zahlen

y_κ (oder y_κ^*)

$\{ a < y_\kappa < b, \quad = 0, 1, 2, \ldots \}$

hat mindestens eine Häufungszahl.

---

1) Üblich ist das Zeichen $\sqrt{2}$, Das aber ist eine schlechte Bezeichnung, da es in anderem Zusammenhang allgemein auch für $-\sqrt{2}$, nämlich als "zweiwertige" Zahl gebraucht wird, Schreibt man $+\sqrt{2}$, so ist das um nichts besser, da dadurch, in Summationen, die Doppeldeutigkeit des Symbols $\sqrt{2}$ nicht aufgehoben wird.

Das heisst, es gibt wenigstens eine Zahl y unseres nunmehrigen Zahlenbereichs (eine Zahl, die rational oder irrational sein kann) derart, dass für unbegrenzt viele Werte des Index k

(3) $\quad -\varepsilon < y_k - y < \varepsilon$

wird, wofern ε eine beliebige (also auch beliebig kleine) positive Zahl ist. $\{\varepsilon \to 0\}$

Man beweist das mühelos durch das bekannte Teilungsverfahren.

Nicht vorausgesetzt ist hierbei, dass die ~~Zeichen~~ Zahlen y_k durchweg von einander verschieden sind. Sie können z.B. auch alle einander gleich sein: Dann ist $y = y_k$ die (einzige) Häufungszahl.

Besonders wichtige Spezialfälle sind:

Jede unendliche"nach oben hin"beschränkte Folge nicht abnehmender reeller Zahlen

$$\{x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k \leq \ldots . \quad < b\}$$

hat eine einzige Häufungszahl.

Da dann offenbar auch der entsprechende Satz für "nach unten hin" beschränkte Zahlenfolgen

$$\{z_0 \geq z_1 \geq \ldots \geq z_k \geq \ldots . \quad > a\}$$

gilt, so erhalten wir die Möglichkeit jede reelle Zahl in eine Folge von Intervallen $\{\langle x_0 \ldots z_0\rangle, \langle x_1 \ldots z_1\rangle, \ldots$ ad infinitum$\}$ einzuschliessen, deren keines über das vorhergehende hinausgreift $\{x_{k+1} \geq x_k, z_{k+1} \leq z_k\}$, und deren "Breite" $z_k - x_k$ sich mit wachsenden Werten des Index k der Null nähert. (Einschachtelungsverfahren, auf das weiterhin Bezug zu nehmen sein wird.)

Und schliesslich wird in diesem Zusammenhang ~~wird in diesem Zusammenhang~~ an einen Lehrsatz zu erinnern sein, den A. ~~RxxxixMxg~~ P r i n g s h e i m mit Recht den Fundamentelsatz der gesamten Analysis

genannt hat:

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine unendliche Folge (y_x) von Zahlen y_k (die rational oder irrational sein können) eine einzige Häufungszahl hat, besteht darin, dass für jedes ε ein Wert n des Index k vorhanden ist, derart, dass für alle m

(4) $\quad -\varepsilon < y_{n+m} - y_n < \varepsilon$

wird.

Eine solche Zahlenfolge heisst konvergent, ihre Häufungszahl y Grenzwert der Zahlen der Folge. Für sie bestehen auch die Ungleichungen (3). Sie wird üblicher Weise bezeichnet durch das Symbol

(4) $\quad \lim_{k \to \infty} y_k.$ 1)

Eine konvergente Folge bilden zum Beispiel die Näherungswerte des erwähnten Kettenbruchs. Ihr Grenzwert ist die schon eingeführte Zahl $y = \sqrt{2}$. Auf weitere Einzelheiten, die man in jedem Lehrbuch der Analysis findet, kann hier nicht eingegangen werden.

Ausser der hier, in Kürze und in leicht geänderter Darstellungsform, wiedergegebenen Theorie D e d e k i n d's gibt es noch einige andere Arten der Einführung der Irratinalzahlen, die alle um das Jahr 1872 herum bekannt geworden sind.

W e i e r s t r a s s hat, ich weiss nicht seit wann, in Vorlesungen einen Gedankengang eingeschlagen, der statt mit den zwei Zahlenmengen [x] und [z] nur mit der einen arbeitet. Hierüber haben wir jetzt einen ausführlichen Bericht 2).

Eine wesentlich anders angelegte Theorie rührt von G. C a n t o r und C h. M é r a y her. In diesem Falle werden die

---

1) Man liest etwa: "y gleich Limes y_k für k Pfeil unendlich". Hat y den Zahlenwert Null, so heisst die Folge (y_k) eine Nullfolge. Zwei konvergente Folgen (y_k) und $(y'k)$ haben dieselbe Häufungszahl, wenn $(y_k - y'_k)$ eine Nullfolge ist.

2) V i k t o r v o n D a n t s c h e r, Vorlesungen über die Weierstrass'sche Theorie der irrationalen Zahlen, 1908.

irrationalen Zahlen von vorn herein mit Hilfe der Formel (4) definiert, wobei dann natürlich zur Definition der Zahl y nur rationale Zahlen benutzt werden dürfen. Diese Zahlenfolgen heissen bei M é r a y Varianten und bei C a n t o r Fundamentalreihen. Benutzt man eine Fundamentalreihe, in der abwechselnd nicht-abnehmende Zahlen x_k und nicht-zunehmende Zahlen z_{k+1} vorkommen, so erhält man eine Definition der irrationalen Zahlen durch das schon erwähnte Einschachtelungsverfahren, das im Jahre 1872 von E. H e i n e veröffentlicht worden ist 1). C a n t o r's im Literaturverzeichnis angegebene Abhandlung vom Jahre 1884 enthält eine Vergleichung der verschiedenen Methoden, die irrationalen Zahlen einzuführen.

Alle diese Methoden leisten materiell dasselbe. Sie leiden aber an Schönheitsfehlern, von denen die Methode D e d e k i n ds frei ist. Störend ist namentlich bei dem Verfahren von M é r a y und C a n t o r, dass in den Fundamentalreihen ein hohes Maass von Willkür steckt, von der erst nachträglich gezeigt wird, dass sie ohne Einfluss auf das Ergebnis ist. Die Fundamentalreihen sind jedoch das, was in der Analysis überall gebraucht wird.

Man wird unter diesen Umständen am besten so verfahren, dass man von der Definition D e d e k i n d's ausgeht und die anderen Definitionen als Folgerungen aus ihr darstellt.

Mit einem kleinen Schönheitsfehler ist auch D e d e k i n d's eigene Definition behaftet. Bei ihm entsprechen nämlich jeder ~~Zahl~~ rationalen Zahl zwei "Schnitte", die dann auf Grund einer weiteren Definition als äquivalent erklärt werden.

D e d e k i n d hat später angemerkt, dass die griechischen Mathematiker seiner Definition der irrationalen Zahlen schon nahe gekommen waren. Er verweist(in der Schrift vom Jahre 1884) auf das fünfte Buch der Elemente E u k l i d's. Dann aber fragt sich warum denn die Griechen nicht auch den letzten Schritt - einer Ausfüllung der Lücken zwischen den rationalen Zahlen - getan hatten, und warum eine im Grunde so einfache und dazu bedeutungsvolle Tatsache nicht schon viel früher zum Vorschein kam? 2).

~~Die zweite Frage wird kaum vollständig~~

Auf die erste Frage würde wohl zu antworten sein, was schon in einem einfacheren Falle gesagt worden ist: Die irrationalen Zahlen sind, als Zahlen, Fiktionen, und die Griechen haben solche nicht benutzt 3). Die zweite Frage aber wird kaum vollständig

---

1) Im Journal für Mathematik, Bd.74. Wegen der dort vorkommenden Identifizierung der Zahlen mit Figuren siehe S.00 und F r e g e, Grundgesetze II, § 86, 87. (Zu einer Erörterung der dort auch gegen G. C a n t o r s Arithmetik gerichteten Einwände fehlt mir der Raum.) - Näherungswerte von Qudratwurzeln hatten schon die Griechen unter Anwendung eines Einschachtelungsverfahrens bestimmt.

2) D e d e k i n d gibt das Datum an, an dem ihm die Definition der irrationalen Zahlen gelang: 24.November 1858.

3) Vgl. H a s s e und S c h o l z, 1921, wo übrigens das Wort Fiktion nicht vorkommt.

beantwortet durch die Beschreibung, die D e d e k i n d von der Entstehungsgeschichte seines Gedankens gibt. Er verweist darauf, dass die Geometer seiner Zeit die Existenz der irrationalen Zahlen als selbstverständlich betrachtet haben. Indessen lag schon für Mathematiker wie G a u s s und A b e l die Sache doch wohl wesentlich anders. Diese können nicht daran gedacht haben, Überlegungen, wie sie in der damaligen Geometrie üblich waren, in die Begründung der Arithmetik hineinzuziehen.

Mir scheint es, dass das Aufkommen des Rechnens mit Dezimalbrüchen die Ursache des Ausbleibens einer sachgemässen Definition der irrationalen Zahlen gewesen sein muss. Dass man, mechanisch, mit unendlichen Dezimalbrüchen ebenso rechnen kann, wie mit solchen, die bei einer bestimmten Stellenzahl abbrechen, war ja den Mathematikern längst geläufig. So mochte wohl, auch vom ~~mathematischen~~ Standpunkt, das Bedürfnis nach einer Definition des Irrationalen sich wenig geltend machen.

Es scheint lehrreich, zuzusehen, wie sich die Definition der irrationalen Zahlen gestaltet, wenn man von dem formalen Rechnen mit Dezimalbrüchen ausgehen will. Es würden die folgenden Denkschritte zu tun sein:

(1) Es wird der Begriff einer konvergenten Folge (y_m) rationaler Zahlen $y_0, y_1, y_2 \ldots$ erklärt (Formel 4).

(2) Es wird bemerkt, dass nicht nur mit jeder rationalen Zahl eine solche Folge verbunden ist {z.B. $\frac{3}{2} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \ldots)$} die mit ihr geradezu identifiziert werden darf (wie wir es eben schon gesehen hatten), sondern dass auch der Sinn eines jeden (endlichen oder unendlichen) Dezimalbruchs der einer speziellen konvergenten Folge ist. { Beispiele:
1,5 = (1,5; 1,50; 1,500; ....)
0,1 01101110.... = (0,1; 0,10; 0,101; 0,1011; ....)}

(3) Es wird festgestellt, dass es unendliche Dezimalbrüche gibt, die einen Grenzwert haben
{Beispiele: Lim (0,9; 0,99; 0,999; ....) $\neq \frac{1}{6} = 1$, Lim (0,3; 0,33..) $= \frac{1}{3}$}
und solche, die keinen haben
{Beispiel: 0,101101110 ... } .

(4) In der Absicht, von den vertrauten Rechnungsregeln einen möglichst umfassenden und zwar mechanischen Gebrauch machen zu können, wird den Dezimalbrüchen, die keinen Grenzwert haben, ein solcher ausdrücklich zugeschrieben, hinzugedacht, fingiert.

Die unendlichen Dezimalbrüche, die nur fiktive Grenzwerte haben, werden irrationale Zahlen genannt.

(5) Es wird die unter (1) genannte Definition der Konvergenz einer Zahlenfolge auf die Gesamtheit der nunmehr erklärten "Zahlen" ausgedehnt, und es wird gezeigt, dass jetzt jede solche Folge einen Grenzwert hat.

Eine derartige Erklärung der irrationalen Zahlen und des Rechnens mit ihnen kann uns nun heute nicht mehr befriedigen. Denn zunächst hat das Rechnen mit Dezimalzahlen (und überhaupt die Arithmetik der Stellungszahlen" nicht einmal eine einfache Beziehung zu den rationalen Zahlen, wie viel weniger zu den natürlichen. Alle rationalen Zahlen, die in der Form $\frac{a}{10^\alpha}$ darstellbar sind, haben zwei verschiedene Ausdrücke im dezimalen Zahlensystem. Alle übrigen rationalen Zahlen werden nur auf eine Art, aber durch Dezimalbrüche mit periodischer Endung dar-

gestellt, also durch unendliche Dezimalbrüche 1). Und schliesslich ist die Beziehung selbst so einfacher oder wichtiger Zahlen wie $\sqrt{2}$ oder e und π zu den entsprechenden Dezimalentwickelungen nichts weniger als einfach und für theoretische Zwecke geradezu unbrauchbar.

Sicher würde eine solche Art, die irrationalen Zahlen einzuführen, wenig dem Sachverhalt entsprechen, der in der Definition D e d e k i n d's seinen ~~tatsächlichen~~ wirklichen Ausdruck findet.

Etwaigen Intuitionisten, die bis hierher geblättert (ich wage nicht zu sagen gelesen) haben mögen und dann jede Rücksicht auf ihre eigenen Entdeckungen vermissen werden, sei zum Troste bemerkt, dass auch sie noch an die Reihe kommen sollen. Nur nicht drängeln, sagte der Henker.

Die gemeinen komplexen Zahlen.

Schliesslich lassen sich die Prozesse der Erweiterung des Zahlenrechnens, die im vorigen Abschnitt und im vorliegenden skizziert worden sind, verbinden und überlagern. Es entstehen dann die"gemeinen" komplexen Zahlen der Form A + Bi in voller Allgemeinheit.

Dass die Reihe der Erweiterungsprozesse des Zahlenrechnens hiermit, wenigstens im Rechnen der allgemeinen Arithmetik, ihren natürlichen Abschluss findet, ist vielfach erörtert worden, und braucht daher hier nicht besprochen zu werden, um so weniger, als für den besonderen Zweck der vorliegenden Schrift schon die Betrachtung der reellen Zahlen im Ganzen ausreichend ist. Die Theorie der sogenannten höheren komplexen Zahlen (der Quaternionen, Biquaternionen, Matrizen und anderer) gehört meines Erachtens überhaupt nicht mehr zur "Philosophie der Mathematik". Sie gehört vielmehr der Algebra und den besonderen Anwendungsgebieten an,

---

1) In der Schrift vom Jahre 1884 hat D e d e k i n d versucht, unter Verwertung einer gelegentlich schon bei G a l i l e i vorkommenden Bemerkung, die endlichen Mengen, und mit ihnen die natürlichen Zahlen, geradezu mit Hilfe des Unendlichen zu definieren. Da dieser Gedanke, trotz des von D. auf seine Ausführung verwendeten Scharfsinns, meines Wissens nirgends Zustimmung gefunden hat, so glaube ich nicht weiter auf ihn eingehen zu sollen

in denen solche"Zahlen" sich als nützliche Abkürzungen (terminologische Fiktionen) erwiesen haben oder noch erweisen werden. (Zahlentheorie, Geometrie, Kinematik, Mechanik, neuerdings angeblich auch Molekularphysik, wovon ich nichts verstehe.)

Mathematisch interessierte Philosophen seien wegen der (relativen) Abgeschlossenheit der besprochenen Erweiterungen des gewöhnlichen Zahlenrechnens auf eine kleine Abhandlung verwiesen, die in den Göttinger Nachrichten vom Jahre 1898 enthalten ist (S.1 - 8). Man findet darin zwei ganz einfache Beweise des in Betracht kommenden Lehrsatzes, sowie einen Bericht über ein Missverständnis, dem ein etwas dunkel abgefasster Ausspruch von G a u s s ausgesetzt gewesen ist, und das die Entwickelung der Lehre von den höheren komplexen Zahlen eine Zeit lang aufgehalten hat.

X.

D a s n a t ü r l i c h e K o n t i n u u m
u n d s e i n e e i n f a c h s t e n E r w e i t e r u n g e n.

Wendet man auf rationale Zahlen die Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens (die letzte abgesehen von der Division mit Null) in endlicher Wiederholung an, so erhält man immer wieder rationale Zahlen. Die genannten Operationen sind aber die einfachsten, die die Mathematik kennt. Man bezeichnet daher (nach K r o n e c k e r) die Gesamtheit, den Inbegriff oder die Menge der rationalen Zahlen als den natürlichen Rationalitätsbereich; neuerdings vielfach auch als den natürlichen Zahlenkörper.

Ebenso nennen wir den Inbegriff oder die Menge aller reellen Zahlen das natürliche Kontinuum. Dieser letzte Name (für einen Gegenstand, der bereits als existierend erkannt ist) wird eingeführt, weil die genannte Menge im Aufbau der Mathematik von nicht geringerer Bedeutung ist, als die Menge der natürlichen Zahlen. Beide Zahlenmengen sind geordnet, und beide sind überall-dicht

(S.00), aber nur das natürliche Kontinuum ist lückenlos oder zusammenhängend [1], was in dem Satz über konvergente Zahlenfolgen seinen Ausdruck findet. Wichtig ist, zu bemerken:

Den Zahlen des natürlichen Kontinuums kommt ausser der Art von Realität, die wir bereits festgestellt hatten, und die darin besteht, dass sie aus natürlichen Zahlen zusammengesetzt sind, noch eine zweite, nämlich physische Realität zu, die allerdings nicht eindeutig bestimmt ist.

So viel wir zu erkennen vermögen, lässt sich insbesondere der Ablauf der Zeit [2] mit Hilfe der Zahlen des natürlichen Kontinuums messen. (Die ausgezeichnete Stellung der rationalen und ganzen Zahlen innerhalb des natürlichen Kontinuums kommt dabei in Wegfall [3]) Nach Festsetzung eines Nullpunktes für das Zeitmaass entsprechen die derei Zahlenklassen

$$[x] \quad , \quad [y] \quad , \quad [z]$$

genau der Unterscheidung Vergangenheit, Gegenwart, Zukunft. Unter Gegenwart ist dabei natürlich ein sich verschiebender Zeitpunkt zu verstehen, nicht eine Zeitstrecke von endlicher oder gar unbestimmter Dauer.

Bleiben wir jedoch bei der Mathematik, so können wir bemerken, dass jede unserer beiden Zahlenmengen gewisser Erweiterungen fähig ist, die wegen ihrer vielfältigen Anwendung hier noch besprochen werden sollen. Wir führen dies nur für den zweiten Fall aus, und bezeichnen, im Hinblick auf das, was hinzugefügt werden

---

1) Nach D e d e k i n d "stetig".
2) Vgl. S.00.
3) Man könnte allerdings die Schwingungsdauer einer bestimmten Lichtsorte als Zeitmaass einführen; die Wahl dieser Sorte aber würde willkürlich sein.

soll, das natürliche Kontinuum jetzt als <u>das Kontinuum I</u>. Irgend eine Stelle dieses Kontinuums, also irgend eine relle Zahl, heisse jetzt t.

Verstehen wir dann unter einem Punkt ein Zahlenpaar x, y [1], und nennen wir <u>Einheitskreis</u> den Ort aller Punkte, deren "Koordinaten" x und y der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

genügen, so können wir die Punkte dieses Kreises zu den Stellen t des natürlichen Kontinuums in eine im Allgemeinen gegenseitig-eindeutige Beziehung setzen, vermöge der Zuordnung

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad , \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \; ; \quad t = \frac{y}{1 + x} = \frac{1 - x}{y} \quad .$$

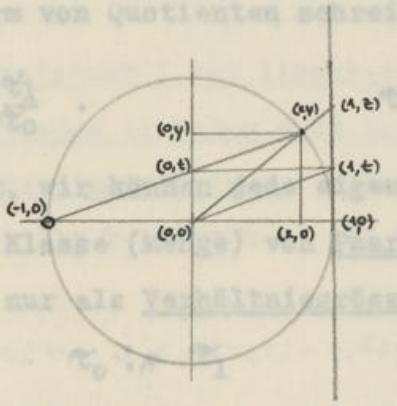


Fig. 1.

Nur dem Punkte $(x, y) = (-1, 0)$ entspricht in dieses Zuordnung keine Zahl t. Diese <u>Lücke</u> füllen wir nun in ähnlicher Weise aus wie die Lücke im Falle der Schnitte ohne Mittelklasse. <u>Wir erfinden uns eine geeignete Terminologie, und sprechen von einer "uneigentlichen" Zahl, die die Lücke schliesst</u>. Sie wird in üblicher Weise bezeichnet durch das Symbol ∞ : <u>$t = \infty$</u>. Dieses Symbol ist also nichts anderes als ein <u>Zeichen</u> für die festgestellte Lücke, nur terminologisch, <u>als "Zahl"</u>, ist es eine Fiktion.

soll, das metrische Kontinuum jetzt als *das Kontinuum 1*. Irgend eine Stelle dieses Kontinuums, also irgend eine reelle Zahl, heisse jetzt t.

Verstehen wir dann unter einem Punkt ein Zahlenpaar x, y, und nennen wir *Einheitskreis* den Ort aller Punkte, deren "Koordinaten" x und y der Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1$$

genügen, so können wir die Punkte dieses Kreises zu den Stellen t des metrischen Kontinuums in eine in allgemeinen gegenseitig-eindeutige Beziehung setzen, vermöge der Zuordnung

$$x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad , \quad y = \frac{2t}{1 + t^2} \quad ; \quad t = \frac{y}{1 + x} = \frac{1 - x}{y} \quad .$$

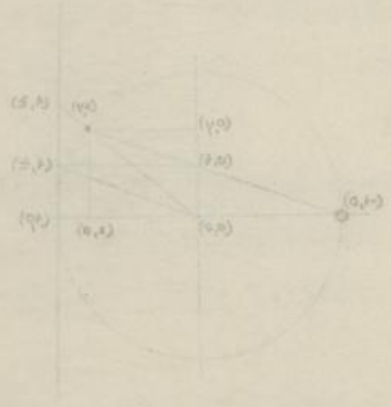


Fig. 1.

Auf dem Punkte $(x, y) = (-1, 0)$ entspricht in dieser Zuordnung keine Zahl t. Diese *Lücke* füllen wir nun in ähnlicher Weise aus wie die Lücke im Falle der Zahlen ohne Mittelklasse. *Wir erfinden uns eine geeignete Terminologie, und sprechen von einer "ungeeigneten" Zahl, die die Lücke ausfüllt.* Sie wird in üblicher Weise bezeichnet durch das Symbol ∞ : $t = \infty$. Dieses Symbol ist also nichts anderes als ein *Zeichen* für die festgestellte Lücke, nur Terminologisches, nie "Zahl", ist es eine Fiktion.

Durch Ausfüllung der Lücke haben wir eine vollkommen gegenseitig-eindeutige Zuordnung zwischen den Punkten der Kreislinie und den "rellen Zahlen" hergestellt, zu denen nunmehr auch die uneigentliche Zahl ∞ gehört. Damit haben wir einen neuen Begriff gebildet, oder besser, wir haben die Gesamtheit unserer nunmehrigen Zahlen als existierend erkannt: Wir nennen diese Gesamtheit (Menge) das Kontinuum II, und wir nennen es im Gegensatz zum"öffenen" Kontinuum I, geschlossen [1].

Zu eben diesem Kontinuum II, also zur Erkenntnis seiner Existenz, kommen wir noch auf eine zweite Art, die uns eine tiefere Einsicht in seine Natur liefern wird. Wir können ja die eigentlichen Zahlen t (also die rellen Zahlen mit Ausschluss von $t = \infty$) in Form von Quotienten schreiben,

$$t = \frac{\tau_1}{\tau_0} \quad . \qquad \tau_0 \neq 0 \quad .$$

Das heisst, wir können jede eigentliche Zahl t als Repräsentanten einer Klasse (Menge) von Paaren reeller Zahlen (τ_0, τ_1) betrachten, die nur als Verhältnisgrössen

$$\tau_0 : \tau_1$$

gelten sollen: Das Werthepaar $t_0 = 0$, $t_1 = 0$ bleibt ausgeschlossen, und das Werthepaar $\varrho\tau_0$, $\varrho\tau_1$ wird (wenn $\varrho \neq 0$) als mit dem Wertepaar τ_0 , τ_1 äquivalent erklärt, ähnlich, wie im Falle der rationalen Zahlen. Dann entspricht also jedem Paar von Verhält-

---

1) Nach einem Vorschlag von F. H a u s d o r f f, der mit dem früher von mit gebrauchten Wort abgeschlossen nicht zufrieden ist.
Manche Autoren wollen von der Einführung einer uneigentlichen"Zahl" (∞) überhaupt nichts wissen. So O s g o o d (I. 1912, S.6) und G. H. H a r d y (A Course of Pure Mathematics, 1925, Appendix III), der im Übrigen mit mir übereinstimmt. Meines Erachtens führt das zu nutzlosen Umständlichkeiten. Freilich ist die bei Gebrauch des Symbols ∞ nötige Vorsicht oft ausser Acht gelassen worden.

nisgrössen $\tau_0 :\# \tau_1$, bei dem $\tau_0 \neq 0$ ist, eine "eigentliche" Zahl t, jedem Wertepaar $0 : \tau_1$ aber entspricht, bei von Null verschiedenem τ_1, die eine uneigentliche Zahl $t = \infty$. Wir haben in der Gesamtheit (Menge) aller Klassen ($\S\tau_0, \neq \S\tau_1$) von Zahlenpaaren wieder das Kontinuum II vor uns, das somit ~~const~~ allein mit Hilfe der natürlichen Zahlen erklärt ist.

Wir können jetzt den Unterschied der Kontinuen I und II mit einfachen Worten beschreiben:

In dem Kontinuum I haben je zwei verschiedene Zahlen t, t' eine bestimmte Ordnung ($t < t'$ oder $t > t'$). Diese wird nicht zerstört durch gewisse stetige Zuordnungen (Transformationen), namentlich nicht durch solche der Form.

$$(1) \qquad t^* = a\,t + b \qquad \{a > 0\}.$$

Wir sagen: Das Kontinuum I ist linear-geordnet [1].

In dem Kontinuum II haben erst drei verschiedene Zahlen t, t', t'' eine bestimmte "Ordnung". Es ist nämlich entweder

$$(\tau_0' \tau_1'' - \tau_1' \tau_0'')(\tau_0'' \tau_1 - \tau_1'' \tau_0)(\tau_0 \tau_1' - \tau_1 \tau_0') > 0$$

oder:

$$(\tau_0'\tau_1'' - \tau_1'\tau_0'')(\tau_0''\tau_1 - \tau_1''\tau_0)(\tau_0\tau_1' - \tau_1\tau_0') < 0$$

Auch diese Art von Ordnung wird durch gewisse stetige Zuordnungen (Transformationen) nicht zerstört, und namentlich wird sie nicht zerstört durch die "linearen" Transformationen:

$$(2a) \qquad \begin{aligned} \tau_1^* &= a\tau_1 + b\tau_0 \\ \tau_0^* &= c\tau_1 + d\tau_0 \end{aligned} \qquad \{ad - bc > 0\} \qquad 2)$$

---

1) Wir sagen jetzt "linear-geordnet" und nicht mehr nur "geordnet" mit Rücksicht auf den Begriff der zyklischen "Ordnung", von dem sogleich die Rede sein wird.

2) Diese Beziehungen sind für die weitere Ausbildung der Lehre von den linearen Transformationen nicht zweckmässig. Ich gebe sie in dieser zunächst sich darbietenden Form, um weitere Auseinandersetzungen zu ersparen, da es hier nur auf das Grundsätzliche ankommt.

Wir sagen: Das Kontinuum II ist zyklisch geordnet:

In der Bezeichnung t, t', t" lässt sich der gleiche Sachverhalt nicht so einfach ausdrücken. Es müssen dann vier Fälle unterschieden werden, da keine der Zahlen t, t', t" oder irgend eine von ihnen mit der uneigentlichen Zahl ∞ zusammenfallen kann:

$$(t'' - t')\,(t - t'')\,(t' - t) \gtrless 0 \quad \{t,\ t',\ t'' \neq \infty\} \quad ,$$

$$t'' - t' \gtrless 0 \qquad \{t = \infty\}$$

$$t - t'' \gtrless 0 \qquad \{t' = \infty\}$$

$$t' - t \lessgtr 0 \qquad \{t'' = \infty\}$$

Diese Beziehungen werden dann, unter anderem, nicht zerstört durch Transformationen der Form

$$(3a) \qquad t^{*} = \frac{at + b}{ct + d} \qquad \left\{\frac{a\infty + b}{c\infty + d} = \frac{a}{c}\right\} \quad ,$$

mit positiver "Determinante" ad - bc. Das Heisst, es können durch solche Transformationen zwar die aufgezählten Fälle unter einander vertauscht werden, aber nur die oberen (unteren) Zeichen mit den oberen (unteren) Zeichen.

Anders verhält es sich dann mit den Transformationen

$$(2b) \qquad \begin{aligned} \tau_1^{*} &= a\tau_1 + b\tau_0 \,, \\ \tau_2^{*} &= c\tau_1 + d\tau_0 \,, \end{aligned} \qquad ad - bc < 0$$

oder den entsprechenden Transformationen

$$(3b) \qquad t^{*} = \frac{at + b}{ct + d} \quad ;$$

diese vertauschen die oberen mit den unteren Zeichen.

Führen wir zwei der Transformationen (2) oder (3) mit verschiedenen Verhältnisgrössen a : b : c : d und a': b': c': d' hinter einander aus, so ist es am einfachsten, die homogenen Parameter der zusammengesetzten Transformation in die Form

$$a'' = a'a + b'c \quad , \qquad b'' = a'b + b'd,$$
$$c'' = c'a + d'c \quad , \qquad d'' = c'b + d'd$$

zu schreiben. Es folgt dann

$$a''d'' - b''c'' = (a'd' - b'c')(ad - bc),$$

woraus man sieht, zu welcher Art von Transformationen die zusammengesetzte

$$\tau_1^{**} = a''\tau_1 + b''\tau_0 \ , \ \tau_2^{**} = c''\tau_1 + d''\tau_0$$

oder

$$t^{**} = \frac{a''t + b''}{c''t + d''}$$

gehört. Wir drücken das so aus:

Die Transformationen (2a) und (2b) oder (3a) und (3b) bilden zusammen eine"geschichtete" Gruppe, die aus einer Hauptschicht η_3 (a) und einer Nebenschicht η_3 (b) besteht.

Die Transformationen beider Schichten bilden je ein Kontinuum [1] von drei Dimensionen - oder es gibt"2. ∞^3" solcher Transformationen, zwei Schaaren mit je drei "wesentlichen" Parametern [2].

Achten wir auf die Art, wie sich die aus zweien zusammengesetzten Tranformationen auf die beiden Schichten verteilen, und nennen wir S eine Transformation der Hauptschicht, T eine solche der Nebenschicht, so erhalten wir Formeln des Typus

$$(S)(S'') = (S'') \ , \qquad (S)(T') = (T'') \ ,$$
$$(T)(S') = (T'') \ , \qquad (T)(T') = (S'') \ , \qquad 3)$$

---

1) Ein "offenes" Kontinuum, das - wie schon das Kontinuum I - nach der Terminologie der Mengenlehre nur aus "inneren Punkten" besteht. Die im Texte ausgeschlossenen Grenzstellen sind gegeben durch die Gleichung $ad - bc = 0$. Sie bilden ein zweidimensionales geschlossenes Kontinuum, den "Rand" des ersten.

2) Da es nämlich nur auf die Verhältnisse a : b : c : d ankommt.

3) Wird zuerst S, dann S' ausgeführt, so heisst das Ergebnis S" - u.s.w. Die Reihenfolge der auszuführenden Transformationen ist gleichgültig für die Schicht, zu der das Ergebnis ihrer Zusammensetzung gehört, sonst aber nicht; oder doch nicht immer.

$$a'' = a'a + b'c \quad , \qquad b'' = a'b + b'd,$$

$$c'' = c'a + d'c \quad , \qquad d'' = c'b + d'd$$

zu kombinieren. Es folgt dann

$$a''d'' - b''c'' = (a'd' - b'c')(ad - bc),$$

woraus man sieht, zu welcher Art von Transformationen die zusammengesetzte

$$t'' = \frac{a''t + b''}{c''t + d''}, \quad t'' = \frac{a''t_1 + b''t_0}{c''t_1 + d''t_0}, \quad t''_0 = c''t_1 + d''t_0$$

oder

$$t'' = \frac{a''t + b''}{c''t + d''}$$

gehört. Wir drücken das so aus:

Die Transformationen (3a) und (3b) oder (3a) und (3b) bilden zusammen eine "geschlossene" Gruppe, die aus einer Hauptschaft (a) und einer Nebenschaft (b) besteht.

Die Transformationen beider Schaften bilden je ein Kontinuum [1] von drei Dimensionen - oder es gilt "∞^3" solcher Transformationen, zwei Schaften mit je drei "wesentlichen" Parametern [2].

Achten wir auf die Art, wie sich die aus zweien zusammengesetzten Transformationen auf die beiden Schaften verteilen, und nennen wir S eine Transformation der Hauptschaft, T eine solche der Nebenschaft, so erhalten wir Formeln des Typus

$$(S)(S') = (S'') \quad , \qquad (S)(T') = (T'') \quad ,$$

$$(T)(S') = (T'') \quad , \qquad (T)(T') = (S'') \quad , \qquad 3)$$

---

1) Ein "offenes" Kontinuum, das - wie schon das Kontinuum I - nach der Terminologie der Mengenlehre nur aus "inneren Punkten" besteht. Die im Texte ausgesonderten Grenzstellen sind gegeben durch die Gleichung $ad - bc = 0$. Sie bilden ein zweidimensionales geschlossenes Kontinuum, den "Rand" des ersten.

2) Da es natürlich nur auf die Verhältnisse $a : b : c : d$ ankommt.

3) Wird zuerst S, dann S' ausgeführt, so heisst das Ergebnis S'' - u.s.w. Die Reihenfolge der ausführenden Transformationen ist gleichgültig für die Schaft, zu der das Ergebnis ihrer Zusammensetzung gehört, sonst aber nicht; oder doch nicht immer.

Da die entgegengesetzte Transformation

$$t^* = \frac{dt - b}{-ct + a} \qquad 2)$$

zu einer Transformation S oder T immer zu derselben Schicht gehört, wie diese Transformation selbst, so folgt, dass bei Ausführung derselben Transformation unserer Gruppe auf die durch eine Transformation (a) oder (b) gepaarten Veränderlichen (τ, τ^*) oder (t, t^*) die Schicht, zu der die Transformation gehört, erhalten bleibt. Insbesondere gilt das für die Hauptschicht. Wir sagen:

Die Transformationen der Hauptschicht bilden für sich eine Gruppe γ_3 und zwar eine invariante Untergruppe der Gruppe aller linearen Transformationen der Veränderlichen $\tau_1 : \tau_0$ oder t 2).

Ein ganz elementarer, aber natürlich sehr wichtiger Satz ist noch:

Eine lineare Transformation der Veränderlichen $t_1 : t_0$ oder t ist völlig bestimmt durch die Zuordnung von drei Punkten α, β, γ zu drei anderen $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*$.

Ob sie zur Haupt- oder Nebenschicht ~~oder~~ also zu γ_3 oder η_3 gehört, wird entschieden durch das Vorzeichen des Produktes

$$(\beta_0\gamma_1 - \beta_1\gamma_0)(\gamma_0\alpha_1 - \gamma_1\alpha_0)(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) \cdot$$
$$\cdot (\beta_0^*\gamma_1^* - \beta_1^*\gamma_0^*)(\gamma_0^*\alpha_1^* - \gamma_1^*\alpha_0^*)(\alpha_0^*\beta_1^* - \alpha_1^*\beta_0^*)$$

(das man als Diskriminante der Transformation bezeichnen kann).

---

1) Diese Formel wird erhalten durch Auflösung der Gleichung $t^* = \frac{at+b}{ct+d}$ nach t, und nachfolgende Vertauschung von t und t^*.

2) Ich komme hier mehrfach mit der Terminologie anderer Autoren in Kollision. Statt von geschichteten Gruppen hat S.L i e von ~~ga~~ "gemischten" Gruppen gesprochen, was mir kein gutes Wort zu sein scheint. Statt von einer Hauptschicht und Nebenschichten reden

In der Geometrie wird das, was wir hier Zahl genannt haben, gewöhnlich Punkt genannt. Die Zahlen unseres Kontinuum II heissen dann"Punkte einer Geraden", die man sich mit einem "uneigentlichen" Punkt versehen und"im Unendlichen" (entsprechend der Zahl ∞) geschlossen denkt, vielfach unter einem (nach meiner Meinung illusorischen) Hinweis auf "die Anschauung". Unser Kontinuum II erscheint dann als der einfachste Fall eines "projektiven Kontinuums", das in diesem Zusammenhang gewöhnlich Raum genannt und, nach der jeweiligen Dimensionenzahl, in der deutschen Literatur mit dem Zeichen R_n zugeordnet wird. (n = 1, 2, 3, ...). Die linearen Transformationen (2) oder (3) sind der einfachste Fall der (reellen) "Kollineationen" und ebenso auch der "Korrelationen" der projektiven Geometrie, die sich, für n = 1, in ihnen vereinigen, und Projektivitäten genannt werden. Der Satz über die Zuordnung von zweimal drei Punkten gilt, methodisch, als Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.

Die Notwendigkeit der Unterscheidung zweier Arten von Projektivitäten hat wohl zuerst v. S t a u d t erkannt. Er unterschied (1827) sachgemäss zwei Arten des "Umlaufssinn's" einer Geraden, entsprechend unserer zwei Arten von Zahlentripeln t, t', t" [1].

---

andere von einer Hauptgruppe und Nebengruppen.Aber als (von H. W e b e r) diese Terminologie vorgeschlagen wurde, war die Bedeutung des Wortes Gruppe schon festgelegt. Die "Nebengruppen" sind keine Gruppen. Ebensowenig kann ich mich mit den (ebenfalls von W e b e r eingeführten) Worten Teiler und Normalteiler (statt Untergruppe und invariante Untergruppe) einverstanden erklären, die im Falle kontinuierlicher Gruppen ganz unpassend sein würden.

2) In ähnlicher Weise sind in jedem reellen projektiven Punktkontinuum Rn von ungerader Dimensionenzahl zwei Arten reeller Kollineationen (und Korrelationen) zu unterscheiden. Obwohl das eigentlich selbstverständlich ist, ist es doch oft genug übersehen worden. Siehe die Abhandlung Über die Begriffe Links und Rechts, J.B.d. D.M.V., Bd.21, 1913, S.196. Das einzige mir bekannte Lehrbuch, in dem dieser Sachverhalt (und was damit zusammenhängt) gewürdigt wird, ist die Projective Geometry von V e b l e n und Y o u n g (II, 1917, § 174 und folgende).

Für Leser, die mit der Theorie der Transformationsgruppen nicht ganz unbekannt sind, sei noch hinzugefügt, dass die Bedeutung der linearen Transformationen (2) oder (3) nicht nur auf ihrem evident-elementaren Charakter beruht, sondern auch auf einigen weniger naheliegenden Sätzen, deren wichtigste diese sind:

Die Gruppe $\mathfrak{G}_3$ ist, im eigentlichen und engsten Sinne des Wortes einfach. (Das heisst, sie enthält keine invariante Untergruppe, ausser der identischen Transformation. Es sei daran erinnert, dass die "einfachen" Gruppen auch in der Theorie der Transformationsgruppen eine zentrale Stellung einnehmen).

Die Gruppe $\mathfrak{G}_3$ ist in keiner umfassenderen kontinuierlichen Gruppe enthalten, die ebenfalls von einer endlichen Zahl von Parametern abhängt. Sie ist also, im angegebenen Sinne, nicht erweiterungsfähig, ausser unter Erhöhung der Dimensionenzahl des betrachteten "Raumes" R_1.

Jede im gleichen Sinne nicht erweiterungsfähige Gruppe von Transformationen einer Veränderlichen t ist zu der Gruppe $\mathfrak{G}_3$ ähnlich.

Diese wichtigen Sätze rühren her von S. L i e; sie haben den Ausgangspunkt seiner Theorie der Transformationsgruppen gebildet, die noch viele Sätze ähnlicher Art enthält 1).

In der Theorie des Kontinuums II tritt (wie bei jedem "geschlossenen" Kontinuum) an Stelle des B o l z a n o - W e i e r s t r a s s'schen Lehrsatzes ein einfacherer:

Im Kontinuum II hat jede unendliche Menge von Zahlen (Punkten) eine Häufungszahl (einen Häufungspunkt).

Entsprechend hat man, für das Kontinuum II, einen erweiterten Begriff der Konvergenz einer Zahlenfolge. Insbesondere kann man sagen: Eine Folge (t_n) eigentlicher Zahlen t_n "konvergiert" gegen die uneigentliche Zahl ∞, wenn $\pm \frac{1}{t_n t_{n+m}}$ bei hinreichend grossem n für alle m beliebig klein wird,

$$\{-\varepsilon < \frac{1}{t_{n+m}} < \varepsilon \ , \ \varepsilon \to 0\}$$

Und diese Erklärung der"Konvergenz gegen $t = \infty$ " lässt sich auch als Definition der uneigentlichen Zahl ∞ hinstellen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} = \infty \qquad 2)$$

---

1) Vgl. S. L i e und G. S c h e f f e r s, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, 1893, Theorem 27, S.314.

2) Dieser Gebrauch des Limeszeichens und der Terminuskonvergenz ist nicht allgemein üblich. Gewöhnlich spricht man von Divergenz. Dann bezieht man sich aber nicht auf das Kontinuum II, sondern auf das Kontinuum I.

Wichtig ist natürlich, dass im Kontinuum II die uneigentliche Zahl $t = \infty$ gar keine Sonderstellung einnimmt. Sie kann ja, durch Transformationen der Form (3) in jede beliebige Zahl von II übergeführt werden.

Offenbar lassen sich schliesslich auch die beiden im Vorhergehenden zusammengefassten Fälle von einander trennen. Es existiert auch eine Ergänzung des Kontinuums I durch zwei uneigentliche Zahlen, statt einer. Wir erkennen so die Existenz eines weiteren Kontinuums, das wir das Kontinuum III nennen wollen:

Ist in einer Folge $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ für hinreichend grosses n und alle m immer

$$-\varepsilon < \frac{1}{t_{n+m}} < 0$$

bei beliebig kleinem positivem ε, so schreiben wir

$$\infty_- = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} ,$$

und ist, wieder für hinreichend grosses n und alle m

$$0 < \frac{1}{t_{n+m}} < \varepsilon$$

so schreiben wir

$$\infty_+ = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t_n} .$$ 1)

Das Kontinuum I ist dann durch Zusatz der beiden uneigentlichen "Zahlen" ∞_- und ∞_+ abgeschlossen worden und eben durch diese Abschliessung in das Kontinuum III übergegangen. Dieses ist, wie II, geschlossen.

Auch im Kontinuum III hat (wie im Kontinuum II) jede unendliche Menge von Zahlen mindestens eine Häufungszahl.

---

1) Üblich sind die - meines Erachtens sehr bedenklichen - Zeichen $-\infty$ und $+\infty$.

Das Kontinuum III ist wie das Kontinuum I linear-geordnet. Es unterscheidet sich aber von dem Kontinuum I dadurch, dass es eine erste und eine letzte "Zahl" (∞_-, ∞_+) enthält [1].

Eben diese Eigenschaften hat jedes abgeschlossene Intervall des Kontinuums I oder III, nämlich die Gesamtheit (Menge) aller eigentlichen Zahlen t, die Ungleichungen der Form

$$a \leqq t \leqq b \qquad \{ a < b \}$$

genügen, wobei a mit $-\infty_-$ zusammenfallen kann. Es gibt dann den Satz:

Es existieren(nicht-abzählbar-) unendlich viele Abbildungen, durch die das Kontinuum III stetig, d.h. lückenlos und eindeutig-umkehrbar, sowie unter Erhaltung seiner Ordnung, auf irgend eines seiner Teilstücke $\langle a,b \rangle$ // bezogen wird.

Im Falle des Teilstückes

$$-1 \leqq t \leqq 1$$

wird eine solche Abbildung vermittelt durch die transzendente Gleichung

$$t = \operatorname{tg} \frac{\pi\tau}{2} \qquad -1 \leqq \tau \leqq 1 \quad ;$$

es gibt aber auch algebraische Zuordnungen , die dasselbe leisten, und es hat meines Erachtens Interesse, die infachsten unter ihnen anzugeben.

Eine erste solche Abbildung wird vermittelt durch die Zuordnung

$$y = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \qquad z = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \quad :$$

---

1) Wir können sagen, $-\infty_-$ sei den negativen, ∞_+ den positiven eigentlichen Zahlen angegliedert. Zwei weitere Möglichkeiten, bei denen dem Kontinuum I entweder nur ∞_- oder nur ∞_+ angegliedert wird, bei denen also das ergänzte Kontinuum "halb-offen" bleibt, werden hier, als von viel geringerem Interesse, übergange

Ist z irgend eine Zahl des Kontinuums III, so ist y eine Zahl des Intervalls $\langle -1 \ldots 1 \rangle$, mit Einschluss der Grenzen, und umgekehrt. Die lineare Ordnung bleibt erhalten. (Vgl. Figur 1; es ist

$$y = \frac{2t}{1+t^2}, \quad z = \frac{2t}{1-t^2}$$

und

$$\sqrt{1-y^2} = x, \quad \sqrt{1+z^2} = \frac{1}{x},$$

ferner

$$t = \frac{yz}{z+y} = \frac{z-y}{yz} \quad)$$

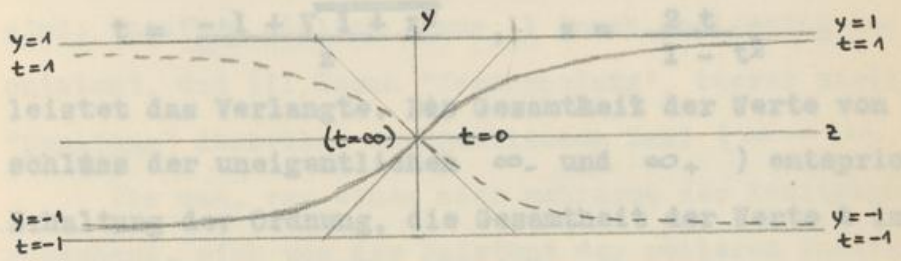


Fig 2.

Die Figur 2 zeigt den reellen Zug einer auch für das komplexe Gebiet von y und z definierten"Kurve"

$$(1-y^2)(1+z^2) = 1.$$ [1)]

Das punktiert gezeichnete Stück diesen Kurvenzugs geht nicht in die betrachtete Abbildung ein.

Diese Kurve, eine rationale Kurve vierter Ordnung, hat drei Doppelpunkte, deren jeder zweimal Wendepunkt ist. Zwei davon liegen auf dem reellen Zug ($t = 0, \infty$ und $t = -1, 1$), der dritte ist, als reeller Punkt, isoliert ($t = \pm i$). Die Figur 2 zeigt die vier reellen Wendetangenten. Unsere Kurve ist mithin, als Ort von Punkten (y, z) des komplexen Gebietes im ebenen projektiven Kontinuum, projektiv-äquivalent mit (kollinear zu) einer Lemniskate. In der Tat geht ihre Gleichung durch die imaginäre Kollineation.:

$$\frac{1+z}{2y} = \xi, \quad \frac{1-z}{2iy} = \eta \qquad (\rightarrow)$$

über die Gleichung der Lemniskate

---

1) Einer Kurve nach der in der algebraischen Geometrie üblichen Terminologie, die sich freilich von dem älteren Kurvenbegriff sehr weit entfernt. Sie ist ein zweidimensionales Gebilde (ein Kontinuum).



$$(\xi^2 + \eta^2)^2 = 2 (\xi^2 - \eta^2).$$

Diese aber hat nun einen reellen Doppelpunkt ($\xi = 0, \eta = 0$), der auf ihrem reellen Zug liegt, die beiden anderen sind konjugiert-imaginär. (Sie liegen in den absoluten Punkten der Euklidischen Geometrie).

Ausser der hier aufgetretenen reellen Kurve, die zu einer Lemniskate komplex-kollinear ist, gibt es, beiläufig bemerkt, noch eine dritte, die ebenfalls reell ist (d.h. eine Gleichung mit reellen Koeffizienten und also ein relles Polarsystem hat) und ebenfalls komplex-kollinear ist zu einer Lemniskate. Von dieser letzten Kurve, deren Gleichung, bezogen auf ein reelles System homogener Koordinaten, in der Form

$$x_0^2 x_1^2 + x_0^2 x_2^2 + x_1^2 x_2^2 = 0$$

geschrieben werden kann, sind nur die drei Doppelpunkte reell.

Aber auch die Zuordnung

$$t = \frac{-1 + \sqrt{1 + z^2}}{z}, \qquad z = \frac{2t}{1 - t^2}$$

leistet das Verlangte. Die Gesamtheit der Werte von z (mit Einschluss der uneigentlichen ∞_- und ∞_+) entspricht, unter Erhaltung der Ordnung, die Gesamtheit der Werte t im Intervall von - 1 bis 1, mit Einschluss der Grenzen.

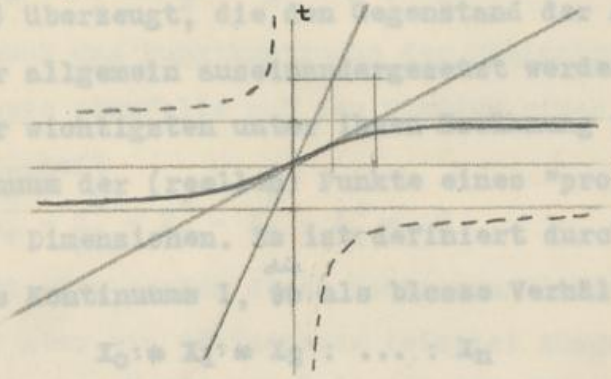


Fig 3.

Die Figur 3 zeigt ein Stück des reellen Zugs der Kurve dritter Ordnung, die nunmehr zur Abbildung dient. Die punktiert gezeichneten Teile des Kurvenzugs kommen nicht in Betracht. Die Kurve hat auf ihrem reellen Zug einen Doppelpunkt (der in der Figur horizontal im Unendlichen liegt) und einen Wendepunkt.

Die Figur zeigt die beiden Doppelpunktstangenten, die Tangente des reellen Wendepunktes und die reelle Gerade, auf der, (bekanntlich) die drei Wendepunkte, der reelle und die beiden konjugiert-imaginären, enthalten sind.



Man wird ohne weiteres bemerken, dass das Kontinuum I bei Herausnahme (Auslassung, Überspringung) einer einzelnen Zahl in zwei Kontinuen von gleicher Struktur (linear-geordnete Kontinuen ohne Anfangs- und Endzahl) zerfällt, dass bei dem Kontinuum II der gleiche Effekt bei Herausnahme zweier Zahlen erreicht wird, und dass aus dem Kontinuum II, kurz gesagt, durch "Verdoppelung" (irgend) zweier Zahlen, und aus dem Kontinuum III durch "Verdoppelung" einer eigentlichen Zahl zwei linear-geordnete Kontinuen von der Struktur des Kontinuum III entstehen [1]. Von den Kontinuen I und III kann man sagen, dass sie "in dem Kontinuum II enthalten" sind; insofern nämlich I aus II durch Weglassung der Zahl ∞ entsteht, und III durch "Verdoppelung", besser vielleicht noch "Spaltung" derselben uneigentlichen Zahl $\{\infty \to (\infty_-, \infty_+)\}$.

Wie man, von einem oder mehreren der Kontinuen I, II, III ausgehend, sich von der Existenz der weiteren Kontinuen ("Punktkontinuen") überzeugt, die den Gegenstand der Analysis bilden, soll nicht mehr allgemein auseinandergesetzt werden. Immerhin mögen einige der wichtigsten unter ihnen Erwähnung finden. Dahin gehört das Kontinuum der (reellen) Punkte eines "projektiven" Raumes R_n von n Dimensionen. Es ist definiert durch ein System von n Zahlen des Kontinuums I, die als blosse Verhältniszahlen:

$$x_0 : x_1 : x_2 : \ldots : x_n$$

betrachtet werden, wie in dem einfachsten Falle $n = 1$ die Verhältniszahlen, die $\tau_0 : \tau_1$ genannt worden waren (unter Ausschluss des Wertsystems $0, 0, \ldots 0$). Dieses Kontinuum ist also ähnlich erklärt wie das Kontinuum II, mit dem es im Falle $n = 1$ identisch ist, und es hat für alle n eine Haupteigenschaft mit diesem

---

1) Was hier Struktur genannt ist, heisst in der Mengenlehre Ordnungstypus.

gemein: Es ist geschlossen [1], jede konvergente Punktfolge hat in ihm einen (einzigen) Häufungspunkt. Weitere Kontinuen, die namentlich von Geometern untersucht worden sind, werden aus diesem "projektiven Kontinuum" dadurch ausgeschnitten, dass gewisse Abhängigkeiten zwischen den n + 1 Verhältniszahlen $X_0 \ldots X_n$ hinzutreten, die sonst irgend welche Werte haben können (als "Veränderliche" zu denken sind;) zum Beispiel

$$X_0^2 - \{ X_1^2 \pm X_2^2 \pm \ldots \pm X_n^2 \} = 0.$$

Zu diesen besonderen Kontinuen gehört das Kontinuum der projektiven Liniengeometrie im Raume R_3, bei dem n = 5 ist und die quadratische Gleichung in der Form

$$X_0^2 - X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 + X_4^2 - X_5^2 = 0$$

geschrieben werden kann. Ferner das Punktkontinuum der Lie'schen Kugelgeometrie, bei dem die quadratische Gleichung die Form

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 + X_5^2 = 0$$

hat; und auch das Punktkontinuum der Möbius'schen Kugelgeometrie, deren Theorie ebenfalls auf das Studium einer quadratischen Mannigfaltigkeit

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 - X_4^2 = 0$$

hinausläuft. Wir werden diese Kontinuen nicht genauer betrachten, dafür soll aber ein einfacheres Beispiel ausgeführt werden, das der Möbius'schen Kreisgeometrie, in der man es mit einer quadratischen Mannigfaltigkeit, dem Kontinuum der Punkte einer Fläche 2.Ordnung im projektiven Komtinuum R_3:

$$X_0^2 - X_1^2 - X_2^2 - X_3^2 = 0$$

zu tun hat, dessen Definitionsgleichung, daß X_0 nicht den Wert Null annehmen kann, sich übrigens auch einfacher in der Form

---

1) Nach neuerer Terminologie: kompakt.

$$\mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 = 1$$

schreiben lässt. ($\mathfrak{x}_k = X_k : X_0$). Wir wenden uns nunmehr zu einer genaueren Betrachtung eben dieses Falles, der aus mehr als einem Grunde unser besonderes Interesse beanspruchen darf [1].

XI.

Das Kontinuum einer komplexen Veränderlichen.

Wir betrachten jetzt wiederum geordnete Paare von "Zahlen" x und y, die wir aber, abweichend von Früherem, nunmehr dem Kontinuum II entnehmen. Wenn wir dann zwischen Paaren der Form (∞, y), (x, ∞) und (∞, ∞) nicht unterscheiden und sie alle durch das einfache Symbol ∞ bezeichnen, so haben wir vor uns die Definition eines weiteren Kontinuums, das zweidimensional ist und (auf unendlich viele Arten) als eine Erweiterung von Kontinuen des Typus II angesehen werden kann. Insbesondere enthält es die Zahlenpaare $(x, 0)$ und $(\infty, 0)$, die sachgemäss mit den Zahlen X und unseres Kontinuums II identifiziert werden.

Wir wollen das so erklärte Kontinuum kurz das Kontinuum IV nennen.

Die Paare x, y fassen wir, wie wir es schon getan hatten, zu einer "komplexen Zahl" z zusammen:

$$z = x + y\,i\,.$$

Wir reden sodann von den Zahlen z - mit Rücksicht auf allerlei Anwendungsmöglichkeiten - auch als von Punkten (reellen Punkten!) und zwar von Punkten einer "Ebene", der Gauss'schen Ebene, in der X und y rechtwinkelige kartesische Koordinaten

---

1) In dem auf Seite 00 genannten Lehrbuch von Veblen und Young wird manches des darüber zu Sagenden ausführlicher vorgetragen, anderes allerdings nicht (Bd.II, Kapitel VI).

sind [1]. Zum Unterschied von der uneigentlichen Zahl ∞, für die wir auch das Wort uneigentlicher Punkt brauchen werden, nennen wir die Zahlen z, soweit ihre Koordinaten x und y dem Kontinuum I angehören, eigentliche Punkte.

Diese für den Anfang des hier Vorzutragenden notwendige Unterscheidung erweist sich nun alsbald als nebensächlich.

Wie nämlich die im vorigen Abschnitt betrachteten Vertauschungen der Punkte (Zahlen) des Kontinuums II, die Transformationen (3), in diesem Kontinuum überall stetig sind, aus einer konvergenten Punktfolge und ihrem Grenzpunkt immer wieder eine solche Folge und ihren Grenzpunkt hervorgehen lassen, [2] so verhält es sich auch mit gewissen, auf ähnliche Art gebildeten Vertauschungen - Transformationen - der Punkte des Kontinuums IV. Tatsächlich haben alle Transfromationen der beiden Formen

$$(4a)\quad z^* = \frac{a\,z + b}{c\,z + d} \qquad ad - bc \neq 0$$

$$(4b)\quad z^* = \frac{\ell\,\bar{z} + m}{n\,\bar{z} + r} \qquad \ell r - mn \neq 0$$

die genannte Eigenschaft.

---

1) Zur Vermeidung von Missverständnissen sei ausdrücklich darauf hingwiesen, dass wir uns hier keineswegs auf eine "vorgefundene" "ebene" Geometrie (die Euklidische) beziehen. Punkt ist für uns nur ein anderer Name für die komplexe Zahl z, die selbst ein Name für das Zahlenpaar (x, y) ist, u. s. w. Die Rechtwinkligkeit zweier ~~meiner~~ Fortschreitungen von (x, y) zu (x + dx, y + dy) und (x + δx, y + δy) ist definiert durch die Gleichung

$$dx.\,\delta x + dy.\,\delta y = 0.$$

x und y heissen rechtwinklige Koordinaten, weil diese Gleichung für "Differentiale" (zunächst von x und y) durch die Annahmen $\delta x = 0$ und $dy = 0$ erfüllt wird.

2) Unstetig sind diese Transformationen, ja sogar nicht einmal überall definiert, nur im Kontinuum I.

{Unter a ... d, b ... r sind jetzt komplexe Verhältniszahlen der Form $\sigma + \tau i$ zu verstehen und $\bar{z}$ bedeutet die zu z "konjugiert" - komplexe Zahl x - yi. Man beachte, dass unsere früheren Formeln (3a) und (3b) beide in jeder der Formeln (4a) und (4b) enthalten sind.}

Überdies gilt der Satz, dass diese zwei Arten von Transformationen die einzigen sind, die die Punkte des Kontinuums IV überall eindeutig und stetig unter einander vertauschen und ausserdem die Eigenschaft haben, dass z^* von z oder $\bar{z}$ analytisch abhängt [1]. (Bekannter Lehrsatz von L i o u v i l l e) Der Punkt ∞ nimmt dabei nur der Form nach eine gewisse Sonderstellung ein; ist im Falle (4a) $z = \infty$ und $c = 0$, so wird $z^* = \frac{a}{c}$; ist $c = 0$, so wird $z^* = \infty$. Ebenso verhält sich der Fall (4b).

Die Transformationen (4a) und (4b) haben nun noch weitere sehr bemerkenswerte Eigenschaften. Zunächst bilden auch die Transformationen beider Schaaren je ein Kontinuum - das Kontinuum der Verhältniszahlen a:# b:# c:# d oder l:# m:# n:# r, ein nicht geschlossenes, also "offenes" Kontinuum, ähnlich wie das Kontinuum I). Da die genannten Verhältniszahlen, ohne Änderung der dargestellten Transformation, mit einem von Null verschiedenen komplexenFaktor ϱ multipliziert werden können, so bilden beide Kontinuen Mannigfaltigkeiten von 8 - 2 = ∞^6 Dimensionen. Wir bezeichnen dementsprechend, die Zahl der in (4a) und (4b) vorkommenden "wesentlichen" Parameten andeutend, den Inbegriff (die Menge) der Transformationen (4a) mit Γ_6 , und ebenso den Inbegriff der Transfor-

---

1) Dieser Begriff, ein Grundbegriff der Analysis, lässt sich nicht in Kürze erklären. Es muss, unter anderem, vorausgesetzt werden, dass der Leser weiss, was eine analytische Funktion ist, und worauf die grosse Bedeutung gerade dieser Art von"Funktionen" (eigentlich Funktionenpaaren) beruht.
In meiner Terminologie ist im Falle (4a) z^* eine analytische Funktion von z, im Falle (4b) eine antianalytische Funktion derselben komplexen Veränderlichen z.

mationen (4b) mit H_6 .

Die Transformationen der Schaar oder Mannigfaltigkeit Γ_6 haben ferner eine Eigenschaft, die wir auch schon bei den Transformationen (3) haben feststellen können: Sie bilden eine "kontinuierliche" Gruppe.

Da ~~unser~~ zuvor Gesagtes sich hier in wenig geänderter Form wiederholt, so können wir uns kurz fassen:

Die Transformationen von Γ_6 und und H_6 bilden zusammen eine geschichtete Gruppe Γ_6 , H_6 , von der Γ_6 die kontinuierliche invariante Untergruppe ist. Γ_6 nennen wir die Hauptschicht, H_6 die Nebenschicht von Γ_6, H_6.

Dazu gehört noch:

Drei verschiedene Punkte z_1, z_2, z_3 können der Reihe nach in drei andere z_1^*, z_2^*, z_3^* durch eine einzige Transformation von Γ_6, und ebenso durch eine einzige Transformation von H_6 übergeführt werden [1].

Hiermit haben wir also ein (ziemlich viel inhaltsreicheres) Seitenstück zu dem Lehrsatz, der (auf Seite 00) Fundamentalsatz der projektiven Geometrie genannt worden war; und wir haben zugleich diesen Fundamentalsatz selbst nochmals und in erweiterter Form vor uns: Der erweiterte Satz bezieht sich auf das "komplexe Gebiet einer Geraden" (der Geraden y = 0), oder auf das(reelle) Gebiet unseres Kontinuum IV, was ~~bei~~ beides dasselbe sagt.

~~Diese wichtige Eigenschaft unserer Transformationen~~

~~erkennt die folgende Satz von~~

---

1) Einer der Punkte z_1, z_2, z_3 und ebenso einer der Punkte ~~xxxxxx~~ z_1^*, z_2^*, z_3^* kann der Punkt ∞ sein.

Eine andere wichtige Eigenschaft unserer Transformationen erkennen wir, wenn wir uns der elementaren analytischen Geometrie erinnern, in der man den Maasszahlen von Winkeln ein positives oder negatives Vorzeichen beilegt. [1] Wir dürfen wohl ohne weitere Erklärung (auch in Bezug auf die Umgebung der Stelle ∞) sagen:

Bei den Transformationen der Schaar Γ_6 bleiben alle Winkel erhalten, und bei denen von H_6 werden alle Winkel umgelegt. Oder in anderer Sprache: Die Transformationen von Γ_6 sind eigentlich-, die von H_6 uneigentlich-konform.

Eine weitere wichtige Eigenschaft unserer Transformationen enthält der folgende Satz von M ö b i u s:

Die Transformationen der Gruppe Γ_6, H_6 lassen aus jeder Kreislinie immer wieder eine solche hervorgehen, und sie sind die einzigen (die einzigen) Punkttransformationen) derart [2].

Zunächst nämlich zeigt eine leichte Rechnung, dass alle Transformationen der Form (4a) oder (4b) tatsächlich jeder Kreislinie

$$\zeta_0(x^2+y^2) - 2\zeta_1 x - 2\zeta_2 y + \zeta_3 = 0 \qquad \{\zeta_0\zeta_3 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 < 0!!\} \tag{5}$$

wieder eine solche zuordnen.

Man muss dann nur den Fall $\zeta_0 = 0$, der in der elementaren analytischen Geometrie als die Gleichung einer Geraden figuriert, in den Begriff der Kreislinie einschliessen: Diese Geraden, "Kreislinien", die den Punkt ∞ enthalten, nehmen hier ebensowenig als der Punkt ∞ selbst eine Sonderstellung ein.

Zweitens bemerken wir, dass die Transformationen der gesuchten Art überall wohldefiniert und eindeutig sein müssen. Denn sie werden aus jedem Paar z_1, z_2 von verschiedenen Punkten, die den Kreislinien eines Bündels als ihre Schnittpunkte (Basispunkte) angehören, wieder ein solches Paar, und das den Paaren

---

1) Auch der allgemeine Winkelbegriff lässt sich, wie die Orthogonalität, ganz unabhängig von der Elementargeometrie definieren, worauf hier nur der Kürze halber nicht eingegangen wird.

2) Die Kreislinien kommen auch in der v. S t a u d t'schen "Theorie der Imaginären" vor, unter dem Namen von Ketten (als Örter "imaginärer Punkte" einer Geraden, hier der Geraden y = 0. Mit Rücksicht auf Verallgemeinerungen ihrer Begriffe werden sie - nach C. S e g r e - jedoch besser als eindimensionale Ketten bezeichnet.

z_1, z oder z, z_2 mit festem z_1 oder z_2 und beliebigem z ebenfalls einen Inbegriff von ∞^1 solchen Paaren hervorgehen lassen.

Um den zweiten Teil unseres Lehrsatzes zu begründen, genügt es demnach, zu bemerken, dass man ihn nur noch für einen Fall zu beweisen braucht, in dem der Punkt ∞ in Ruhe bleibt. Die Transformationen (4a) und(4b) reduzieren sich dann auf eigentliche und uneigentliche "Ähnlichkeitstransformationen",

$$(6a)\quad z^* = Az + B, \quad (6b)\quad z^* = L\bar{z} + M.$$

Wir haben also, mit M ö b i u s, zu zeigen, dass jede Transformation der Punkte, die Kreislinien in ebensolche überführt und den Punkt ∞ in Ruhe lässt, in einer dieser Formen enthalten sein muss. Eine solche Transformation wird nun parallele Geraden 1) in ebensolche, Parallelogramme, deren Ecken auf einer Kreislinie liegen, in eben solche, also rechte Winkel in rechte Winkel, ferner Parallelogramme, deren Diagonalen einander rechtwinklig schneiden, in eben solche, mithin Quadrate immer in Quadrate überführen. Mit einer Folge von in einander eingeschachtelten immer enger werdenden Quadratnetzen lässt sich aber jeder eigentliche Punkt der Ebene beliebig aproximieren, womit die Behauptung erwiesen ist.

Wir betrachten schliesslich noch besondere, und zwar <u>die involutarischen Transformationen der Gruppe</u> Γ_6, H_6. Involutarisch heisst eine eindeutige Transformation, <u>die von der identischen Transformation verschieden ist</u>, aber, zweimal angewendet, zu dieser führt 2).

Die in Γ_6 enthaltenen Transformationen derart heissen (M ö b i u s'sche) <u>Involutionen</u>. Es gibt ihrer ∞^4, das heisst, sie bilden ein (offenes) Kontinuum von vier Dimensionen, und sie sind alle in der Form

$$(7)\qquad z^* = \frac{a\,z + b}{c\,z - a} \qquad \{\, a^2 + b\,c \neq 0 \,\}$$

enthalten. Jede lässt zwei getrennte Punkte in Ruhe, deren Bestimmung im Allgemeinen die Auflösung einer "quadratischen" Gleichung (einer Gleichung vom zweiten Grade) verlangt.

---

1) Parallele Geraden gelten hier als Kreislinien, die einander im uneigentlichen Punkt berühren.

2) Die identische Transformation, d.i. die Transformation, die alles in Ruhe lässt (hier $z^* = z$) und die involutarischen Transformationen werden beide, nach H. W e b e r, <u>zweiseitig</u> genannt. Die Begriffe involutorisch und zweiseitig werden häufig verwechselt.

Dies ist cum grano salis zu verstehen. In Werken über Algebra scheint nie die Rede davon zu sein, dass die Auflösung einer Gleichung

$$z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n = 0$$

mit komplexen Koeffizienten im allgemeinen die Lösung oder doch die partielle Lösung einer (speziellen) Gleichung vom Grade n^2 verlangt. So verhält es sich indessen.

Insbesondere ist eine "reine" Gleichung der Form

$(x + y\,i)^2 = a + b\,i$, auf die sich die quadratische Gleichung reduzieren lässt, äquivalent mit dem Gleichungspaar

$$x^2 - y^2 = a\,, \quad 2xy = b\,,$$

woraus folgt

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\,, \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \quad \{2xy = b\}\,.$$

Man hat also, nach einander zwei Quadratwurzeln auszuziehen. Nur zwei der Wertsysteme (x, y) sind immer reell, und wenn nur auf diese geachtet wird, so erscheinen nur nicht-negative Werte $(\sqrt{a^2+b^2})$ der ersten Wurzel als zulässig.

Die Gleichung $z^2 + 2Az + B = 0$ ist also in der Regel nur der Form nach von zweitem Grade, nicht auch im Inhalte der durch sie dargestellten Forderung, was nicht mit Stillschweigen übergangen werden sollte. Es handelt sich hier ganz wie bei den abgeleiteten Zahlbegriffen, um eine terminologische Fiktion. Es ist gut, das im Sinne zu behalten. Es ist keineswegs immer angebracht, die imaginären Lösungen als unzulässig zu betrachten. Von Fällen derart wird weiterhin noch zu reden sein.

Gepaarte Punkte z, z^* liegen mit den genannten zwei Punkten, den Invidenzpunkten oder Doppelpunkten der Involution, immer auf einem Kreis, und die zwei Arten von Punktpaaren auf dem Kreis liegen zu einander harmonisch [1]. Die Invidenzpunkte können willkürlich vorgeschrieben werden, nur müssen sie voneinander verschieden sein. Ferner ist (wie im reellen Gebiete einer Geraden) eine Involution auch durch irgend zwei ihrer Paare völlig bestimmt. Mit jeder Invulution sind sodann zwei zueinander orthoganale Kreisbüschel invariant verbunden, deren eines auf allen seinen

---

1) Man beachte, dass eine Kreislinie ein Kontinuum "des Typus" II, von derselben Struktur wie II, und überdies auf II birational abbildbar ist (S.OO. Vgl. auch, weiterhin, die Figut 4).

Kreisen beide Inzidenzpunkte enthält, während dem anderen eben diese Punkte als Grenzfälle, Ausartungen von Kreisen (Punktkreise) angehören. Die Punkte eines jeden nicht ausgearteten unter diesen Kreisen werden durch die Involution (hyperbolisch, elliptisch) gepaart. Jede Involution ist mit jeder anderen äquivalent (kreisverwandt), d.h. jede kann in jede andere durch Transformationen von Γ_6 (genauer durch 2. ∞^2 solche Transformationen) übergeführt werden, und ebenso durch Transformationen von H_6. Jede ist also "äquivalent" mit $z^* = -z$ und mit $z^* = \frac{1}{z}$.

Die in der Nebenschicht enthaltenen involutorischen Transformationen heissen Inversionen. Sie können in jeder der beiden Formen

$$(8)\qquad z^* = \frac{l\bar{z} + m}{n\bar{z} + r} \qquad \left\{ \begin{array}{l} l + \bar{r} = 0,\ r + \bar{l} = 0, \\ m = \bar{m},\ n = \bar{n} \end{array} \right\}$$

$$z^* = \frac{l\bar{z} + m}{n\bar{z} + r} \qquad \left\{ \begin{array}{l} l = \bar{r},\ r = \bar{l}, \\ m + \bar{m} = 0,\ n + \bar{n} = 0 \end{array} \right\}$$

erschöpfend dargestellt werden.

Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden.

Bei jeder der beiden Schreibarten (8) ist die Transformationsdeterminante

$$lr - mn$$

frei von i, also reell. Halten wir uns an die erste Schreibweise, so kann es sein, dass

$$lr - mn < 0$$

ist. Schreiben wir dann die Gleichung

$$z = \frac{l\bar{z} + m}{n\bar{z} + r},$$

die durch Identifizierung von z^* mit z entsteht, in der Form (5), so findet sich, dass die vorgelegte Involution ∞^1 Koinzi-

denzpunkte hat, deren Ort eine Kreislinie ist und dass umgekehrt mit jeder Kreislinie eine Inversion, gegenüber der Gruppe (Γ_6, H_6), invariant verbunden ist, nämlich die Inversion

$$(9) \quad z^* = \frac{(\zeta_1 - \zeta_2 i)\,\bar{z} - \zeta_3}{\zeta_0 \bar{z}\bar{z} - (\zeta_1 + \zeta_2 i)}$$

Es kann aber auch

$$1r - mn > 0$$

sein. Die Forderung des Zusammenfallens von z und z^* ist dann widerspruchsvoll. Bei dieser Art von Inversionen gibt es also keine Inzidenzpunkte.

Beide Arten von Inversionen sind in je ∞^3 Exemplaren vorhanden.

Der Form nach ergibt sich jedoch auch im zweiten Falle die Gleichung einer Kreislinie mit reellen Koeffizienten $\zeta_0 \ldots \zeta_3$. Nur ist jetzt

$$\zeta_0\zeta_3 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 > 0.$$

Man kann diesen letzten Sachverhalt auch terminologisch zum Ausdruck bringen. Man kann etwa von fiktiven oder "idealen", oder nach einem Vorschlag von F. K l e i n, von "nullteiligen Kreislinien" reden, im Gegensatz zu den dann "einteilig" zu nennenden wirklichen Kreislinien, von denen vorher die Rede war. Dabei wird also die Aussage der Nicht-Existenz einer Kreislinie im zweiten Falle in ein Adjektivum, "nullteilig" verlegt.

Ich mache von dieser Terminologie keinen Gebrauch, da sie leicht dazu dienen kann, minder erfahrene Leser zu verwirren. Sie hat aber ihre Vorteile. Sie verweist nämlich auf die Möglichkeit, das Kontinuum IV, das wir durch einen Erweiterungsprozess aus dem Kontinuum II erhalten hatten, nochmals, zu einem geeigneten Kontinuum V, zu erweitern. Dieses Kontinuum V hat die doppelte Dimensionenzahl wie IV. Es hat die gleiche Struktur, oder es gehört zu demselben Typus wie das Kontinuum der komplexen Punkte einer nicht- singulären Fläche zweiter Ordnung, nämlich, bei Deutung der Verhältniszahlen $\zeta_0 : \zeta_1 : \zeta_2 : \zeta_3$ als Punktkoordinaten, der Fläche

$$\zeta_0\zeta_3 - \zeta_1^2 - \zeta_2^2 = 0. \qquad \#\,11.$$

In ihm bezeichnet, unter anderem jede Gleichung (auch jede Gleichung mit komplexen Koeffizienten $\zeta_\varkappa$) der Form

$$\zeta_0(x^2+y^2) - 2\zeta_1 x - 2\zeta_2 y + \zeta_3 = 0, \qquad \#\,11_1$$

in der nunmehr für x und y (die für uns bisher immer reelle Zahlen waren) auch komplexe Werte

$$x = \xi + \xi' i \,, \quad y = \eta + \eta' i$$

zugelassen werden, einen Ort von"Punkten" (x, y), aber nunmehr von ∞^2 Punkten, die in ihrer Gesamtheit immer dann, wenn

$$z_0 z_3 - z_1^2 - z_2^2 \neq 0$$

ist, ein Kontinuum vom Typus IV bilden. Nennen wir, übrigens in Übereinstimmung mit sonst Üblichem, nunmehr ~~ebenx~~ dieses zweidimensionale Kontinuum Kreis, und zwar reellen Kreis, wenn die Verhältnisse $z_0 : z_1 : z_2 : z_3$ reell sind, so haben wir dreierlei "reelle Kreise" vor Augen, je nachdem

$$z_0 z_3 - z_1^2 - z_2^2 \gtreqless 0$$

ist. Im ersten Falle hat der Kreis einen im Kontinuum IV (der G a u s s'schen Ebene) gelegenen "reellen Zug" - eben das, was wir zuvor Kreislinie genannt hatten [1]. Im zweiten hat er nun einen einzigen Punkt ("Doppelpunkt") im Kontinuum IV, und im dritten gar keinen.

Im zweiten Fall aber ist der "Kreis", Ort von Punkten des Kontinuums V, reduzibel: Er besteht aus einem Paar von sogenannten isotropen Geraden, die sich in seinem reellen, d.h. in IV gelegenen Punkt, seinem Doppelpunkt, durchdringen. Hierauf wird weiterhin noch zurückzukommen sein. Zu den Kreisen der zweiten Art ist auch der Kreis des Kontinuums V zu rechnen, der dem unter einander äquivalenten Wertsystemen

$$z_0 : z_1 : z_2 : z_3 = 0 : 0 : 0 : z_3 \qquad (z_3 \neq 0)$$

---

1) Sonst ist in der Literatur wohl immer nur von Kreisen, nicht auch von Kreislinien die Rede, wobei dann das Wort Kreis bald dieses bald jenes bedeutet, auch im gleichen Zusammenhang. Der Gebrauch derselben Worte für verschiedene Begriffe ist allerdings in der Mathematik so wenig zu vermeiden als die Mehrdeutigkeit von Buchstabenzeichen. Wo Missverständnisse nahe liegen, sollten jedoch verschiedene Wortzeichen gewählt werden.

entspricht und dessen in IV gelegener Doppelpunkt der Punkt $z = \infty$ ist.

Wir verlassen jetzt, bis auf weiteres, diesen Gegenstand und kehren zu unserem Kontinuum IV zurück.

Sind die an die Formel (9) geknüpften Bedingungen nicht erfüllt, ist vielmehr

$$z_0 z_3 - z_1^2 - z_2^2 = 0$$

so haben wir überhaupt keine Transformation mehr vor uns. Die Gleichung

$$z_0 (x^2+y^2) - 2 z_1 x - 2 z_2 y + z_3 = 0$$

kann aber dann, wenn nicht gerade $z_0 = z_1 = z_2 = 0$ ist, durch einen eigentlichen Punkt (x_0, y_0) oder z_0 erfüllt werden. Da dieser Punkt hier als Grenzfall einer Kreislinie erscheint, so mögen wir ihn, in dieser seiner Eigenschaft, auch Punktkreis nennen. Bei Übergang zu dem Grenzfall $z_0 = z_1 = z_2 = 0$, in dem die letzte Gleichung sinnlos wird, rückt der Punkt z_0 ins Unendliche. Wir werden also auch den Punkt $z = \infty$ zu den Punktkreisen zu rechnen haben.

Die zwei Arten von Inversionen bilden zusammen mit den Punktkreisen ein geschlossenes Kontinuum von drei Dimensionen, dessen Stellen den Punkten

$$z_0 : z_1 : z_2 : z_3$$

eines projektiven Kontinuums umkehrbar-eindeutig zugeordnet sind. (oder doch zugeordnet werden können). In ihm werden die Inversionen mit und ohne Inzidenzkreis durch die Punktkreise getrennt, die für sich ein zweidimensionales ebenfalls geschlossenes (quadratisches, genauer, wie wir sehen werden, sphärisches) Kontinuum bilden.

Zwei eindeutige Transformationen, z.B. solche der Gruppe (Γ_6, H_6), werden vertauschbar genannt, wenn die Reihenfolge, in

der sie nach einander ausgeführt werden, gleichgültig ist für das Ergebnis ihrer Zusammensetzung, für ihr sogenanntes Produkt.

Sind nun zwei Transformationen unserer Gruppe vertauschbar und ausserdem involutorisch, so bestehen in jedem Falle zwischen ihnen Beziehungen, die sich mit sehr einfachen Worten beschreiben lassen.

Zwei verschiedene Involutionen sind dann und nur dann vertauschbar, wenn die Inzidenzpunkte (irgend) einer von ihnen ein Paar der anderen bilden.

Ihr Produkt ist dann eine dritte Involution (die mit beiden vertauschbar ist).

Von je zweien der drei Paare von Inzidenzpunkten dieser Involutionen sagen wir, dass sie harmonische Lage zu einander haben. Der Leser wird, an der Hand der beigegebenen Figut 4, die Beschreibung von zwei Paaren harmonischer Punkte ohne weiteres ergänzen. Die Doppelpunkte zweier vertauschbarer Involutionen liegen auf einer Kreislinie und sie werden durch zwei weitere Kreislinien ausgeschnitten, die sich sowohl unter einander rechtwinklig schneiden als auch die erste rechtwinklig treffen.



Fig. 4.



Fig. 5.

Die Figur 5 zeigt ebenfalls vier "harmonische Punkte" auf einer Kreislinie (in gleicher Lage wie zwei Paare in der Figur links): Der Leser wird bemerken, dass die durch die Figur 5 angedeutete Konstruktion unserem Gegenstand nicht angemessen ist, da in ihr gerade Linien benutzt werden. Sie gehört in die ebene projektive Geometrie.

Man beachte auch, dass die durch die Figur 5 angedeutete Konstruktion zu existieren aufhört, wenn die Kreislinie durch die

* zulässigere Fassung S. 189 57 des Anhangs.



Fig. 4.



Fig. 5.

vier Punkte in eine Gerade übergeht, während die andere Konstruktion ihre Brauchbarkeit behält (Figur 6).

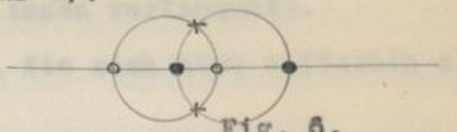


Fig. 6.

Aus dem Fundamentalsatz (S.00) folgt noch, dass mehr als drei verschiedene Involutionen nicht vertauschbar sein können, und dass das Produkt von drei solchen Involutionen die "identische Transformation" ist (jeden Punkt in Ruhe lässt).

Sind eine Involution und eine Inversion vertauschbar, so bilden entweder die Inzidenzpunkte der Involution ein Paar der Inversion, oder die Inversion gehört zu einer Kreislinie, und diese enthält die Inzidenzpunkte der Involution.

Das Produkt zweier solcher Transformationen ist in beiden Fällen eine Inversion, und zwar im zweiten immer eine solche, die ebenfalls zu einer Kreislinie gehört. Diese schneidet die Kreislinie, die zur gegebenen Inversion gehört, unter rechtem Winkel.

Wenn zwei verschiedene Inversionen vertauschbar sind, so gehört mindestens eine von ihnen zu einer Kreislinie. Diese bleibt als Ganzes bei der anderen Inversion in Ruhe. Das Produkt von zwei solchen Inversionen ist eine Involution. Sind beide Inversionen mit Kreislinien verbunden, so schneiden diese einander rechtwinklig, und ihre Schnittpunkte sind die Inzidenzpunkte des Produkts der zwei Inversionen.

Hierzu gehört eine Umkehrung, die kurz so gefasst werden kann:

Jede Involution ist auf 2. ∞^1 Arten in zwei vertauschbare Inversionen zerlegbar.

Solche Inversionen gehören entweder beide zu Kreislinien, und diese schneiden sich dann rechtwinklig in den Doppelpunkten der Involution. Oder nur die eine gehört zu einer Kreislinie,



Fig. 8.

Aus dem Fundamentalsatz (S.00) folgt noch, daß mehr als drei verschiedene Involutionen nicht vertauschbar sein können, und daß das Produkt von drei solchen Involutionen die "identische Transformation" ist (jeden Punkt in Ruhe läßt).

Sind eine Involution und eine Inversion vertauschbar, so bilden entweder die Inzidenzpunkte der Involution ein Paar der Inversion, oder die Inversion gehört zu einer Kreislinie, und diese enthält die Inzidenzpunkte der Involution.

Das Produkt zweier solcher Transformationen ist in beiden Fällen eine Inversion, und zwar in zweien immer eine solche, die ebenfalls zu einer Kreislinie gehört. Diese schneidet die Kreislinie, die zur gegebenen Inversion gehört,unter rechtem Winkel.

Wenn zwei verschiedene Inversionen vertauschbar sind, so gehört mindestens eine von ihnen zu einer Kreislinie. Diese bleibt als Ganzes bei der anderen Inversion in Ruhe. Das Produkt von zwei solchen Inversionen ist eine Involution. Sind beide Inversionen mit Kreislinien verbunden, so schneiden diese einander rechtwinklig, und ihre Schnittpunkte sind die Inzidenzpunkte der Fixpunkte der zwei Inversionen.

Hierzu gehört eine Umkehrung, die nur so gelesen werden kann:

Jede Involution ist auf ∞^1 Arten in zwei vertauschbare Inversionen zerlegbar.

Solche Inversionen gehören entweder beide zu Kreislinien, und diese schneiden sich dann rechtwinklig in den Doppelpunkten der Involution. Oder nur die eine gehört zu einer Kreislinie,

und die Doppelpunkte der Involution sind durch beide Inversionen gepaart (werden durch eine jede von ihnen vertauscht).

Eine ganz spezielle Folgerung, die sich aber weiterhin als bedeutungsvoll erweisen wird, ist:

Vier und nicht mehr verschiedene Inversionen können paarweise vertauschbar sein. Drei davon gehören dann zu Kreislinien, die vierte nicht (Vgl. Figur 4).

Es gibt ∞^6 Quadrupel solcher Inversionen, die ein (offenes) Kontinuum bilden. Sie liefern immer, nach einander ausgeführt, die identische Transformation. Oder, anders ausgedrückt: Drei von ihnen liefern zusammengesetzt die vierte. Oder, noch anders ausgedrückt: Immer zwei der vier Inversionen haben dasselbe Produkt wie die beiden anderen.

Alles das ist nahezu evident, und ist nur vorgetragen worden, damit der Leser einen Sachverhalt deutlich vor Augen habe, auf den wir uns weiterhin noch beziehen werden. Eines ausgeführten übrigens aber auch nicht schwierigen Beweises bedürfen einige weitere Sätze, die ebenfalls noch erwähnt werden sollen [1]:

Jede Transformation der Gruppe Γ_6 kann durch Zusammensetzung von zwei Involutionen erhalten werden. (In der Regel auf ∞^1 Arten, die identische Transformation natürlich, als "Quadrat" jeder Involution, auf ∞^4 Arten). Einiger Vollständigkeit zuliebe mag auch noch der folgende verwandte Satz angeführt werden:

Eine nicht-involutorische Trahsformation von H_6 lässt immer ein einzelnes Punktepaar in Ruhe. Besteht dieses aus zwei verschiedenen Punkten, so bleiben sie entweder einzeln in Ruhe, und mit ihnen zwei zu einander orthogonale Kreislinien, deren Schnitt-

---

1) Siehe H. W i e n e r, Leipziger Berichte, Bd.43, 1891, S.648.

punkte sie sind. ("Hyperbolischer Fall"). Oder sie werden vertauscht. Dann bleibt noch eine einzelne Kreislinie in Ruhe, zu der sie invers liegen. ("Elliptischer Fall"). Oder die zwei Punkte sind nicht verschieden ("Parabolischer Fall", Grenzfall). Dann bleibt noch eine diesen "Doppelpunkt" enthaltende Kreislinie in Ruhe.

In allen drei Fällen kann die Transformation durch Zusammensetzung von drei Inversionen erhalten werden, insbesondere auch so, dass eine der drei Inversionen mit den zwei anderen vertauschbar ~~xinnx~~ ist.

[Wie hätte ~~dem~~ darum der Princeps Mathematicorum das Unendliche, und zawr das eigentliche, vollendete Unendliche ablehnen können, da er es doch überall in seinen Voraussetzungen hatte, in Gestalt einer unabhängigen Veränderlichen, die von ihm, wie von seinen Vorgängern und Nachfolgern, als aller möglichen, auch irrationalen Werte fähig betrachtet wurde! Es handelt sich also lediglich um ein Missverständnis.

Gegen Formeln des Typus (3) oder (4) und gegen den damit verbundenen Gebrauch des Symbols ∞ als Zeichen für eine fiktive "Zahl", mithin gegen die heute allgemein übliche "façon de parler" würde G a u s s sicherlich nichts eingewendet haben, wenn ihm neuere Darstellungsformen vorgelegen hätten. Man kann von jedem beliebigen Symbol einen falschen Gebrauch machen, also auch von dem Symbol ∞ .] S. 193 des Manuscripts.

Diese Seite gehört in den Anfang S 190-195

Dieser Satz enthält die Antwort auf eine naheliegende, aber in der bisherigen Literatur, so viel ich weiss, offen gelassene Frage. Der Beweis ist, (ohne Elementarteilertheorie!) leicht zu führen, wenn man zunächst das Quadrat der zu untersuchenden Transformation betrachtet, das immer ein Punktepaar in Ruhe lässt

(und das, wie sich sogleich findet, keine sogenannte laxodromische Transformation sein kann).

Wir werden später die zentrale Stellung, die in der Theorie der Gruppe (Γ_6, H_6) die Inversioenen einnehmen, noch deutlicher erkennen: Wir können (mit anderen) geradezu von einer Geometrie der Inversionen reden (die dann allerdings nicht auf ~~seine~~ zwei Dimensionen beschränkt bleibt).

Schliesslich wird hervorzuheben sein;

Jede Inversion ist(gegenüber von Transformationen von wie H_6) mit jeder gleichartigen äquivalent.

{Jede Kreislinie ist mit jeder anderen auf $2.2.\infty^3$ Arten äquivalent, die zugehörige Inversion also äquivalent mit der Inversion $z^* \bar{z} = 1$ und mit der Inversion $z^* = \bar{z}$. Die anderen Inversionen sind auf $2.\infty^3$ Arten äquivalent mit der Inversion $z^* \bar{z} = -1$}.

Übrigens sind auch je zwei Quadrupel vertauschbarer Inversionen mit einander äquivalent und zwar auf 24 Arten vermöge von Transformationen von Γ_6, und auf ebensoviele Arten vermöge von Transformationen von H_6)

Dass jede Kreislinie das Kontinuum IV in drei zusammenhängende Punktmengen (drei Kontinuen) zerlegt, deren eine die Kreislinie selbst ist, und die damit zusammenhängende Möglichkeit einer Unterscheidung von "Links und Rechts" in Bezug auf eine bestimmte ("orientierte") Kreislinie, ist eine weitere, nahe liegende, aber wichtige Bemerkung.

Lesern, die bis hierher mit Aufmerksamkeit gefolgt sind, wird es nicht entgangen sein, dass ein Teil des Vorgetragenen im Grunde nichts anderes ist, als die Polarentheorie einer nicht-

geradlinigen Fläche zweiter Ordnung. Schreiben wir namentlich die Inversionen in der Form (9) - was auch im Falle $lr - mn > 0$ möglich ist - so wird die Bedingung der Vertauschbarkeit zweier Inversionen $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{y})$:

$$\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_3 + \mathfrak{x}_3\mathfrak{y}_0 - 2\mathfrak{x}_1\mathfrak{y}_1 - 2\mathfrak{x}_2\mathfrak{y}_2 = 0$$

Diese Formel aber, die in unserem ersten Falle auch die Bedingung der Orthogonalität zweier Kreislinien ausdrückt, kann gedeutet werden als Bedingung des "Konjugiert-Seins" oder der "harmonischen Lage" zweier Punkte in Bezug auf die Fläche

(10) $$z_0z_3 - z_1^2 - z_2^2 = 0$$

eines projektiven Kontinuums R_3, in dem $z_0 : z_1 : z_2 : z_3$ homogene Punktkoordinaten sind. Zu den Inversionen mit oder ohne Inzidenzlinie gehören die Punkte "ausserhalb" oder "innerhalb" der Fläche,

$$z_0z_3 - z_1^2 - z_2^2 \lesseqgtr 0$$

zu den Punktkreisen, also zu den Punkten, deren Paarungen mit irgend welchen Punkten als ausgeartete Inversionen aufgefasst werden können, gehören die Punkte der Fläche selbst, u.s.w. Es besteht aber auch ein sehr wesentlicher Unterschied des Vorgetragenen zum mindesten gegenüber üblichen Darstellungen der Polarentheorie von Flächen zweiter Ordnung: Alle Figuren, die wir betrachtet haben, sind von Punkten unseres Kontinuum IV aus definiert, mithin, in der nun eingeführten Sprache, von Punkten aus, die auf der Fläche selbst liegen. Erst nachträglich haben wir den Zusammenhang unserer Figuren mit uns von anderer Seite her geläufigen erkannt.

Die an die Formel (10) geknüpfte Deutung unserer kleinen Theorie ist jedoch nicht die einfachste und inhaltsreichste, die sich finden lässt. Alle nicht geradlinigen Flächen zweiter Ord-

nung - zu denen die Fläche (10) gehört - sind ja zu einander reell-kollinear. Also werden wir, mit gleichem Ergebnis, an Stelle der Gleichung (10) die einer Kugelfläche benutzen können, in der einfachsten ihrer verschiedenen Gestaltungen, bezogen auf gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten,

$$(11)\quad \left(\frac{Z1}{Z_0}\right)^2 + \left(\frac{Z2}{Z_0}\right)^2 + \left(\frac{Z3}{Z_0}\right)^2 = 1 .$$

Wir brauchen, um die Gleichung (10) auf die Form (11) zu bringen, nur etwa

$$(12)\quad \mathfrak{z}_0 : \mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_2 : \mathfrak{z}_3 = Z_0 + Z_3 : Z_1 : Z_2 : Z_0 - Z_3$$

zu setzen. Der Übergang von den Punktkoordinaten des Kontinuum IV zu den Koordinaten der Punkte auf der Fläche (11) wird dann unmittelbar bewirkt durch die einfachen Formeln der stereographischen Projektion, die in der Theorie der geographischen Karten gebräuchlich sind. Als Projektionszentrum dient der "Südpol"

$$1 : 0 : 0 : -1$$

unserer Kugelfläche (Erdkugel), und es wird, abgesehen von einem willkürlich bleibenden Proportionalitätsfaktor der Koordinaten $Z_0 \ldots Z_3$,

$$(13)$$

$$Z_0 = \frac{1 + z\bar{z}}{2} = \frac{1 + x^2 + y^2}{2}$$

$$Z_1 = \frac{z + \bar{z}}{2} = x, \quad Z_2 = \frac{z - \bar{z}}{2i} = y ,$$

$$Z_3 = \frac{1 - z\bar{z}}{2} = \frac{1 - x^2 - y^2}{2} ,$$

und umgekehrt

(14)

$$z = x + y\,i = \frac{Z_1 + Z_2\,i}{Z_0 + Z_3} = \frac{Z_0 - Z_3}{Z_1 - Z_2 i}$$

Für $z = \infty$ ist

$$Z_0 : Z_1 : Z_2 : Z_3 = 1 : 0 : 0 : -1$$

zu setzen.

So sind also die Punkte unseres Kontinuums IV, der G a u s s'schen Ebene, mit Einschluss des Punktes ∞, dem das Projektionszentrum entspricht, eindeutig-umkehrbar und überall stetig den Punkten (reellen Punkten) unserer Kugelfläche zugeordnet, Punkten der Einheitskugel, wie wir sagen wollen [1]. Ferner entspricht, wie man leicht feststellen wird, jeder Kreislinie der G a u s s'schen Ebene eine Kreislinie auf der Kugel und umgekehrt. Ebenso jeder Inversion eine "projektive Spiegelung" an einem nicht auf der Kugel gelegenen Punkt und seiner Polarebene, sowie jeder Involution die projektive Spiegelung an zwei Geraden, deren jede Polare der anderen ist, und die Kugel nicht berührt. Allgemein aber gilt, - wie ebenfalls leicht festgestellt werden kann -:

Die Transformationen der Gruppe Γ_6, H_6 werden, gedeutet als Vertauschungen der Punkte der Einheitskugel, ausgeschnitten durch die reellen Kollineationen, die diese Kugel als Ganzes in Ruhe lassen. (Durch die reellen "automorphen" Kollineationen der Kugel), die als "eigentliche", (Γ'_6) und "uneigentliche" (H'_6) zu unterscheiden sind).

Und schliesslich erweist sich noch die Zuordnung $z \leftrightarrow Z$

---

1) In der Literatur wird die Kugel so ziemlich überall, statt in die G a u s s'sche Ebene, in die Ebene der projektiven Geometrie projiziert. Dann gibt es singuläre Stellen der Zuordnung $Z \leftrightarrow z$, und bei Ausdehnung der Projektion auf das komplexe Gebiet treten ihnen noch weitere auf, die in unserem Falle ebenso vermieden sind (Vgl. den nächsten Abschnitt).

zwischen den Punkten der G a u s s'schen Ebene und denen der Kugelfläche als winkeltreu oder konform.

Wir haben also in unserer Kugel ein vollkommen treues Abbild des Kontinuums IV: Alles, wovon die Rede war, finden wir hier wieder, ja es ist nicht einmal eine Änderung der Terminologie nötig. Wir hatten eben unsere Terminologie von vorn herein dementsprechend eingerichtet.

Was hier vorgetragen worden ist, mag von vorzugsweise philosophisch interessierten Lesern vielleicht schon als allzu-mathematisch und unbequem empfunden werden. Man wird sich indessen der Einsicht wohl nicht verschliessen, dass eine "Philosophie der Mathematik" auch um der Mathematik willen da sein muss, nicht nur umgekehrt. Jedenfalls habe ich mich brmüht, unter weitgehender Beschneidung des Formelwerkes, den behandelten Stoff weiteren Kreisen geniessbar zu machen. Die unterdrückten Beweise sind in fast allen Fällen leicht zu ergänzen, nämlich für den, der sich darum bemühen will und über einige Geduld verfügt: Ohne diese geht es nun einmal in der Mathematik überhaupt nicht.

Mathematikern, an die ich mich jetzt wende, wenigstens den meisten, wird alles hier Gesagte als selbstverständlich erscheinen und mithin als überflüssig. Manches davon findet man ja heutzutage auch in Lehrbüchern der Funktionentheorie. Ich wünsche indessen gerade meine Fachgenossen auf einen Umstand aufmerksam zu machen, der mir sehr wesentlich zu sein scheint, jedenfalls in einer "Philosophie der Mathematik" in Betracht zu ziehen ist.

In üblichen Darstellungen ist vielfach, statt von Inversionen, von Transformationen durch reziproke Radien die Rede. Damit wird nicht nur terminologisch ein durch die Sache selbst nicht

gerechtfertigter Strich gezogen zwischen den Inversionen allgemeiner Art, den "Spiegelungen" an eigentlichen Kreisen, und denen, die im Sinne der Elementargeometrie Spiegelungen an Geraden sind, sondern es wird auch ein der Theorie der Gruppe Γ_6, H_6 ganz fremder Begriff, der der ~~Entfernung~~ Entfernung zweier Punkte

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

eingeführt, und zwar ohne jede Not. Es ist das ein ziemlich charakterloses Denkverfahren. Da die Figur einer Kreislinie mit ihrem Mittelpunkt offenbar nur bei Ähnlichkeitstransformationen, also bei solchen einer Untergruppe Γ_4, H_4 von Γ_6, H_6 - denen der Gruppe (6) - in eine gleichartige Figur übergeht, so haben Mittelpunkte von Kreisen mit unserer Theorie überhaupt nichts zu tun. Das Heisst nicht etwa, dass sie von der Betrachtung ausgeschlossen werden sollen, es heisst aber, dass sie da betrachtet werden sollten, wohin sie gehören. Es heisst, dass die in die Theorie der Gruppe Γ_6, H_6 gehörigen Lehrsätze in dem Zusammenhang dargestellt werden sollten, den sie unter einander haben.

Diese letzte Bemerkung hat nun noch eine sehr viel weiter reichende Bedeutung.

Was vorgetragen worden ist, kann nicht gerade eine Invariantentheorie der Inversionsgruppe Γ_6, H_6 genannt werden, und noch weniger ist es eine Invariantentheorie der kontinuierlichen Gruppe Γ_6. Immerhin ist es ein Ausschnitt daraus. Es ist nun klar, dass von zwei Gruppen G und g, die als Obergruppe und Untergruppe zu einander stehen, die Obergruppe immer die geringere Menge von Invarianten haben muss. Eine "Invariantentheorie" der Gruppe G, wie auch immer sie präzise definiert werden mag, wird also stets das einfachere System von Begriffen sein. Daher ist es methodisch nicht richtig, bei dem Aufbau von Invarianten-

theorien mit Reihen einander umfassender Untergruppen (g, g', g'' .. anzufangen, zuerst und nacheinander "Halbinvarianten" verschiedener Stufen zu bilden, und dann aus ihnen die Invarianten der Gruppe G herauszusuchen, die man haben will. Vielmehr empfiehlt sich der gerade umgekehrte Weg. Zum Beispiel haben die Gruppe Γ_6 und die Gruppe G_8 der Kollineationen in der Ebene sehr viel einfacher gestaltete Invariantentheorien als die Gruppe g_3 der Euklidischen Bewegungen, die in beiden enthalten ist [1].

S. L i e ist bei Begründung seiner Theorie der Transformationsgruppen von den elementarsten Gruppen, solchen mit nur einem Parameter, ausgegangen, und er ist von da zu verwickelten Fällen, Gruppen mit zwei, drei und mehr Parametern fortgeschritten. Das war offenbar der natürliche, ja der einzig gangbare Weg. In gerade entgegengesetzter Richtung hat man zu gehen, wenn man dann auch Invariantentheorien solcher Reihen in einander eingeschalteter Gruppen haben will, deren übrigens erst wenige vorliegen [2].

---

1) Siehe die Aufsätze Das Appolonische Problem, Math. Annalen, Bd.49, 1897, und Bewegungsinvarianten und Elementargeometrie, Leipziger Berichte, 1896.

2) L i e's Anführungen hierüber sind unhaltbar (J. B. d. D. M. V. Bd.17, 1908).

L i e hat allerdings den letzten Satz nicht gerade mit solchen Worten ausgesprochen. Doch geht der bezeichnete Sachverhalt aus seinen Untersuchungen, die wegen ihres abstrakten Charakters (und auch wegen gewisser ihnen anhaftenden Mängel, die hier aber nicht in Betracht kommen) wenig bekannt geworden sind, unzweideutig hervor.

Das Gesagte mag genügen, um die zentrale Stellung der Gruppen Γ_6 und G_8, und der zu ihnen gehörigen (nach meiner Terminologie natürlichen) Kontinuen in's Licht zu setzen. Es mag aber zum Schluss noch eines Einwandes gedacht werden, der mir wiederholt gemacht worden ist, der aber, wie mir scheint, das vorgetragene gar nicht trifft.

XII.

Die natürlichen Zahlen als Wurzel und letzthin einziger Gegenstand der Mathematik.

Durch die angestellten Überlegungen ist eine Aussage vorbereitet, die das eigentliche Ziel unserer Auseinandersetzung bildet und nunmehr formuliert werden soll:

Mathematik ist die Lehre von den natürlichen Zahlen.

Hiermit soll zunächst gesagt werden, dass alles, was man bis jetzt Mathematik genannt hat, von den natürlichen Zahlen aus entwickelt werden kann, auf ähnliche Art, wie es für die rationalen, negativen und gemeinen komplexen Zahlen, sowie für die Kontinuen II, III, IV gezeigt worden ist. Ausserdem aber wird behauptet, dass alles, was in Zukunft an"Mathematischem" noch entwickelt werden mag, sich nicht anders verhalten kann; dass es nämlich eine genügende Legitimation nur so zu finden vermag, dass es in ähnlicher Weise als existierend erwiesen wird, wie das, wovon bisher die Rede war.

Wie das gemeint ist, wird wohl am besten an einem Beispiel erläutert, und zwar an einem, bei dem manche geneigt sein werden, die aufgestellte These zu bestreiten.

Ein anerkannter Bestandteil der Mathematik ist die "gewöhnliche" projektive Geometrie, nämlich die reellprojektive Geometrie in einem"Raume" (einem geschlossenen Kontinuum) von drei Dimensionen und bestimmter Struktur. Diese Disziplin ist nach einer verbreiteten Ansicht "axiomatisch" und nicht anders zu begründen.

XII.

Die natürlichen Zahlen als Wurzel und letztlin einziger Gegenstand der Mathematik.

Durch die angestellten Überlegungen ist eine Aussage vorbereitet, die das eigentliche Ziel unserer Auseinandersetzung bildet und nunmehr formuliert werden soll:

Mathematik ist die Lehre von den natürlichen Zahlen.

Hiermit soll nunmehr gesagt werden, dass alles, was man die jetzt Mathematik genannt hat, von den natürlichen Zahlen aus entwickelt werden kann, auf ähnliche Art, wie es für die rationalen, negativen und gemischen Komplexen Zahlen, sowie für die Kontinuen II, III, IV gezeigt worden ist. Ausserdem aber wird behauptet, dass alles, was in Zukunft an "Mathematischem" noch entwickelt werden mag, sich nicht anders verhalten kann; dass es nämlich eine genügende Legitimation nur so zu finden vermag, dass es in ähnlicher Weise als existierend erwiesen wird, wie das, wovon bisher die Rede war.

Wie das gemeint ist, wird wohl am besten an einem Beispiel erläutert, und zwar an einem, bei dem manche geneigt sein werden, die aufgestellte These zu bestreiten.

Ein anerkannter Bestandteil der Mathematik ist die "gewöhnliche" projektive Geometrie, nämlich die reellprojektive Geometrie in einem "Raume" (einem geschlossenen Kontinuum) von drei Dimensionen und bestimmter Struktur. Diese Disziplin ist nach einer verbreiteten Ansicht "axiomatisch" und nicht anders zu begründen.

Man spricht von nicht definierten Gegenständen, denen trotz fehlender Definition Namen beigelegt werden, wie Punkte, Geraden und Ebenen, und zweitens, denen gewisse Abhängigkeiten oder gegenseitige Beziehungen angenommen werden. "Projektive Geometrie" heisst dann, bei zahlreichen Autoren, die Lehre von den Folgerungen, die aus solchen als geltend vorausgesetzten Beziehungen gezogen werden können. Von Zahlen ist zunächst dabei gar nicht die Rede, abgesehen davon, dass man z.B. zwei, oder drei, oder vier Punkte u.s.w. betrachtet [1].

So befremdlich nun die Zumutung, mit nicht definierten Gegenständen, also mit blossen Worten zu arbeiten, dem der heutigen Mathematik ferner Stehenden vorkommen wird, so kann das doch alles in bester Ordnung sein, soweit die Logik in Frage kommt. Aber es bleibt das Bedenken, zurück, dass es vielleicht doch nicht in Ordnung ist. Es fehlt ja jedes Kriterium dafür, dass ein irgendwie angenommenes System von Beziehungen zwischen undefinierten Gegenständen, die Voraussetzung der ganzen Argumentation, nicht von Widersprüchen durchsetzt ist. Dieser Zweifel, der in älteren Schriften gar nicht zum Ausdruck gekommen ist [2], wird in neuerer Zeit lebhaft empfunden, und er wird im konkreten Falle beseitigt durch den Nachweis der Realisierbarkeit des ganzen Systems [3]. Es wird gezeigt, dass im Reiche der Zahlen ein System von Gegenständen vorgefunden wird, die eben die für "Punkte", "Geraden"

---

1) Siehe V e b l e n und Y o u n g, I, Kapitel I - V. Diese Art der Einführung von Begriffen hat zu der Äusserung Anlass gegeben, man müsse ganz rückständig sein, um heute noch in der Mathematik eine Wissenschaft "von Maass und Zahl" - also von Zahlen zu erblicken (H u s s e r l).

2) So bei v. S t a u d t, und z.B. auch noch in R e y e's Geometrie der Lage (Fünfte Auflage, 1909-1910), gegen die übrigens noch andere Einwendungen zu erheben sind.

3) An Stelle des Wortes Realisierung brauchen V e b l e n und Y o u n g das Wort concrete representation.

und "Ebenen" angenommenen Beziehungen aufweisen. Ein solches System erhalten wir nämlich, wenn wir, den axiomatischen Standpunkt verlassend, das, was wir Punkt nennen wollen, mit einem beliebigen System von vier (reellen) Verhältniszahlen ("homogenen Koordinaten")

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3$$

identifizieren, sodann Ebene den Inbegriff (die „Menge") aller dieser Punkte nennen, deren Koordinaten einer linearen homogenen Gleichung

$$U_0 X_0 + U_1 X_1 + U_2 X_2 + U_3 X_3 = 0$$

genügen, und schliesslich Gerade den Inbegriff der Punkte heissen, deren Koordinaten zwei linear-unabhängige Gleichungen derart erfüllen [1].

Hiermit ist die Existenz der Grundbegriffe unseres Systems im Reiche der idealen Gegenstände erwiesen, und damit die Existenz auch des Systems selbst, soweit die Logik der gezogenen Folgerungen in Ordnung ist (was in älteren Werken oft genug nicht zutrifft). Eine andere Art der Realisierung aber haben wir in der Mathematik überhaupt nicht zur Verfügung. Ebenso muss es sich also mit allem verhalten, was man als Mathematik hat gelten lassen, und auch mit allem, was in Zukunft "von Mathematischem" noch gefunden werden kann, sofern die Zahlen nicht von vorn herein den Ausgangspunkt bilden, und eine Realisierungsfrage also überhaupt nicht auftaucht. Man mag anscheinend und vielleicht auch tatsächlich widerspruchsfreie Systeme abstrakter Begriffe aufbauen, so viele man will: Einen dauerhaften Platz in der mathematischen Wissenschaft kann keines beanspruchen, dessen Existenz

---

1) V e b l e n und Y o u n g, Kapitel VI und folgende.

und "Ebenen" angenommenen Beziehungen aufweisen. Ein solches System erhalten wir nämlich, wenn wir, den axiomatischen Standpunkt verlassend, das, was wir Punkt nennen wollen, mit einem beliebigen System von vier (reellen) Veränderlichen ("homogenen Koordinaten")

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3$$

identifizieren, sodann Ebene den Inbegriff (die „Menge") aller dieser Punkte nennen, deren Koordinaten einer linearen homogenen Gleichung

$$u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

genügen, und schließlich gerade den Inbegriff der Punkte heißen, deren Koordinaten zwei linear-unabhängige Gleichungen derart erfüllen [1].

Hiermit ist die Existenz der Grundbegriffe unseres Systems im Reiche der idealen Gegenstände erwiesen, und damit die Existenz auch des Systems selbst, soweit die Logik der gegebenen Folgerungen in Ordnung ist (was in älteren Werken oft genug nicht zutrifft). Eine andere Art der Realisierung aber haben wir in der Mathematik überhaupt nicht zur Verfügung. Ebenso muss es also mit allem verhalten, was man als Mathematik hat retten lassen, und auch mit allem, was in Zukunft "von Mathematischem" noch gefunden werden kann, sofern die Zahlen nicht von vorn herein den Ausgangspunkt bilden, und eine Realisierungsferne also überhaupt nicht ausschließt. Man mag ansehnend und vielleicht auch tatsächlich widerspruchsfreie Systeme abstrakter Begriffe aufbauen, so viele man will: Einen dauerhaften Platz in der mathematischen Wissenschaft kann keines beanspruchen, denen Existenz

---

1) V e b l e n und Y o u n g, Kapitel VI und folgende.

im Reiche der idealen Gegenstände nicht ausser allen Zweifel gesetzt, dessen Vorhandensein im Reiche der Zahlen nicht erwiesen ist. Solche abstrakte Theorien sind zum Beispiel die Theorie der endlichen Gruppen diskreter Operationen [1], die Topologie, die von einer endgültigen Darstellung noch weit entfernt ist, und von der daher nicht weiter die Rede sein soll, und die Mengenlehre G. C a n t o r's, die von ihrem Entdecker, ich glaube mit gutem Grunde, sogar von vorn herein aus dem Zahlbegriff entwickelt worden war. Zwei Einwände, die sich gegen das Vorgetragene erheben lassen, kann ich nicht für stichhaltig ansehen. Der eine verlangt, dass nun auch noch die Widerspruchsfreiheit des elementaren Zahlenrechnens (des Rechnens mit natürlichen Zahlen) erwiesen werden soll. Damit scheint mir die philosophische Betrachtung des Mathematischen überspannt zu sein. So wenig als irgendeine andere Wissenschaft ist die Mathematik "voraussetzungslos", im Gegensatz zu einer von D. H i l b e r t vertretenen Meinung. Wir können diese Forderung in voller Gemüthsruhe auf sich beruhen lassen, so lange der (von H. in Aussicht gestellte) Beweis ihrer Erfüllbarkeit nicht wirklich geführt ist.

Ein zweiter Einwand verweist auf die evidente Tatsache, dass die Realisierung eines Systems abstrakter Begriffe, wenn überhaupt, immer auf unendlich viele Arten möglich ist. Man hat darin in der Tat eine Wahl, aber nicht notwendig auch eine Qual. Im Falle der projektiven Geometrie ist die genannte Art der Realisierung ohne Zweifel die einfachste und natürlichste. Und keinen Falles kann uns die Mehrheit der (sogar in nicht abzählbarer

---

1) Vgl. A. S p e i s e r, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, 1923, wo die Realisierbarkeit alles Vorgetragenen ausser Zweifel gesetzt wird, und zwar von vorn herein.

Menge existierenden) Realisierungen von der Notwendigkeit des Realisierens entbinden.

Unter den verschiedenen Realisierungen derselben Gedanken können sich überraschende befinden. In der theoretischen Physik ist das öfter vorgekommen, und in der Geometrie hat man die sogenannten Übertragungsprinzipe, deren einige betrachtet worden sind, ehe noch an die heutige Axiomatik gedacht wurde. Ich erinnre an den von S. L i e gefundenen Zusammenhang von Linien- und Kugelgeometrie. Ich selbst habe diesen und verwandten Zusammenhängen den grössten Teil meiner Lebensarbeit gewidmet, und habe gefunden, dass von den Axiomatikern in dieser Hinsicht nichts zu lernen war, dass sie überhaupt kein Interesse für derartiges an den Tag gelegt haben: Nur das Logische, die leere Allgemeinheit scheint den Relationsmathematikern am Herzen zu liegen.

Steht nun die Sache so, so werden sich weitere Bedenken kaum abweisen lassen. Die Voraussetzungen, mit denen zunächst gearbeitet wird, haben unzweifelhaft den Charakter von Hypothesen, wenn das auch, auffallender Weise, nicht gesagt zu werden pflegt [1]. Die Mathematik bewegt sich aber sonst nicht oder nur vorübergehend in Hypothesen: Sollten sie in diesem Falle wirklich notwendig sein?

Ferner liegt, wenn die Existenz des Behaupteten im Reiche der Zahlen schliesslich doch noch erwiesen werden muss, ein Bis in idem vor: Es wird zweimal dasselbe getan, und zwar in einem Falle, nämlich in dem der axiomatischen Überlegung, meistens auf eine recht unverständliche und beschwerliche Weise. Ist nun so

---

1) Bei F r. S c h u r, Grundlagen der Geometrie, 1909, beginnt die Realisierung, d.i. der Nachweis der Existenz des hypothetisch Angenommenen, auf Seite 106, und bei V e b l e n und Y o u n g auf Seite 167.

etwas vernünftig, im Hinblick auf den Reichtum der mathematischen Wissenschaft an interessanten Problemen, und in Anbetracht der Kürze des Menschenlebens? Soll namentlich der Anfänger, und auch der Physiker, dem die Mathematik nur Mittel ist, durch alle nicht geringen Schwierigkeiten der Axiomatik erbarmungslos hindurchgezwängt werden?

Ich glaube, dass eine solche Frage aufzuwerfen sie auch schon zu verneinen heisst. Mit Algebra und Analysis muss ein Jeder sich vertraut machen, der Mathematiker werden will. Warum also soll das, was in einer natürlichen Ordnung der Dinge doch wohl an den Anfang gehört, und durchaus nicht entbehrt werden kann, nicht wenigstens da, wo wissenschaftliche Ansprüche erhoben werden, auch an den Anfang gestellt werden? Und wohin sollte es führen, wenn jede der Arten von Geometrie, deren es trotz der engherzigen veralteten Terminologie der Axiomatiker unendlich viele gibt, auch noch axiomatisch, also zweimal, begründet werden müsste? Ist das in der axiomatischen Literatur übliche Hin- und Herschieben von Axiomen, ihre Ersetzung durch immer andere und äquivalente, nicht schlechthin langweilig? Und wie kommt es doch, dass die Axiomatiker nahezu durchweg geringes Interesse für die höhere algebraische Geometrie und Differentialgeometrie an den Tag legen? Sollte nicht vielleicht der Gedankeninhalt solcher Disziplinen am Ende gar nicht auf ihren eigentümlichen Axiomen, sondern, wie ihre Namen es sagen, auf Algebra und Infinitesimalrechnung, und, wie alle sonstige Mathematik, auf Definitionen beruhen? Ist das Logisieren wirklich mehr als ein Mittel zu einem Zweck, zu dem Zweck einer inhaltlichen Erkenntnis, in der Mathematik ganz so wie in den Naturwissenschaften? Hatte der Philosoph H e r b a r t nicht Recht, der da meinte, das Denken sei nur gleichsam ein

Vektikel zum Ziele der Erkenntnis - der Erkenntnis, wie ich deutlicher sagen möchte, eines Wirklichen? Jedenfalls hat sich, im Grossen und Ganzen, die starke Betonung des Logischen als einer Sache für sich, als unfruchtbar erwiesen. Solche Werke wie namentlich die von F r e g e, R u s s e l l und W h i t e a d, haben materiell also da gelassen, wo es war (Vgl. auch S.00). In summa: Wir haben in Algebra und Analysis einen Königsweg zur Geometrie.

H ö l d e r (1924, § 47) erkennt des Verfassers Auffassung der Geometrie als folgerichtig und in sich unangreifbar an. Er unterschätzt aber, wie ich glaube, gar sehr die Schwierigkeiten der Axiomatik, auch beziehen sich seine Ausführungen bei diesem Anlass nur auf den schon mehrfach besprochenen beschränkten Begriff von Geometrie. Unmittelbar darauf (§ 48), sobald er es nämlich mit einer unbestimmten Zahl von Dimensionen zu tun hat, nimmt auch er den von mir (1918) empfohlenen Standpunkt ein. Warum also nicht im Falle $n = 3$?

Jede Mehrheit von Definitionen für dieselbe Sache (deren inhaltliche Übereinstimmung nachträglich erwiesen werden muss) hat F r e g e scharf abgelehnt. So weit gehe ich nicht.

Mit alledem wende ich mich nicht gegen das Axiomatisieren selbst, sondern nur gegen Übertreibungen und Einseitigkeiten, gegen die Axiomiasis, wie ich mir eine jetzt schon etwas abgeflaute Modekrankheit zu nennen erlaubt habe; gegen die Leidenschaft, überall "Axiome" zu sehen zu wollen und in ihnen die Hauptsache der Mathematik zu erblicken.

Die Mathematik, die wir wirklich haben, die aktuelle Mathematik, hat sich historisch entwickelt, und zwar, in einem guten Teil, von der Geometrie der Alten aus, die axiomatisch begründet war. Mit Recht wird man argumentieren können, dass der geschichtliche Gang unserer Wissenschaft im Ganzen wohl ein natürlicher sein muss. Es wird also angemessen sein, bei der ersten Einführung in die Geometrie, allerdings nur in die Geometrie der Alten, das Historische zum Worte kommen zu lassen [1].

---

1) Siehe das schon genannte Werk von W. S c h w a n: Elementargeometrie (1929).

Verständnis zum Ziele der Erkenntnis - der Erkenntnis, wie ich deutlicher sagen möchte, einer Wirklichkeit? Jedenfalls hat sich im Grossen und Ganzen, die starke Betonung des Logischen als einer Sache für sich, als unfruchtbar erwiesen. Solche Werke wie namentlich die von F r e g e, R u s s e l l und W h i t e h e a d, haben materiell also da gelassen, wo es war (Vgl. auch S.00). In summa:

Wir haben in Algebra und Analysis einen Königsweg zur Geometrie.

H i l b e r t (1924, § 47) erkennt den Vorteil der Auffassung der Geometrie als folgerichtig und in sich unangreifbar an. Er unterschätzt aber, wie ich glaube, gar sehr die Schwierigkeiten der Axiomatik, auch bezeichnen sich seine Auffassungen bei diesem Anlasse nur auf den schon mehrfach besprochenen beschränkten Begriff von Geometrie. Unmittelbar darauf (§ 48), sobald er an Zahl mit einer unbestimmten Zahl von Dimensionen zu tun hat, nimmt auch er den von mir (1918) empfohlenen Standpunkt ein. Warum also nicht im Falle n = 3 ?

Jede Mehrheit von Definitionen für dieselbe Sache (deren inhaltliche Übereinstimmung nachträglich erwiesen werden muss) hat F r e g e schon abgelehnt. So weit gehe ich nicht.

Mit alledem wende ich mich nicht gegen das Axiomatisieren selbst, sondern nur gegen Übertreibungen und Einseitigkeiten, gegen die Axiomlasie, wie ich mir eine jetzt schon etwas abgeflaute Modekrankheit zu nennen erlaubt habe; gegen die Leidenschaft, überall "Axiome" zu sehen zu wollen und in ihnen die Hauptsache der Mathematik zu erblicken.

Die Mathematik, die wir wirklich haben, die aktuelle Mathematik, hat sich historisch entwickelt, und zwar, in einem guten Teil, von der Geometrie der Alten aus, die axiomatisch begründet war. Mit Recht wird man argumentieren können, dass der geschichtliche Gang unserer Wissenschaft im Ganzen wohl ein natürlicher sein muss. Es wird also angemessen sein, bei der ersten Einführung in die Geometrie, allerdings nur in die Geometrie der Alten, das Historische zum Worte kommen zu lassen 1).

---

1) Siehe das schon genannte Werk von W. S c h w a n: Elementargeometrie (1929).

Auch wird daran zu erinnern sein, dass eine besonders wertvolle Entdeckung der neueren Zeit, die Nicht-Euklidische Geometrie von G a u s s, L o b a t s c h e W s k i j und J. B o l y a i, wirklich durch Nachdenken über Systeme von Axiomen gefunden worden ist, und dass auch späteren Untersuchungen, wie namentlich solchen von D. H i l b e r t und M. D e h n, wesentliche Förderungen unserer Erkenntnis zu danken sind. Die Nicht-Euklidische Geometrie freilich würden wir heute auch haben, und zwar auf eine viel leichter zugängliche Art, in Gestalt der C a y l e y'schen Maassbestimmung, wenn jene schwierigen und grossen Scharfsinn erfordernden Untersuchungen niemals angestellt worden wären [1].

Anders als in der (reinen) Mathematik liegt zudem die Sache in ihren Anwendungen. Als N e w t o n seine Mathematik entwickelte, war es eine grosse Tat, das sauber zusammenzustellen, was an Idealisierungen von Erfahrungstatsachen zu ihrem Aufbau notwendig und hinreichend war, und auch die Geometrie der Alten, sowie die Systematisierung der Mechanik durch L a g r a n g e kann aus diesem Gesichtspunkt betrachtet werden. Im Ganzen wird man die theoretische Physik freilich nicht axiomatisieren können, jedenfalls zur Zeit nicht, da sie die Gewohnheit angenommen hat, ihre Gestalt sozusagen alle Augenblicke zu verändern.

Offenbar haben wir es bei dem übertriebenen Axiomatisieren mit einer besonderen Ausgestaltung der schon abgelehnten formalistischen Auffassung der Mathematik zu tun. In der Tat befindet man sich, sobald man von nicht definierten Gegenständen spricht, im Bereiche der allgemeinen Logik, noch nicht im eigentümlichen Gebiete der Mathematik, die, gleich allen anderen Wissenschaften, durch ihren Inhalt, nicht durch ihre Methodik, definiert werden muss. Der Satz: "Wenn aus p die Folgerung q gezogen werden kann, und aus q die Folgerung r , so folgt aus p auch r ",

---

1) Es gibt leider noch kein Lehrbuch, in dem die Nicht-Euklidische Geometrie rein-analytisch, nämlich vom Zahlbegriff aus, begründet würde.

2) Siehe die lehrreichen Auseinandersetzungen von H e l m h o l t z in dessen Vorlesungen über Mechanik (1898) und das kleine Buch von E. M a c h, Die Mechanik in ihrer Entwickelung (1883).

wird nicht dadurch zu einem spezifisch-mathematischen Satz, dass er in der Mathematik überall angewendet wird. Man kann auch die Astronomie nicht durch ihre Forschungsmittel, nicht als eine Wissenschaft vom Gebrauch der Fernrohre definieren.

Ist das Vorgetragene haltbar, ist also die Mathematik, mit Einschluss aller Arten von Geometrie, aber mit Ausschluss ihrer Anwendungen, eine einheitliche Wissenschaft, so wird zu erwarten sein, dass in ihr alles mit allem zusammenhängt (im Gegensatz zu einer immer bemerkbarer werdenden Tendenz zu weitgehender Zersplitterung unserer Wissenschaft in Teildisziplinen, die dem Scheine nach nichts mit einander zu tun haben) [1].

Hierfür gibt es ganz wundervolle Beispiele; in der Geometrie die schon erwähnten Übertragungsprinzipe, und vor allem die geometrischen Anwendungen der A b e l'schen Funktionen und M i n k o w s k i's Geometrie der Zahlen.

Die zuletzt erwähnten Gegenstände sind nicht so elementar, dass sie in einem philosophischen Buch einigermassen eingehend besprochen werden könnten. Ich will also auf die Gefahr hin, einer oratio pro domo beschuldigt zu werden, den letzten Gedanken, der mir sehr wichtig zu seins scheint, durch ein einfaches Beispiel erläutern - eines, das, wie ich glaube, Lesern keine Schwierigkeit bieten wird, die den Inhalt des vorigen Abschnittes in sich aufgenommen haben.

Es war bereits darauf hingewiesen worden, dass das Punktkontinuum der G a u s s'schen Ebene, unser Kontinuum IV, oder also das Kontinuum der reellen Punkte einer Kugelfläche, in einem weiteren Kontinuum von der Dimensionenzahl 4 enthalten ist (das als das Kontinuum der reellen und "imaginären" Punkte derselben Kugel gedeutet werden kann). Es soll nun gezeigt werden, dass die Einsicht in diesen Sachverhalt uns einen ganz einfachen Zusammen-

---

1)

ist das Vorgetragene heilbar, ist also die Mathematik, mit Einschluss aller Arten von Geometrie, aber mit Ausschluss ihrer Anwendungen, eine einheitliche Wissenschaft, so wird zu erwarten sein, dass in ihr alles mit allem zusammenhängt (im Gegensatz zu einer immer bemerkbarer werdenden Tendenz zu weitergehender Zersplitterung unserer Wissenschaft in Teildisziplinen, die dann Sobolew mach nicht mit einander zu tun haben) [1].

Hierfür gibt es ganz wundervolle Beispiele; in der Geometrie die schon erwähnten Übertragungsprinzipe, und vor allem die projektiven Anwendungen der A b e l'schen Funktionen und M i n k o w s k i'a Geometrie der Zahlen.

Die zuletzt erwähnten Gegenstände sind nicht so elementar, dass sie in einem philosophischen Buch einigermassen eingehend besprochen werden könnten. Ich will also auf die Gefahr hin, einer oratio pro domo beschuldigt zu werden, den letzten Gedanken, der mir sehr wichtig zu sein scheint, durch ein einfaches Beispiel erläutern - eines, das, wie ich glaube, besser keine Schwierigkeit bieten wird, die den Inhalt des vorigen Abschnittes in sich aufgenommen haben.

Es war bereits darauf hingewiesen worden, dass das Punktkontinuum der G a u s s'schen Ebene, unser Kontinuum IV, oder also das Kontinuum der reellen Punkte einer Kugelfläche, in einem weiteren Kontinuum von der Dimensionenzahl 4 enthalten ist (das als das Kontinuum der reellen und "imaginären" Punkte derselben Kugel gedeutet werden kann). Es soll nun gezeigt werden, dass die Einsicht in diesen Sachverhalt uns einen ganz einfachen Zusammen-

---

1)

hang zwischen zwei Theorien erkennen lässt, die auf den ersten Blick "nichts mit einander zu tun zu haben" scheinen; nämlich zwischen der Theorie der"Kurven" in der G a u s s'schen Ebene und der (sonst allerdings nur sehr fragmentarisch abgehandelten) Lehre von den uneigentlich-konformen Abbildungen.

Zunächst müssen wir dazu bisher nur Angedeutetes vervollständigen.

An Stelle der schon eingeführten Koordinaten (ξ, ξ', η, η') und ihrer komplexen Verbindungen X und Y,

(15) $X = \xi + \xi' i \quad ; \quad Y = \eta + \eta' i$

führen wir jetzt neue Koordinaten, "isotrope Koordinaten" ein,

(16) $t_l = x - yi, \qquad t_r = x + yi$

Wir lassen dann neben endlichen Werten von t_1 und t_r auch unendliche zu, ähnlich wie schon bei unserer Definition der Kontinuen II und IV, nämlich Zahlenpaare der Formen

$$[t_l, t_r] \; ; \; [\infty, t_r] \; , \; [t_l, \infty] \; , \; [\infty, \infty]$$

Durch die Gesamtheit aller dieser Wertpaare definieren wir dann das Kontinuum V (das zuvor noch nicht hinreichend deutlich beschrieben worden war).

Das Kontinuum V ist also, nach dieser seiner Definition, geschlossen - eben wie schon die Kontinuen II und IV - und zwar ist es, in der Sprache der Mengenlehre, eine sogenannte Produktmenge, bestehend aus der Zusammenstellung zweier Mengen $[t_1]$ und $[t_r]$, deren jede einzelne eine Menge vom Typus IV ist.

Die Punkte $[t_1, t_r]$ unserer neuen Menge, also die Punkte des Kontinuums V, lassen sich nun auf Mengen von nur je ∞^2 Punkten verteilen, die wiederum Kontinuen des Typus IV sind, und, wenn t eine "laufende" (veränderliche) Koordinate bezeichnet, Zusammenstellungen der Form $[t_1 = \text{const.}, t]$, $[t, t_r = \text{const.}]$

hang zwischen zwei Theorien erkennen lässt, die auf den ersten Blick "nichts mit einander zu tun zu haben" scheinen; nämlich zwischen der Theorie der "Kurven" in der $\mathfrak{G}$ s $\mathfrak{u}$ s'schen Ebene und der (sonst allerdings nur sehr fragmentarisch abgehandelten) Lehre von den unendlich-konformen Abbildungen.

Zunächst müssen wir dazu bisher nur Angedeutetes vervollständigen.

An Stelle der schon eingeführten Koordinaten $(t, t', \mathfrak{x}, \mathfrak{x}')$ und ihrer komplexen Verbindungen X und Y,

$$(15) \qquad X = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}'i \; ; \qquad Y = \mathfrak{x} + \mathfrak{x}'i$$

führen wir jetzt neue Koordinaten, "isotrope Koordinaten" ein,

$$(16) \qquad t_1 = x - yi, \qquad t_2 = x + yi$$

Wir lassen dann neben endlichen Werten von t_1 und t_2 auch unendliche zu, ähnlich wie schon bei unserer Definition der Kontinuen II und IV, nämlich Zahlenpaare der Formen

$$[t_1, t_2] \; ; \quad [\infty, t_2] \; ; \quad [t_1, \infty] \; , \quad [\infty, \infty]$$

Durch die Gesamtheit aller dieser Wertpaare definieren wir dann das Kontinuum V (das zuvor noch nicht hinreichend deutlich beschrieben worden war).

Das Kontinuum V ist also, nach dieser seiner Definition, geschlossen - eben wie schon die Kontinuen II und IV - und zwar ist es, in der Sprache der Mengenlehre, eine sogenannte Produktmenge, bestehend aus der Zusammenstellung zweier Mengen $[t_1]$ und $[t_2]$, deren jede einzelne eine Menge vom Typus IV ist.

Die Punkte $[t_1, t_2]$ unserer neuen Menge, also die Punkte des Kontinuums V, lassen sich nun auf Mengen von nur je ∞^1 Punkten verteilen, die wiederum Kontinuen des Typus IV sind, und, wenn t eine "laufende" (veränderliche) Koordinate bezeichnet, Zusammenstellungen der Form $[t_1 = \text{const.}, t\,]$, $[t, t_2 = \text{const.}]$

entsprechen. Wir wollen diese Kontinuen, in der angegebenen Folge, linkseitige und rechtseitige isotrope Geraden nennen [1]. Geraden heissen sie darum, weil - abgesehen von den zwei Ausnahmefällen $[\infty, t]$ und $[t, \infty]$ - jedes dieser Kontinuen durch eine Gleichung gekennzeichnet ist, die die Form der aus der Elementargeometrie bekannten Gleichung einer geraden Linie hat:

(l) $X - Y\,i = \text{const.}$, (r) $X + Y\,i = \text{const.}$

Evident ist:

Jede linkseitige isotrope Gerade $[t_l, t]$ trifft sich mit jeder rechtseitigen $[t, t_r]$ des Kontinuums V, und umgekehrt geht durch jeden solchen Punkt eine linkseitige und eine rechtseitige isotrope Gerade.

Die beiden Bestimmungsstücke (Koordinaten) t_l und t_r zweier unserer isotropen Geraden können nun konjugiert-komplex sein $t_l = \bar{t}_r$, oder, was dasselbe sagt, $\bar{t}_l = t_r$. In diesem Falle, und in ihm allein, haben die zwei Geraden einen Schnittpunkt mit reellen Koordinaten x und y, kürzer ausgedrückt, einen reellen Schnittpunkt,

$$X = x, \quad Y = y$$

oder, was dasselbe ist, dann und nur dann liegt ihr Schnittpunkt im Kontinuum III. Da die isotropen Geraden nur je einen reellen Punkt haben, so nennen wir sie imaginär(wie auch alle nicht in IV gelegenen Punkte von V), und zwar nennen wir je zwei isotrope

---

1) Gebräuchlich sind auch Worte wie "Nullgeraden" und "Minimalgeraden", von denen mir besonders das zweite, das ich früher leider selbst benutzt habe, wenig passend zu sein scheint. - Zu beachten ist noch, dass in der üblichen Erweiterung des Kontinuums $\{x, y\}$ der Elementargeometrie zu einem Kontinuum kompexer "Punkte" $\{X, Y\}$, auf die dieselben Worte angewendet zu werden pflegen, die isotropen Geraden $[\infty, t]$ und $[t, \infty]$ ganz fehlen. Die G a u s s'sche Ebene und ihre Erweiterung dürfen nicht mit den analogen Begriffen der projektiven Geometrie verwechselt werden.

Geraden mit konjugiert-komplexen Koordinaten konjugiert-imaginär.

Da zu jeder isotropen Geraden eine aus der anderen Schaar konjugiert-imaginär ist, so enthält jede { mit Einschluss der Fälle $[\infty, t]$ und $[t, \infty]$ } einen und nur einen reellen Punkt. Nennen wir also (x_1, y_1) den reellen Punkt einer linkseitigen isotropen Geraden, und (x_r, y_r) den reellen Punkt einer rechtseitigen, so können wir schon angeführte Gleichungen nunmehr in einer inhaltsreicheren Form schreiben:

$$(17, l) \qquad X - Yi = x_1 - y_2 i,$$
$$(17, r) \qquad X + Yi = x_r + y_r i;$$

oder ausführlicher:

$$(18) \qquad \xi + \eta' = x_l \quad , \quad \eta - \xi' = y_l \quad ,$$
$$\xi - \eta' = x_r \quad , \quad \eta + \xi' = y_r \quad .$$

Diese Formeln werden nun zwar illusorisch, wenn eine der Verbindungen

$$t_1 = x_1 - y_1 i = \bar{z}_1 \quad , \quad t_r = x_r + y_r i = z_r,$$

oder also eine der Verbindungen

$$(19) \qquad \bar{t}_1 = x_1 + y_1 i = z_1 \quad , \quad t_r = x_r + y_r i = z_r$$

unendlich ist, sie genügen aber doch, den in Aussicht genommenen Lehrsatz vollständig zu begründen, der nun auch in sehr einfache Worte gefasst werden kann.

Wir wollen den reellen Punkt z_1 der linkseitigen isotropen Geraden durch irgend einen Punkt $[t_1, t_r]$ des Kontinuums V das linke Bild dieses Punktes nennen und die entsprechende Definition, also die des rechten Bildes auf den Punkt z_r anwenden. Jeder Punkt von V, mit Einschluss derer, in deren isotropen Koordinaten t_1, t_r das Symbol ∞ erscheint, bestimmt dann seine

zwei Bilder, und er ist durch sie bestimmt. Wir können nun aus der Formel (19) ganz unmittelbar den Satz ablesen:

Die beiden Bilder z_l und z_r der Punkte einer jeden "analytischen Kurve" des Kontinuums V, die von einer isotropen Geraden verschieden ist, sind durch eine uneigentliche-konforme Abbildung verbunden, und umgekehrt gehört zu jeder solcher Abbildung eine der genannten Kurven [1].

Eine "analytische Kurve" in unserem Kontinuum V, ein (in der Regel offenes) zweidimensionales Kontinuum, ist nämlich, nach der üblichen Terminologie, definiert durch eine analytische Abhängigkeit zwischen den komplexen Veränderlichen t_l und t_r. Diese Abhängigkeit verwandelt sich aber, nach der Formel (9), sofort in eine anlytische Abhängigkeit - dieselbe! - zwischen den komplexen Veränderlichen z_l und z_r, oder in eine "anti-analytische" Abhängigkeit zwischen z_l und z_r, die ihrerseits in der Regel eine uneigentlich-konforme Abbildung definiert. Evidente Ausnahmen sind nur die Abhängigkeiten t_l = const. und t_r = const., also z_l = const. und z_r = const.

Wie ohne weiteres zu erkennen, wird die gefundene Zordnung in eine gleichartige übergeführt durch die Transformationen der Form

$$t_l^* = \frac{a_l\, t_l + b}{c_l\, t_l + d_l}\,, \qquad t_r = \frac{a_r\, t_r + b_r}{c_r\, t_r + d_r}\,,$$

die wieder eine kontinuierliche Gruppe bilden, eine natürliche

---

1) Konform heisst eine (nicht notwendig eindeutige) Abbildung, oder Transformation, die "im Grossen" winkeltreu ist. Ausnahmestellen und auch "natürliche Grenzen" der Abbildung werden zugelassen. Bleiben die Winkel auch dem Vorzeichen nach (oder im Drehungssinn) erhalten, so heisst die Abbildung eigentlich-, sonst uneigentlich-konform.

Erweiterung unserer Gruppe Γ_6. (Es würde über diese Transformationen und (sieben) weitere Transformationschaaren von ähnlichem Bildungsgesetz noch manches zu sagen zu sein, das hier nicht Raum finden kann.)

Es kann sein, dass die betrachtete Kurve reell ist, das heisst - nach der meines Erachtens einzig-sachgemässen Definition von C. S e g r e - dass ihre Punkte paarweise konjugiert komplex sind. $\{t_1 = \bar{t}_r\,,\ t_r = \bar{t}_1\}$. Dann ist die zugehörige Abbilsung symmetrisch, und umgekehrt: Die analytische Abhängigkeit, die zwischen $\bar{z}_1$ und z_r besteht, besteht dann nämlich immer auch zwischen $\bar{z}_r$ und z_1.

Es kann ferner sein, dass eine dieser reellen Kurven einen oder mehrere reelle Züge hat, das heisst, dass für ein Kontinuum von ∞^1 Wertsystem^{en} (z_1, z_r) $z_1 = z_r$ wird. Ein solcher Kurvenzug (nach S e g r e besser filo^{v}, Fuden) kann, wenn er aus lauter regulären Punkten der Kurve besteht, über singuläre Stellen hinweg mit anderen zusammenhängen (Beispiel: S t e i n e r'sche Hypozykloide) oder nicht (Beispiel: Die zwei Züge einer C a s s i n i'schen Kurve). In allen diesen Fällen gehört zu der Kurve eine und dieselbe symmetrische Abbildung.

Es kann ferner sein, dass eine uneigentlich-konforme Abbildung $z_1 \to z_r$ überall existiert (keine natürliche Grenze hat) und allenthalben umkehrbar-eindeutig ist. Dann ist die Kurve ein Kreis. Ist dieser Kreis reell, so ist die Abbildung involutorisch $\{z_1 \leftrightarrow z_r\}$ und identisch mit einer Inversion, die im Sinne der früher betrachteten Transformationen im Kontinuum IV, zu einer "Kreislinie" gehören kann, oder auch nicht.

Hat die betrachtete Kurve einen reellen Zug, der (höchstens mit Ausschluss seiner Endpunkte) aus regulären Punkten besteht,

so existiert zu beiden Seiten des Kurvenzugs ein Gebiet, in dem die Abbildung zwischen z_l und z_r eindeutig und involutorisch ist. Dies ist die in Werken über Funktionentheorie abgehandelte S c h w a r z'sche Spiegelung an dem Kurvenzug [1]. Sie ist ein nicht genauer umgrenztes Bruchstück dessen, was hier vorgetragen worden ist. Durch das Vorhergehende ist bewiesen: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei S c h w a r z'sche Spiegelungen sich analytisch in einander fortsetzen, besteht darin, dass die Kurvenzüge, durch die sie definiert sind, einer und derselben analytischen Kurve angehören.

Die These, derzufolge eine Zersplitterung der Mathematik in einander scheinbar fremde Teilgebiete (Kurven, uneigentlich-konforme Abbildungen) etwas Ungesundes ist, dürfte durch unser Beispiel, sicher eines der einfachsten, die es gibt, wohl hinreichend erläutert sein. Es kann aber auch darauf hingewiesen werden, dass sich die vorgetragene kleine Theorie auf eine unbestimmte Zahl von Dimensionen ("komplexen Dimensionen") ausdehnen lässt, entgegen einer in der Literatur tatsächlich schon ausgesprochenen Meinung, derzufolge die Lehre von der konformen Abbildung auf zwei Dimensionen (eine "komplexe" Dimension) beschränkt sein soll [2].

Die Theorie des Kontinuums V kann ferner auch noch auf aller lei andere Weisen mit der Lehre von "ebenen Kurven" in Verbindung gebracht werden, nämlich auch mit solchen, die der in's komplexe Gebiet erweiterten ebenen projektiven Geometrie angehören. Setzen

---

1) Siehe z. B. O s g o o d, Funktionentheorie, I, Zweite Auflage, 1912, S.669.

2) Siehe die Abhandlung Sugli enti analitici, Rediconti del Circolo matematico di Palermo, t.21, 1906. Ich benutze diese Gelegenheit, einen dort stehen gebliebenen Schreib- oder Druckfehler zu berichtigen. Auf Seite 351, Zeile 6 zu unten soll es heissen regioni sinettiche.

wir insbesondere etwa

$$(20)\qquad \mathfrak{z}_0 = \frac{1+z^2}{2}\,,\quad \mathfrak{z}_1 = \frac{z}{i}\,,\quad \mathfrak{z}_3 = \frac{1-z^2}{2i}$$

(Vgl. Nr.13), so dass

$$(21)\qquad \mathfrak{z}_0^2 + \mathfrak{z}_1^2 + \mathfrak{z}_3^2 = 0$$

und

$$(22)\qquad z = \frac{\mathfrak{z}_1}{\mathfrak{z}_0 + \mathfrak{z}_3 i} = \frac{\mathfrak{z}_0 - \mathfrak{z}_3 i}{\mathfrak{z}_1}$$

wird, und für $z = \infty$: $\mathfrak{z}_0 : \mathfrak{z}_1 : \mathfrak{z}_3 = 1 : 0 : -1$, so ist damit die Kurve (21) - wiederum ein Kontinuum vom Typus IV - gegenseitig eindeutig und <u>überall</u>-stetig auf die (reellen) Punkte unserer Kugelfläche bezogen. Zugleich ist damit jedem Paar z_1, z_r von Punkten der Kugelfläche, ebenfalls eindeutig-umkehrbar und überall stetig, ein Punkt zugeordnet:

$$(23)\qquad \mathfrak{z}_0^* = \frac{1+z_1 z_r}{2}\,,\quad \mathfrak{z}_1^* = \frac{z_1 + z_r}{2i}\,,\quad \mathfrak{z}_3^* = \frac{1-z_1 z_r}{2i}$$

der Schnittpunkt der Tangenten der Kurve (21) in den Punkten $z = z_1$ und $z = z_r$. Jetzt entspricht also jedem Punktepaar z_1, z_r, <u>unabhängig von ihrer Anordnung</u>, ein bestimmter Punkt ($\mathfrak{z}^*$), und auch das Umgekehrte gilt:

$$(24)\qquad \left.\begin{matrix} z_1 \\ z_r \end{matrix}\right\} = i\,\frac{\mathfrak{z}_1^* \pm \sqrt{(\mathfrak{z}_0^*)^2 + (\mathfrak{z}_1^*)^2 + (\mathfrak{z}_3^*)^2}}{\mathfrak{z}_0^* + i\,\mathfrak{z}_3^*}\,.$$

Wir sehen also, dass auch jetzt fast jeder analytischen Kurve der ebenen projektiven Geometrie (nach dem üblichen Begriff einer solchen "Kurve") eine konforme Zuordnung der Punkte z_1 und z_r auf der Kugelfläche entspricht, und umgekehrt; aber die nunmehrige Zuordnung ist <u>eigentlich-konform</u>, abweichend von der vorher betrachteten. <u>Ausnahmen</u> sind auch hier vorhanden, und zwar

sind es die Tangenten der Kurve (21), deren jeder nur die Ausartung einer konformen Abbildung entspricht, nämlich der Inbegriff der Punktpaare z_1, z und z, z_r. Der Kurve (21) selbst entspricht die identische Transformation.

Bemerkenswert ist, dass solchen Kurven, die keine besondere Beziehung zu der Kurve (21) haben, spezielle, nämlich symmetrische Abbildungen entsprechen, während umgekehrt der allgemeine Fall einer eigentlich konformen Abbildung z_1 z_r ganz spezielle Kurven liefert.

Näher soll auf diesen Gegenstand nicht eingegangen werden. Ich will nur darauf hinweisen, dass das vorgetragene Verfahren inhaltsreicher ist als die Art, wie man sonst Kurven mit (eigentlich-) konformen Abbildungen in Verbindung bringt. Auf die Kurve (21) kann ja eine C a y l e y'sche Maassbestimmung gegründet werden. Die Tangenten der Grundkurve dieser Maassbestimmung haben dann die Bogenlänge Null. Sie nehmen die Stelle der isotropen Geraden unseres früheren Verfahrens ein, und werden auch im vorliegenden Zusammenhang passend durch dasselbe Wort bereichert.

Schliesslich noch eine methodische Bemerkung!

Es muss als störend empfunden werden, dass in der vorausgehenden Darlegung einzelne der isotropen Geraden sich den aufgestellten Formeln entziehen. Der Zusammenklang von Gedanken und Formelwerk kann gar nicht harmonisch genug sein. Dieser Mangel hätte sich vermeiden lassen, wenn wir, wie früher bei ähnlichen Gelegenheiten, von vorn herein homogene Veränderliche eingeführt hätten. Dann aber würde der innige Zusammenhang des Vorgetragenen mit der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen minder durchsichtig geworden sein. Aus diesem Grunde habe ich von der genannten Verbesserung abgesehen.

XIII.

Erläuterungen von Einzelheiten.

Es soll nun noch einiges nachgetragen werden, das mir nicht unwesentlich zu sein scheint, aber des Zusammenhangs wegen nicht früher Platz finden konnte.

(1).

Wie war es möglich, dass eine so einfache Definition der Mathematik durch viele Jahrhunderte, bis in die neueste Zeit hinein verborgen bleiben konnte und wie kommt es, dass sie heute noch vielfach abgelehnt wird?

Ich glaube, dass die Hauptursache hierfür auf psychischem Gebiete liegt, und dass sie mit dem mehrfach besprochenen Schicksal der Geometrie zusammenhängt.

Dass die Alten zu einer einheitlichen Auffassung der Mathematik nicht gelangen konnten, ist klar. Ihre Arithmetik war dazu nicht entwickelt genug. Es musste aber noch anderes hinzukommen, um unsere Formulierung möglich zu machen. Noch für G a u s s war Geometrie ein Ding für sich, auf das zwar Algebra und Analysis angewendet werden konnten, das aber doch von ihnen abseits zu stehen schien. (Brief an O l b e r s vom 28.4.1817). Und selbst im Jahre 1888 hat noch L. K r o n e c k e r aus dem gleichen Grunde von seinem Programm einer "Arithmetisierung" der Mathematik die Geometrie (worunter er eben die der Alten verstand) ausdrücklich ausgeschlossen, um sie, wie G a u s s, mit der Mechanik zusammenzustellen.

Selbst der Gedanke, dass wenigstens Algebra und Analysis in den natürlichen Zahlen wurzeln, scheint älteren Mathematikern nicht nahe gelegen zu haben. Er kommt, meines Wissens, ~~meist~~ erst bei

XIII.

Erläuterungen von Einzelheiten.

Es soll nun noch einiges nachgetragen werden, das mir nicht unwesentlich zu sein scheint, aber des Zusammenhangs wegen nicht früher Platz finden konnte.

(1).

Wie war es möglich, dass eine so einfache Definition der Mathematik durch viele Jahrhunderte, bis in die neueste Zeit hinein verborgen bleiben konnte und wie kommt es, dass sie heute noch vielfach abgelehnt wird?

Ich glaube, dass die Hauptursache hierfür auf psychologischem Gebiete liegt, und dass sie mit dem mehrfach besprochenen Schlokal der Geometrie zusammenhängt.

Dass die Alten zu einer einheitlichen Auffassung der Mathematik nicht gelangen konnten, ist klar. Ihre Arithmetik war dazu nicht entwickelt genug. Es musste aber noch anderes hinzukommen, um unsere Formulierung möglich zu machen. Noch für G a u s s war Geometrie ein Ding für sich, auf das zwar Algebra und Analysis angewendet werden konnten, das aber doch von ihnen absolut zu trennen waren. (Brief an O l b e r s vom 28.4.1817). Und selbst im Jahre 1888 hat noch L. K r o n e c k e r aus dem gleichen Grunde von seinem Programm einer "Arithmetisierung" der Mathematik die Geometrie (worunter er eben die der Alten verstand) ausdrücklich ausgeschlossen, um sie, wie G a u s s, mit der Mechanik zusammenzustellen.

Selbst der Gedanke, dass wenigstens Algebra und Analysis in den natürlichen Zahlen wurzeln, scheint früheren Mathematikern nicht nahe gelegen zu haben. Er kommt, meines Wissens, ~~weder~~ bei

D i r i c h l e t (1805 - 1859) vor, von dem das Wort berichtet wird, jeder ~~und~~ auch noch so fern liegende Satz der Arithmetik und höheren Analysis lasse sich als ein Satz über natürliche Zahlen aussprechen. Mit dem "Aussprechen" freilich dürfte es einen Haken haben: Die Definitionen der einfachsten Begriffsbildungen der höheren Analysis (Differentialquotient, Integral) müssten sich zu wahren Bandwürmern auswachsen, wenn, wie K r o n e c k e r es später als tunlich hingestellt hat, Ernst damit gemacht werden könnte. Gemeint ist jedoch offenbar, nur abgesehen von der Geometrie, eben das im Texte Gesagte. D i r i c h l e t muss im Besitze einer Theorie der irrationalen Zahlen gewesen sein.

Dass aber die Geometrie der Algebra und Analysis untergeordnet ist, hat schon B o l z a n o erkannt (1837, § 536, Anmerkung). Ich setze die ganze wegen ihres frühen Datums merkwürdige Stelle her:

> Dass es ein Übelstand sey, wenn wir einen Beweis aus fremdartigen Gründen (ἐξ ἄλλου γένους) führen, während er doch aus einheimischen (ἐξ οἰκείων) hätte geführt werden können, erkannten schon die Alten sehr wohl. Wenn aber A r i s t o t e l e s (Anal. post. I,7) als ein Beispiel dieses Verstosses den Fall anführt, wo eine geometrische Wahrheit aus arithmetischen Betrachtungen dargetan wird: so däucht mir, irrte er sich, ob ihm gleich Mehre der angesehensten Geometer auch noch in unserer Zeit beistimmen. Die arithmetischen Lehren sind wirklich allgemeiner als die geometrischen, und die Beschaffenheiten, die den bloss räumlichen Grössen zukommen, gründen sich objektiv auf Beschaffenheiten, die allen

Grössen überhaupt zukommen. So muss denn mancher Beweis einer geometrischen Wahrheit aus gewissen, rein arithmetischen (d.h. zur allgemeinen Grössenlehre gehörigen) Betrachtungen geführt werden, gerade dann, wenn er den objektiven Grund derselben angeben will. Wahr ist es aber, dass es dergleichen Beweisen gar sehr an jener Anschaulichkeit gebricht, welche man in Beweisen für Anfänger liebt; wahr, dass man eben deshalb überall, wo es sich bloss um Überzeugung handelt, die sogenannten geometrischen vorziehen dürfe, ja, dass es diese noch in so mancher anderen Hinsicht verdienen, nicht ganz vernachlässigt zu werden.

Was mir sonst von Versuchen zu einer Begriffsbestimmung der Mathematik bekannt geworden ist, scheint mir sehr mangelhaft zu sein.

Eine Blütenlese älterer Versuche findet man bei A. V o s s (1914, S.14-20 und 1922, S.26-33). Sehr gewöhnlich sind Definitionen, die die Mathematik als Wissenschaft "von den Zahlen" erklären wollen. Wenn aber die Autoren an solche Sätze wie etwa den von P a s c a l nicht einmal gedacht zu haben scheinen und wenn sie von einer Zurückführung der technischen Zahlbegriffe auf natürliche Zahlen gar nicht reden, so fehlen die Hauptsachen. Geradezu zirkel haft ist die Definition, für die sich in diesem Gewirre von Meinungen V o s s selbst entscheiden will. Auch nach ihm sind, wie bei H i l b e r t, Zahlen Zeichen. Zeichen aber für was? Offenbar für Zahlen! Eine Banknote ist ein Wertzeichen. Der Begriff des messbaren Wertes, einer Wertskala, hat den Zahlbegriff zur Voraussetzung.

Andere, wie P. B o u t r o u x (1927, S.141) verzichten überhaupt darauf, die Mathematik als Ganzes zu umgrenzen. Das dürfte immer noch besser sein, als psychologistische Definitionen oder als formalistische, die die Mathematik als eine Relationstheorie hinstellen wollen und also ihrer Besonderheit gegenüber dem allgemein-Logischen nicht gerecht werden.

Viel besprochen worden sind B. R u s s e l l's Principles of Mathematics (1903). Am Eingang dieses Werkes findet sich der Versuch einer Definition der letzten Art. Sie ist aber, meines Erachtens, so gekünstelt und verworren, dass sie schon aus diesem Grunde abgelehnt werden muss.

> Pure Mathematics is the class of all propositions of the form "p implies q", where p and q are propositions containing one or more variables, the

same in the two propositions, and neither p nor q contains any constants except logical constants. And logical constants are all notions definable in terms of the following: Implication, the relation of a term to a class of which it is a member, the notion of such that, the notion of relation, and such further notions as many be insolved in the general notion of propositions of the above form.

Wie es scheint, gibt es Mathematiker, die das verstehen, und zwar nicht wenige. Nach meinem Begriff von "Verstehen" kann ich es jedoch nicht verstehen. Was logische Konstanten sind, ist mir unklar geblieben, trotz der Erläuterungen, die R. dazu gegeben hat. Dass der Begriff der "Veränderlichen", wie R. ihn - sehr ungewöhnlicher Weise - braucht, der Klarheit entbehrt, gibt R. sogar selbst zu (s.5 unten). Auch geht es bei ihm nicht ohne Gewaltsamkeit ab. Die Formel 1 + 1 = 2, in der von Veränderlichen nichts zu sehen ist, wird auf folgende Art unter die angeführte Definition gezwängt:

If x is one and y is one, and x differs from y (? 1 = 1!), then x and y are two.

Gibt es wohl eine Aussage, in die sich auf diese Weise R u s s e l's "Veränderliche" nicht würden einführen lassen? Wenn x die Sonne ist und y Wärme, dann strahlt die Sonne Wärme aus! Was also hat dieses Denkverfahren mit Mathematik zu tun? Hinzu kommt dann noch, bald darauf, (Socrates + Plato)!

Ich muss überhaupt gestehen, dass ich von den Schwierigkeiten, mit denen R. sich bändelang herumschlägt, nichts zu bemerken vermag. Bestenfalls handelt es sich um Heilungen selbstgeschaffener Schmerzen. Natürliches Denken verfällt nicht auf solche Schrullen. Die wirklichen - und grossen - Schwierigkeiten der Mathematik sind von ganz anderer Art.

Ebenso steht es in einer neueren Schrift R u s s e l's (1923, Kapitel 16 und 17), wo der Artikel in Einzahl (der) und Mehrzahl (die) philosophisch erörtert wird. Dort wird auch der Satz "Ich traf einen Menschen" paraphrasiert: Die Funktion "Ich traf x und x ist menschlich" ist manchmal wahr! Ich kann weder zugeben, dass durch diese Umschreibung der Sinn des Satzes getroffen ist, noch vermag ich überhaupt einen Nutzen von derartigem einzusehen. Wo ein jeder ohne weiteres richtig versteht, sind "philosophische" Erläuterungen an sich schon überflüssig, besonders aber dann, wenn sie geeignet sind, Klares zu verdunkeln. Wir haben hier in einem drastischen Beispiel das ganze Elend einer auch sonst vielfach üblichen Art des Philosophierens vor Augen.

(2).

Reelles und Imaginäres.

Das Wort Imaginär bezeichnet ursprünglich etwas Eingebildetes, Unwirkliches, wie vielfach auch heute noch im üblichen Sprachgebrauch. In der Mathematik hat es aber längst auch eine technische Bedeutung angenommen. Untersuchungen über Funktionen von

komplexen Veränderlichen, solchen also, in denen "Imaginäres" vorkommt, nehmen dieselbe Wirklichkeit in Anspruch, wie anderes Mathematische auch. Sie haben lediglich einen sehr speziellen Charakter, im Vergleich etwa vom Inhalt der Mengenlehre und Topologie.

Gleichwohl macht sich jetzt eine Tendenz bemerkbar, die Vorteile, die man durch Zusammenfassungen wie die von x + y i zu einem einheitlichen Zahlengebilde z zu erreichen gesucht und auch wirklich erreicht hat, wieder aufzugeben. Selbst der Fundamentalsatz der Algebra ist für manche ein Stein des Anstosses, weil er nicht mit den Mitteln der Algebra formuliert und bewiesen werden kann, sondern zu seiner Begründung eines Grenzübergangs bedarf, also in die Analysis gehört. Nun ist "Reinheit der Methode" allerdings eine Sache, mit der man es nicht leicht nehmen soll. Man muss die einzelnen Methoden nach Möglichkeit ausbilden, um ihre ~~Zirk~~ Leistungsfähigkeit beurteilen zu können. Wenn aber tatsächlich schon erreichte Vereinfachungen rückgängig gemacht werden, so scheint mir ein an sich gesunder Gedanke überspannt zu sein. Die Brauchbarkeit von Begriffsbildungen hängt in hohem Maasse von ihrer Einfachheit ab. Solche Sätze wie den B é z o u t'schen und seine Erweiterungen kann die Geometrie nicht entbehren, und die Konzision der Formulierung ist dabei ein sehr wesentlicher Punkt.

Ein anderes Beispiel liefert die Behandlung, die kürzlich ein berühmter Lehrsatz in einem schon erwähnten Buch gefunden hat [1].

Nach S. L i e sollen sich die Geraden im Raume der projek-

---

1) W. B l a s c h k e und G. T h o m s e n, Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln, 1929, § 54.

tiven Geometrie Kugeln derart zuordnen lassen, dass gerade Linien, die einander schneiden, in Kugeln übergehen, die einander berühren, und umgekehrt. Die "Geraden" und "Kugeln", von denen da die Rede ist, sind Figuren mit komplexen Koordinaten (∞^{24} Geraden und ∞^{24} Kugeln). Es handelt sich um eine imaginäre Transformation, und zwar ist dieses das berühmteste Beispiel einer "Berührungstransformation".

Nun ist freilich L i e's Formulierung von dem wirklichen Sachverhalt sehr verschieden [1]. Aber haltbar ist doch der zugrunde liegende Gedanke, und eine exakte Fassung, die zwar so verblüffend einfach nicht sein kann, wie die von L i e, aber doch keineswegs verwickelt ist, liegt vor [2]. Die einfachsten Figuren der projektiven Geometrie sind nun die Punkte und Ebenen - sie sind die Bausteine, aus denen alle anderen Figuren am leichtesten zusammengesetzt werden können. Eine vor allen Dingen zu beantwortende Frage ist also die nach den Bildern dieser Figuren im Kugelraume.

Nun wird man ja den besonderen Zielen eines Buches, das nicht gerade Algebraisches zum Hauptgegenstand hat, gerne einiges zugute halten. Wenn aber den Lesern als Antwort auf die eben genannte Frage lediglich die Angabe geboten wird, dass die Punkte und Ebenen in der Kugelgeometrie "kein reelles Analogon" haben, so ist das denn doch eine erschreckende Verstümmelung eines zentralen Bestandteiles der Theorie. Überhaupt bilden Analogien keinen Ersatz für präzise gefasste Aussagen.

---

1) J. B. d. D. M. V. Bd.XXV, 1916.

2) Aufsätze in den Mathematischen Annalen, Bände 86-91, 1922-1924, besonders Lehrsätze XXIII, XXVII, XXXI. Vereinfachte Begründung von L i e's Kugelgeometrie, Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom Jahre 1926.

Ein Grundmangel der besprochenen Stellung gewisser Mathematiker zum "Imaginären" ist, dass die Autoren sich einen wesentlichen Umstand nicht klar gemacht haben:

Reell und imaginär sind Relativbegriffe.

Wir sehen das sehr deutlich an der Theorie der Kontinuen II, IV und V. Die Zahlen $z = x + y\,i$ des Kontinuums IV sind komplex, also, wenn $y \neq 0$, imaginär, relativ zu denen des Kontinuums II. Aber x und y sind reell, und die Zahlen des Kontinuums V sind wiederum komplex, also in der Regel imaginär relativ zu denen des Kontinuums IV. Offenbar setzt sich diese Kette in einander eingeschalteter oder einander umfassender Kontinuen fort, ad indefinitum. Nun werden die meisten von uns (mich selbst eingeschlossen) keine Lust verspüren, alledem so viel Aufmerksamkeit zu schenken, wie sie die beiden ersten Schritte nach dem Dargelegten wohl verdienen. Die Menge der Figuren und mit ihnen die Schwierigkeiten steigen rasch. In summa: Was von manchen als "imaginär" einfach zur Seite geschoben wird, ist für eine fortgeschrittenere Betrachtungsweise wiederum reell, und in einigen Fällen wenigstens der Untersuchung würdig [1]. Die angeführten Sätze über konforme Abbildung hätten wir ohne doppelte Erweiterung unseres ursprünglichen Gebietes II nicht einmal formulieren können. Ein allgemein bekanntes Beispiel für den Nutzen, den die Erweiterung eines Forschungsgebietes durch Einführung "komplexer Punkte" bringen kann, ist übrigens auch die Theorie der Minimalflächen.

---

1) Siehe namentlich C. S e g r e, Un nuovo campo di ricerche geometriche, Atti della R. Accademia di Torino, t. 21, 1906. Ferner J. L. C o o l i d g e, The Geometry of the Complex Domain, 1924.

Offenbar lässt sich das Beispiel der Paare z_1 und z_r von reellen Punkten auf einer Kugelfläche, als Repräsentanten von "Imaginären" noch weiter ausgestalten. Nichts hindert uns ja, auch noch die geraden Verbindungsstücke solcher Punkte (Segmente) zu betrachten, die in das Innere der Kugel eindringen (nur abgesehen von den Paaren $z_1 = z_r$). Uneigentliche wie eigentliche konforme Zuordnungen von z_1 und z_r liefern dann gewisse sogenannte Liniencongruenzen 1), wie sie aus anederen Gesichtspunkten auch sonst schon der Betrachtung würdig gefunden worden sind. In diesen Beispielen handelt es sich nicht mehr um nur um Algebraisches, sondern auch um Infinitesimalgeometrie.

(3).

Was ist Geometrie?

Auf die mit alledem zusammenhängende Frage: Wie soll, innerhalb der Mathematik, das Geometrische umgrenzt werden? hatten wir noch keine bestimmte Antwort gegeben. (Jedenfalls ist z.B. das "Geometrie", wovon im Abschnitt XI die Rede war). Wie die Antwort zu lauten hat, kann indessen nicht zweifelhaft sein, wenn man die natürlichen Zahlen als Ausgangs- und Mittelpunkt aller Mathematik zugibt.

Geometrie ist Invariantentheorie von Transformationsgruppen.

Geläufige Beispiele sind: Die Geometrie der Bewegungsgruppe in Euklidischen und Nicht-Euklidischen Mannigfaltigkeiten, mit den durch Bewegungen (scorimenti, displacements) nicht zerstörenden Eigenschaften von Figuren; die projektive Geometrie, die zur Kollineationsgruppe in einem Raume R_n gehört, die Inversionsgeometrie, auch bei unbestimmter Dimensionenzahl, die Theorien gewisser Gruppen von Berührungstransformationen (L a g u e r r e'sche und L i e'sche Geometrie), alles im Reellen wie im Komplexen. Auch die geometrische Optik H a m i l t o n's (Strahlenoptik, nicht

---

1) Siehe Arbeiten Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie, J. B. d. D. M. V., Bd.11, 1902; 15, 1906.
Grenzfälle solcher Figuren, die ebenfalls reell sind, werden in meinem Buch Geometrie der Dynamen abgehandelt (1903).

Wellemoptik) gehört hierher.

Der Urheber des genannten Gedankens ist F. K l e i n. In seinem "Erlanger Programm" vom Jahre 1871 hat er ausgeführt, dass in das damalige Chaos von geometrischen Einzelheiten Licht und Ordnung gebracht werden kann, wenn man den Gruppenbegriff gehörig ausnutzt.

Es war das ein genialer Gedanke, denn es ist nicht jedem gegeben, in verwickelten Begriffskomplexen das Einfache und Grundlegende zu sehen, und demgemäss hat es auch an Anerkennung nicht gefehlt. Einen besonderen sachlichen Erfolg hat K l e i n gleichwohl nicht damit gehabt, und es wird sich kaum leugnen lassen, dass neben der unter Geometern verbreiteten Gleichgültigkeit gegen Methodisches auch sein eigenes Verhalten Ursache davon war. Er hatte den Ehrgeiz, die gesamte Mathematik umspannen zu wollen, wie es G a u s s noch gelungen war, und so hat er sich bald anderen Forschungen zugewendet. Ja er hat sich sogar gegenüber Tendenzen, die gerade er eigentlich hätte begrüssen müssen, ablehend verhalten [1].

Die nächste Folgerung aus dem Gesagten ist, dass zu jeder Gruppe ein Aequivalenzbegriff gehört,und dass aequivalente "Figuren" mit gleichen Worten und tunlichst gleich aussehenden Formeln zu beschreiben sind. Gerade davon aber, wie überhaupt von sytematischem Denken wollte K l e i n nichts wissen.

---

1) Das Wesentliche sei, dass man "invariant denkt", nicht dass man "invariant rechnet", so hiess es in den Vorlesungen über die Theorie des Kreisels, die K l e i n zusammen mit A. S o m m e r f e l d herausgegeben hat (I. 1897, S.68). Es zeigt sich darin die Ungeduld des nervösen Mannes. Indessen hat K l e i n, wie mir sein Freund und Mitarbeiter R. F r i c k e kürzlich mitgeteilt hat, es später doch bedauert, dass der jüngeren Generation die Invariantentheorie fremd geblieben ist.

Zu diesen Mängeln kommen noch andere, die in dem frühen Datum jener Schrift ihre Erklärung finden, vor allem das Fehlen eines präzisen Invariantenbegriffs. Hiervon soll im nächsten Abschnitt die Rede sein.

Was gewöhnlich Geometrie genannt wird (wie z.B. auch das in den Abschnitten XI und XII Vorgetragene) kann übrigens immer nur als ein Abschnitt aus dieser oder jener Invariantentheorie betrachtet werden. Dass im Algebraischen und in der Analysis die Wurzel von dem allem zu suchen ist, kommt zwar vielfach zum Ausdruck ("Algebraische Geometrie", "Differentialgeometrie"), tritt aber in anderen Untersuchungen ganz zurück. In Bezug auf die Beweismittel hatte ich schon Anlass, die Bemerkung zu machen, dass solche Bausteine vielfach so aussehen, als seien sie in jedem Falle aus einem entlegenen Steinbruch herausgeschleppt. Die heutigen Lehrbücher der "analytischen" Geometrie gehören meistens zu den allerschwächsten Leistungen. Autoren, die von Invarianten nichts wissen, muss der Beruf zur Abfassung solcher Werke, die keineswegs eine leichte Sache ist, abgesprochen werden. Auch gehört zur Konstruktion von Fundamenten Einsicht in den Plan des Gebäudes, das nach dem jeweiligen Stande der Wissenschaft darauf errichtet werden soll. Im Ganzen sind wir rückständig und noch immer da, wo vor vielen Jahren S a l m o n und O. H e s s e gestanden hatten. Die meisten Lehrbücher der analytischen Geometrie haben ihren Daseinsgrund wohl nicht in wissenschaftlichen Interessen ihrer Verfasser, sondern in Wünschen von geschäftstüchtigen Verlegern. Dasselbe gilt auch von gewissen Ausgaben mangelhafter Werke über Geometrie, bei denen der Name des Urhebers die erneute Veröffentlichung veranlasst zu haben scheint. Wohl könnte die Kritik die Autoren zwingen, nur Ausgereiftes zum

Vortrag zu bringen, aber eine solche Kritik haben wir eben nicht, oder sie wird in Konnivenz gegen den vorherrschenden schlechten Geschmack kurzweg zur Seite geschoben. Kritik gleitet von so manchem Autor ab wie Wasser von einem Entenrücken [1].

(4).

Wie ordnet sich die Geometrie der Alten in das geschilderte System ein?

Davon, dass die Griechen den Begriff Raum in ihrer Geometrie nicht benutzt haben, ist schon die Rede gewesen (S.00).

Sie haben, fast ausschliesslich, mit bestimmten Hilfsmitteln, nämlich mit Lineal und Zirkel gearbeitet. Das bedeutet, in unserer Sprache, dass sie höchstens quadratische Gleichungen aufzulösen hatten, und zwar nur solche, die reelle Wurzeln haben.

Nach einer im Wesentlichen schon von D e d e k i n d gemachten Bemerkung werden sich dann in einer Menge von Punkten, deren Koordinaten x, y, z eine der Formen

$$B_0 = A + \sqrt{B} \qquad (B > 0),$$

$$B_1 = A_1 + \sqrt{B_0} \qquad (B_0 > 0),$$

$$B_2 = A_2 + \sqrt{B_1} \qquad (B_1 > 0),$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

alle Konstruktionen von E u k l i d's System ausführen lassen.

---

1) In dem genannten Werke von B l a s c h k e und T h o m s e n geht trotz vielen Redens von Gruppen in methodischer Hinsicht alles kunterbunt durcheinander, ganz als ob es ein gruppentheoretisches Klassifikationsprinzip gar nicht gäbe. Es hatte freilich einen noch sehr viel schlimmeren Vorgänger. (Siehe in der auf Seite 00 zitierten Arbeit vom Jahre 1926, die auf den Seiten 361 - 362, 373, 380 enthaltenen Anmerkungen.)

Offenbar ist ein Mangel dieses Systems der Geometrie, dass zwischen linearen Konstruktionen und quadratischen, sowie Konstruktionen vierter Ordnung u.s.w., die sich mit den gegebenen Hilfsmitteln ausführen lassen, nicht systematisch unterschieden wird.

(5).

Konstruktionen in der Inversionsgeometrie.

In der projektiven Geometrie ist man längst zu der Einsicht gekommen, dass die "linearen Konstruktionen", das sind solche, die sich zeichnerisch mit dem Lineal allein ausführen lassen und bei analytischer Behandlung des Stoffs lediglich rationale Operationen verlangen, den natürlichen Mittelpunkt des Ganzen bilden. (P o n c e l e t, S t e i n e r, v. S t a u d t.) Gibt es nun in verwandten Theorien, etwa in der Kugelgeometrie von M ö b i u s und in der von L i e, nicht etwas Ähnliches und vielleicht nicht minder Einfaches? Und werden sich nicht auch in diesen Theorien Konstruktionsbereiche abgrenzen lassen, vergleichbar denen, die man erhält, wenn man in der projektiven Geometrie auch quadratische Konstruktionen und noch andere hinzunimmt?

Natürlich kann, dem Plane des vorliegenden Buches entsprechend hiervon nur einiges wenige zur Sprache kommen.

In der Theorie unserer Gruppe Γ_6, H_6 werden Konstruktionen, die den aufgestellten Forderungen entsprechen, kurz kovariante Konstruktionen durch die beiden folgenden Postulate bereichert:

I. Sind drei verschiedene Punkte gegeben, so ist die durch sie bestimmte Kreislinie bekannt.

II. Wenn von zwei nach I bekannten Kreislinien ein Schnittpunkt bekannt ist, so ist auch der andere Schnittpunkt bekannt.

"Bekannt-Sein" heisst natürlich, dass mit der Kreislinie (I) oder mit dem zweiten Schnittpunkt (II) wie mit etwas Gegebenem

weiteroperiert werden darf. Im Falle I heisst es aber nicht, dass jeder beliebige Punkt der Kreislinie in weiteren Konstruktionen erscheinen darf, wie es dem Zeichner wohl nahe liegen mag. Wir lassen einstweilen keine Konstruktionen zu, die bei rechnender Behandlung aus dem Bereiche der rationalen Operationen hinausführen (die Auflösung nicht-linearer Gleichungen verlangen). Dann ber haben wir zur Ermittlung weiterer Punkte der Kreislinie (I) nur das unter (II) angegebene Verfahren: Dieses liefert beliebig viele Punkte der Kreislinie (I). Sie alle gehören einer Punktmenge an, die zwar auf der Kreislinie (I) überall dicht ist, ihre Punkte aber keineswegs erschöpft. (Ebenso kennt man in der projektiven Geometrie nicht alle Punkte einer Geraden, die durch zwei ihrer Punkte bestimmt ist.)

Dies im Sinne behaltend, mögen wir von einer nach I bestimmten Kreislinie (in Ermangelung eines besseren Wortes) etwa sagen, sie sei "punktweise bekannt". Eine Kreislinie, die durch die zugehörige Inversion gegeben ist (und dann immer schon durch zwei Paare verschiedener Punkte dieser Inversion) ist dann nicht, oder doch nicht notwendig, punktweise bekannt.

Zum Beispiel kennt man, wenn nur G a u s s'sche Zahlen zugelassen werden, von der Kreislinie

$$z\,\bar{z} = 1 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = 1$$

beliebig viele mit Hilfe rationaler Zahlen t in der Form

$$z = x + y\,i = \frac{(1 - t^2) + 2\,t\,i}{1 + t^2} = \frac{1 + t\,i}{1 - t\,i}$$

darstellbare Punkte, und keine anderen. Dagegen kennt man von der durch die Inversion $z^*\bar{z} = 3$ gegebenen Kreislinie

$$x^2 + y^2 = 3$$

gar keinen Punkt. Es müsste dann nämlich die Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = 3\vartheta^2$$

durch teilesfremde natürliche Zahlen ξ, η, ϑ erfüllt werden

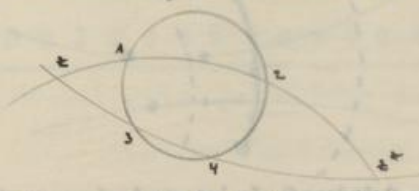
können. Dies erkennt man als unmöglich, wenn man die Reste vergleicht, die die beiden Seiten der letzten Gleichung für gerades und ungerades ϑ bei der Division mit 4 lassen.

Wird der natürliche Zahlenkörper durch $\sqrt{3}$ erweitert, so liegt die Sache wie im ersten Falle. Statt der Zahl 3 können wir (zum Beispiel) auch die Zahl 7 benutzen, und dann folgt noch, dass auch auf der Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 7$$

keine Punkte mit rationalen Koordinaten liegen. Dagegen lassen sich bei sphärischen Mannigfaltigkeiten in mehr als drei Dimensionen mit Hülfe des natürlichen Rationalitätsbereichs keine Beispiele derart bilden 1).

Ist eine Kreislinie durch drei ihrer Punkte gegeben, so kann man sich, nach Postulat II, einen vierten verschaffen. Die vier Punkte 1, 2, 3, 4 lassen sich dann auf drei Arten auf Paare verteilen, und jede dieser Verteilungen bestimmt eine Inversion, die beide Paare in Ruhe lässt, aber deren Punkte vertauscht (Fig. 7).



Diese drei Inversionen sind vertauschbar. Setzt man sie in irgend einer Folge zusammen, so nimmt schliesslich jeder der vier Punkte wieder seine ursprüngliche Lage ein. Also ist das Produkt der drei Inversionen, nach dem Fundamentalsatz (S.000), die Inversion, die zu der vorgeschriebenen Kreislinie gehört.

Satz 1. Ist eine Kreislinie punktweise bekannt, so lässt sich mit Hülfe der Konstruktionen I, II die zugehörige Inversion finden.

Hieraus folgt, dass man mit den gleichen Mitteln noch eine Reihe weiterer Aufgaben lösen kann. Namentlich diese beiden:

"Die Kreislinie zu finden, die durch einen gegebenen Punkt geht und einem vorgeschriebenen Büschel angehört" 2).

---

1) Satz von L a g r a n g e. E. L a n d a u, Vorlesungen über Zahlentheorie, I, 1927, S.109.
2) Es versteht sich, dass in trivialen Fällen (bei spezieller Lage



Im ersten Falle werden wir übrigens besser verlangen, die Kreislinie durch einen gegebenen Punkt zu finden, die bei zwei Inversionen (und dann bei allen des durch sie bestimmten "Büschels") in Ruhe bleibt [1]. Das Büschel kann auch durch zwei seiner Inversionen gegeben sein, die nicht zu Kreislinien gehören. Die Lösung ist evident.

Die Lösung der zweiten Aufgabe verlangt, nach Satz 1, die dreimalige Lösung der ersten, und zweimalige Konstruktion der Inversion zur punktweise gegebenen Kreislinie. (Siehe die Figur 8. Zwei Kreise des gegebenen Büschels sind punktiert gezeichnet, um anzudeuten, dass an ihrer statt auch zwei Inversionen ohne Kreislinie gegeben sein können.

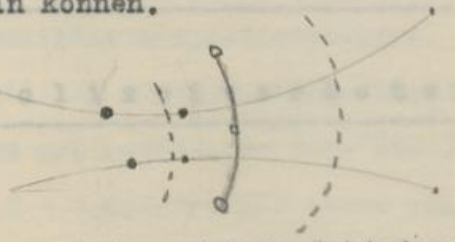


Fig. 8.

Einige Autoren haben viel Gewicht darauf gelegt, die Zahl der Hülfslinien bei geometrischen Konstruktionen möglichst klein zu halten. In unserem Falle ist sie schon ziemlich gross. Es kommt aber doch wohl viel mehr auf den algebraischen Charakter der Konstruktionen und auf ihre Kovarianz bei gegebener Gruppe an.)

---

des gegebenen Punktes) beide Aufgaben nicht gestellt werden können. Ich halte es für unnötig, die Formulierung mit dieser Selbstverständlichkeit zu beschweren.

1) Wir sagen von drei Inversionen, dass sie einem Büschel angehören, wenn zwischen ihren Koordinaten eine lineare Abhängigkeit

$$\lambda X_k + \mu Y_k + \nu Z_k = 0 \qquad (k = 0,1,2,3)$$

besteht.

I

Die Mathematik
der Gespensterfurcht
und der Polizeiverbote.

(Lerne klagen
ohne zu leiden!)

Schwebe, o Chor der Musen,
o schwebe vom Helikon nieder,
Lehre zu singen mich
und lächle dem streitbaren Liede,
Das mit ernstem Bemühen
und mehrere Thränen vergiessend
Ich zu vollenden gewillt bin!
Es schildre die wogende Feldschlacht,
Die aus irrigem Grund
verderbenbringend entflammt ist,
Weithindröhnenden Lärm
und spottende Reden der Krieger:
Wie die Mäuse den Fröschen
erbitterte Fehde entboten,
Wie die Frösche sodann
voll Ingrimm die Mäuse bekämpften,
Sämtlich Helden fürwahr;
doch alles leider um gar nichts. -
Dieses künde mein Lied
und klag' es noch späten Geschlechtern.

XV.

Der mathematische Intuitionismus
(B r o u w e r und W e y l).

Im ersten Teil unserer Untersuchung ist der philosophische Intuitionismus im Wesentlichen durch das Fehlen einer wichtigen Eigenschaft der Produktion gekennzeichnet worden. "Intuitiv", nämlich durch ein Erschauen, entstehen vielleicht alle wissenschaftlichen Einsichten, nicht minder aber auch Irrtümer. Ob das Erschaute die Bedeutung einer Erkenntnis hat, ist zunächst fraglich. Die Eigenheit des "Wesensschauens", des philosophischen Intuitionismus, besteht nun darin, dass das, was noch hinzukommen muss und die eigentliche wissenschaftliche Arbeit darstellt, unterbleibt, ja zuweilen ganz offen als überflüssig, wo nicht schädlich hingestellt wird (B e r g s o n).

In diesem Wortsinn sind so manches mal auch Mathematiker Intuitionisten gewesen. Sie sind es immer dann gewesen, wenn sie Denlücken (nicht blosse Darstellungslücken) gelassen und ihre Leser in die Irre geführt haben; wie es bei älteren Analytikern oft genug vorgekommen und bei Geometern auch heute noch nicht selten ist. Die aber, als Mathematiker, sich selbst Intuitionisten nennen, meinen das natürlich nicht. Sie wollen ja die Mathematik von allerlei Schlacken reinigen, die sie in ihrer Begründung gefunden zu haben glauben. Ihre Verwandtschaft mit den philosophischen Intuitionisten scheint mir hauptsächlich darin zu liegen, dass sie beide von psychologischen Thesen ausgehen und überall die Geltung von Aussagen abhängig sein lassen von der Art ihres Zustandekommens in der menschlichen Psyche, bei ihnen im der eines Mathematikers.

XV.

Der mathematische Intuitionismus

(B r o u w e r und W e y l).

Im ersten Teil unserer Untersuchung ist der philosophische Intuitionismus im Wesentlichen durch das Fehlen einer wichtigen Eigenschaft der Produktion gekennzeichnet worden. "Intuitiv", nämlich durch ein Erschauen, entstehen vielleicht alle wissenschaftlichen Dimensionen, nicht minder aber auch Irrtümer. Ob das Erschaute die Bedeutung einer Erkenntnis hat, ist zunächst fraglich. Die Eigenheit der "Wesenserkenntnis", der philosophischen Intuitionismus, besteht nun darin, dass das, was noch hinzukommen muss und die eigentliche wissenschaftliche Arbeit darstellt, unterbleibt, ja zuweilen ganz offen als überflüssig; wird nicht nachdrücklich hingestellt wird (B e r g s o n).

In diesem Vorhaben sind so manches mal auch Mathematiker Intuitionisten gewesen. Sie sind es immer dann gewesen, wenn sie Denkoken (nicht blosse Berechnungsfolgen) gelassen und ihre Leser in die Irre geführt haben; wie es bei älteren Analytikern oft genug vorgekommen und bei Geometern auch heute noch nicht selten ist. Die aber, die Mathematiker, sich selbst Intuitionisten nennen, meinen das natürlich nicht. Sie wollen ja die Mathematik von allerlei Schlacken reinigen, die sie in ihrer Begründung gefunden zu haben glauben. Ihre Verwandtschaft mit den philosophischen Intuitionisten scheint mir hauptsächlich darin zu liegen, dass sie beide von psychologischen Theorien ausgehen und überall die Geltung von Aussagen abhängig sein lassen von der Art ihres Zustandekommens in der menschlichen Psyche, bei ihnen wie der eines Mathematikers.

Mit diesen ~~Forderern~~ Forschern, die übrigens gar nicht erklärt haben, was für einen Begriff sie mit ihrem Namen verbunden wissen wollen[1], werden wir uns nunmehr eingehender beschäftigen, in der Hauptsache jedoch unter Beschränkung auf die anerkannten Häupter ihrer Schule, die Herren L. E. T. B r o u w e r und H. W e y l. Es ist nämlich ganz zwecklos, die gesamte Literatur dieser Schule unter die Lupe zu nehmen. Sie ist voll von Wiederholungen und geringfügigen Variationen des gleichen Themas.

Vor allem wird nachzuweisen sein, dass wir es überall mit Psychologismen zu tun haben. Man wird manches ganz Erstaunliche finden. Die extremsten Irrungen sind aber, wie ein berühmter Kriminalist gesagt hat, die lehrreichsten. (A. F e u e r b a c h in seiner Geschichte merkwürdiger Verbrecher.) In ihnen tritt nämlich ein Übel, das meistens nur termitenhaft unter der Erde schleicht, für alle erkennbar an's Tageslicht.

Das was ~~von~~ nach der von mir vertretenen Lehrmeinung Ausgangspunkt und Gegenstand aller Mathematik ist, die natürlichen Zahlen, betrachten auch die genannten ~~Forscher~~ Forscher nicht anders. Für sie ist es jedoch "intuitiv" gesichert, womit, wenn ich recht verstehe, auf einen besonderen Akt geistigen "~~Sehens~~ Schauens" verwiesen wird. Ausserdem sprechen sie von einer mathematischen Urintuition, womit sie die vollständige ~~Indehrion~~ Induktion meinen.

Es scheint mir nun zwar besser, zu sagen, dass wir keine Zahlen in unserem Sinne ~~haben~~ haben, und dass auch der Schluss von n auf n + 1 mit Akten des Schauens nichts zu tun hat. Doch will ich darüber mit Niemanden rechten. Ist man sonst einig, so kommt auf

---

1) Siehe jedoch Abschnitt XX (Äusserungen von B r o u w e r).

philosophische Meinungsverschiedenheiten, dieser Art wenigstens, wohl nicht viel an. Aber Kritik muss einsetzen, sobald Vorschriften gemacht und Verbote erlassen werden, deren Begründung sich bei näherem Zusehen als fadenscheinig erweist. Es handelt sich dabei um die Grenzübergänge der Analysis, um in's Unendliche verlaufende Prozesse, deren "Erschaubarkeit" von den intuitionistischen Mathematikern teils behauptet, teils geleugnet wird, ohne dass klar zu erkennen wäre, warum sie in einem Falle so und im andern anders urteilen.

Zugelassen in das intuitionistische Heiligtum wird der Inbegriff (die Menge) aller natürlichen Zahlen. Ein unendlicher Dezimalbruch oder Kettenbruch dagegen findet höchstens dann Gnade, wenn er durch ein Bildungsgesetz gegeben ist, wie e oder $\sqrt[\pi]{\pi}$ oder $\sqrt{2}$.

Niemand kann unendlich oft, mit freier Wahl bei jedem Schritt, eine der Zahlen 0..... 9 hinschreiben. Das ist ein Hauptargument. Es kennzeichnet den mathematischen Intuitionismus bereits als eine Unterart des Psychologismus. Von aller Wissenschaft ausgeschlossen, als "sinnlos", "unsinnig" gebrandmarkt, wird demnach der Begriff des natürlichen Kontinuums und somit der Begriff ~~eines~~ Kontinuum überhaupt: Die Kontinuen sind alle Zusammenfassungen von Zahlen, die es (für den Intuitionisten, wie er meint) gar nicht gibt.

Mir will scheinen, dass menschliches Schauen weder die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen noch die genannte Art von Dezimalbrüchen erfassen kann, dass es darauf aber auch gar nicht ankommt. Wenn die natürlichen Zahlen die Art von Existenz haben, die ihnen von den griechischen Mathematikern ~~vor~~zugeschrieben worden

Drucksache.

Herrn

Professor Dr. Engel

Giessen

Ludwigsplatz 9 p

P. P.

Wir gestatten uns, Sie zu einer Morgenfeier für Sonntag, den 31. Mai vormittags 10 Uhr im neuen Studentenheim ergebenst einzuladen.

Der Grosstempler des Deutschen Guttempler-Ordens, Herr Prof. Reinh. S t r e c k e r Berlin, wird bei dieser Gelegenheit sprechen.

Wir würden uns freuen, Sie bei dieser Ver„ anstaltung begrüssen zu können.

Mit vorzüglicher Hochachtung!

Deutscher Guttempler-Orden
Loge „Hassia" Giessen

Seibert

Giessen, den 28. Mai 1931. H.T.

ist, wenn sie also an sich existieren, unabhängig von allem Menschlichen, dann haben wir uns mit solchen Unmöglichkeiten abzufinden. Was sollte aus der Naturforschung werden, wenn unsere Fassungskraft über die Existenz von Naturgegenständen zu entscheiden hätte!

Zugrunde liegen dem mathematischen Intuitionismus, der durch und durch idealistisch, anthropozentrisch ist, auch noch die schon abgelehnten Schöpfungsgedanken.

Zur Bestätigung führe ich einige Stellen an.

Nach B r o u w e r (1913, S.86) kann der Mathematiker zwei Prozesse "to create (sic!) a finite ordinal number" und "to create the infinite ordinal number ω. "[1] eine endliche Zahl von malen hinter einander anwenden, und dadurch weitere Zahlengebilde erzeugen.

Offenbar fehlt Konsequenz. Warum soll ~~ω~~ gebildet werden dürfen und ~~ω^2~~ nicht? Ferner ist (ebenda, S.88) sinnlos - "Meaningless" - "the set whose elements are the points of (one - dimensional, two - dimensional etc.) space".

Auch W e y l erkennt, wie gesagt, als Ausgangspunkt der Mathematik die Reihe der natürlichen Zahlen an. Nach ihm aber sind sie nicht schon vorhanden (1927, S.31), sondern sie werden erzeugt durch ein"Gesetz ω" (wieso ω?), das aus dem Nichts die erste Zahl 1 und aus "jeder" ~~über~~ schon ~~n~~ entstandenen Zahl die nächstfolgende entstehen lässt. (1925, S.23). Auch hier sind wir also mitten im Psychologismus. Außerdem wird noch das Nichts mit der Null verwechselt (vgl.S...) und die Null ohne weiteres mit den natürlichen Zahlen zusammengestellt, was in einer Philosophie der

---

1) Die hier den Ordnungszahlen angegliederte Zusammenfassung (Menge) der natürlichen Zahlen.

Mathematik denn doch wohl nicht angeht. Ferner lesen wir bei demselben Autor: Auf jeden Fall ... ist es unsinnig, das Kontinuum als ein Fertig Seiendes zu betrachten (1921, S.73).

Wirklich unsinnig (Lieblingswort von W e y l) ist es, wenn auch vielfach üblich, von dem Kontinuum zu sprechen, als ob da gar keine Unterschiede existierten.

Worte wie sinnlos oder unsinnig verweisen bei B r o u w e r und W e y l auf einen Galimatias. Zu diesem Begriff hat der zweite Autor ein interessantes Beispiel geliefert:

> "Das Koordinatensystem ist das unvermeidliche Residuum der Ich-Vernichtung in jener geometrisch-physikalischen Welt, welche die Vernunft aus dem Gegebenen unter der Norm der "Objektivität" herausschält,- letztes dürftiges Wahrzeichen noch in dieser objektiven Sphäre dafür, dass Dasein nur gegeben ist und gegeben sein kann als intentionaler Inhalt der Bewusstseinserlebnisse eines reinen sinngebenden Ich".

Dieser Phrasenschwall stammt fast ganz aus der Philosophie von H u s s e r l (vielleicht auch ganz, ich weiß das nicht so genau).

An einer andern Stelle redet unser Philosoph von einer "Durchdringung" von Sein und Wesen (dem "dies" und dem "so"), und ~~von~~ einer dritten heißt es:

> "Wenn ich die phänomenale Erkenntnis als Wissen bezeichne, so ruht die theoretische auf dem Glauben (?!) - dem Glauben an die Realität (!) des eigenen und fremden Ich oder (!) die Realität der Aussenwelt oder (!!) die Realität Gottes."[1]

Bemerkt sei noch, dass die Intuition bei W e y l (wie bei H u s s e r l) auch öfter Anschauung genannt wird - was dann gelegentlich auch Raumvorstellung bedeutet - und dass sie bei ihm ausserdem noch die Namen anschauende Einsicht, anschauliche Evidenz und völlig durchleuchtete Evidenz führt.

Doch fahren wir in unserer Hauptbetrachtung fort!

Ob in der Mathematik (warum nur in dieser?) etwas sinnvoll ist, muss nach dem Gesagten davon abhängen, ob die Intuitionisten (die sich von anderen Menschen ziemlich unterscheiden) im Stande zu sein glauben, es intuitiv zu erfassen oder zum mindesten es aus so Gefasstem zu deduzieren.

---

1) H. W e y l, Das Kontinuum, 1918, S.72. Mathematische Zeitschrift, Bd.10, 1921, S.58. Bd.20, 1924, S.149. Den mathematischen Inhalt seiner Kontinuumschrift hat W e y l aufgegeben. Seine Philosophie, oder was er so nennt, ist jedoch dieselbe geblieben.

Wie oft hat aber nicht eine ebenfalls so genannte Intuition gerade auch Mathematiker in die Irre geführt! Man denke etwa an die stetigen Funktionen, die alle differentiierbar sein sollten; oder an die vielen intuitiv erkannten Sätze der neueren Geometrie, die sich als falsch herausgestellt haben! Freilich ist nach W e y l ~~aber~~ die Wahrheit etwas Lebendiges (S.40). Was heute wahr ist, braucht es morgen nicht mehr zu sein, wie im Pragmatismus.

"Niemals wird es gelingen, die Wahrheit endgültig in die Form eines toten Seins ... zu begraben."

(Raumproblem, S.47.)

Der Wahrheitsbegriff, und mit ihm aller wissenschaftliche Ernst, wird also von unserem Autor umgebracht und in aller Form begraben.

Richtig ist natürlich, dass der Ausgangspunkt einer jeden Art von Forschung etwas sein muss, von dem man aus irgendeinem Grunde annimmt, dass es gesichert oder wenigstens möglicher Weise zutreffend ist. Dieser Grund mag Intuition oder intellektuelle Anschauung oder logische Evidenz oder sonstwie heißen. Er kann auch hypothetisch sein. [1] Wie er aber auch beschaffen sein mag: In keinem Falle hat man eine Bedingung für sinnvoll oder nicht!

Das größte Ärgerniss ist den Intuitionisten der Begriff des natürlichen Kontinuums. Dieser aber ist unzweifelhaft.

D e r G r u n d s t e i n d e r A n a l y s i s .

Es wäre daher interessant zu wissen, wie sich die Intuitionisten dazu stellen, dass wir in der Natur überall Gegenstücke zum mathematischen Begriff eines Kontinuums zu finden meinen.

---

1) Siehe R.W.S. 17, 18. Hypothetisch ist der Ausgangspunkt jeder Art von Axiomatik. Unsere Theologen nehmen (mindestens!) die Existenz eines Gottes als gesichert an.

Alle Gegenstände der Physik, insbesondere die festen Körper, sind eingespannt in Raum und Zeit, und diese, auch die Kraftfelder der Physiker, scheinen eine mathematische Struktur zu haben.

Die Kontinuen der Physik, zu denen vor allem Raum und Zeit gehören, allein oder in Verbindung, hatten nun, wie gesagt, in der seitherigen Mathematik Gegenstücke in verschiedenerlei mathematischen Kontinuen, die überall (auch in der von W e y l vertretenen sogenannten Relativitätstheorie) benutzt worden sind. Werden diese Begriffsbildungen hinfällig - <u>was wird dann aus der theoretischen Physik</u>? Dem menschlichen Verstand wird ja nun die Fähigkeit abgesprochen, der Natur durch ein Zuordnungsverfahren gerade in dieser Hinsicht zu folgen!

Ich wünsche nicht missverstanden zu werden. So weit als nur möglich bin ich entfernt von der Meinung, dass alles, was da ist, in unsere Köpfe hineingehen müsste. Aber die Kontinuen der Physik sind uns ja durch Sinneswahrnehmungen gegeben, wenn auch der naive Mensch den Begriff Kontinuum gewiss nicht bilden wird.[1] Das muss also eine wenig leistungsfähige Wissenschaft sein, die diesem Sachverhalt ratlos gegenüber steht - so scheint es wenigstens.

Die Intuitionisten freilich haben sich über diese Schwierigkeit, die zum mindesten für andere doch wohl da ist, den Kopf nicht zerbrochen. Von B r o u w e r wird diese Frage gar nicht berührt. Bei W e y l aber wird in dem zitierten Artikel über das, was er bescheiden "Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft" nennt, der Knoten einfach durchhauen. <u>Die Unsinnigkeit des üblichen mathematischen Kontinuumbegriffs hindert W e y l nicht im mindesten, sich seiner ausgiebig zu bedienen!!</u>

---

1) In manchen Sprachen soll es gar keine Wörter für Abstracta geben.

Unklar ist, wie nach dem Gesagten nicht anders zu erwarten, die Stellung der mathematischen Intuitionisten zum Erkenntnisproblem.

Nach W e y l ist die Erkenntnis des Mathematischen aprioriscber Natur (1927, S.52). Aber er scheint doch gegen eine Verschmelzung der Mathematik und der Physik keine ernstlichen Einwendungen zu haben (1925, S.31). Auch von B r o u w e r sollte man annehmen, dass er das Erkennen des Mathematischen für aprioriscb ansieht, da er sich auf Kant beruft. Dies würde aber ein Irrtum sein. Er hält, man glaubt es kaum, die Logik, die er gar noch "auf Mathematik gründen"will, darum für aposteriorisch, weil logisches Denken sich bei dem Individuum im Verkehr mit der äusseren Welt entwickelt. (1925, S.2). Er verwechselt also die Genesis des Logischen mit der Frage nach seiner Geltung.

Diese Begriffsverwirrung scheint noch gar keinen Anstoss erregt zu haben. Der Durchschnittskritiker bemerkt solche Vermeintliche Kleinigkeiten entweder überhaupt nicht, oder er hält es für eine heilige Pflicht, den Mantel der Liebe darüber zu decken. Wir werden dieses taktvollen Schweigens noch mehr kennen lernen.

Der Hauptstein des Anstosses ist für die Intuitionisten, wie aus dem Gesagten hervorgeht, der Begriff eines fertigen, vollendeten Unendlichen, merkwürdigerweise allerdings nur zum Teil.

An dieser Art des Unendlichen, deren Gegenstück der Grenzübergang, das "werdende" Unendliche ist, haben auch schon andere Anstoss genommen, und diese haben sich öfter, mit einem Anschein von Recht, auf die Autorität von G a u s s berufen. A. F r a e n k e l, der das genannte Bedenken nicht teilt, führt, wohl um die

große Leistung C a n t o r's in's Licht zu setzen, gleich auf der ersten Seite seines Werkes über Mengenlehre den Ausspruch an:

....."so protestiere ich ... gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist".

Danach scheint also G a u s s von einem horror infiniti besessen gewesen zu sein, und das ist wirklich die Meinung von F r a e n k e l. Zuzugeben ist jedoch wohl nur, dass G a u s s sich gegenüber seinen Korrespondenten etwas unvorsichtig ausgedrückt hat. Liest man die Stelle in dem Zusammenhang, in dem sie steht, so sieht sie anders aus [1]. Es sollte eine unzulässige Art des Grenzübergangs abgelehnt werden. Wie konnte doch G a u s s das vollendete Unendliche verwerfen, da er es in Gestalt des kontinuierlichen Wertevorrats der unabhängigen Veränderlichen überall in seinen Voraussetzungen hatte! Es handelt sich also um ein Mißverständnis. Ausserdem darf man fragen, was für Einwendungen G a u s s wohl gegen die heute allgemein übliche Verwendung des Unendlichen - als eines Vollendeten - im Zusammenhang der Theorie der linearen Transformationen:

$$z^* = \frac{az+b}{cz+d}$$

hätte haben können?

In summa: Es ist ganz gleichgültig, dass wir nicht sämtliche irrationalen Zahlen oder auch nur eine einzige wirklich bilden

---

1) F. E n g e l und P. S t ö c k e l, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf G a u s s. 1895, S.232, 233.

können, dass wir also zu den mathematischen Kontinuen nicht so stehen, wie etwa zu den Zahlen 1, 2, 3. Der Sinn der Analysis wird dadurch ebenso wenig in Frage gestellt wie der Sinn der astrophysikalischen Forschung durch die Tatsache, dass wir nicht in das Innere der Gestirne einzudringen vermögen. Worauf es ankommt, ist lediglich, dass wir uns nicht mit blossen Phantasiegebilden herumschlagen, solchen, die, gleich geflügelten Pferden, nur eine Existenz "im Geiste " haben. Die Legitimität der irrationalen Zahlen und also auch die eines vollendeten Unendlichen und des davon abhängigen Kontinuumbegriffs scheint aber in völlig einwandfreier Weise bewiesen zu sein.

Merkwürdig genug ist, wie B r o u w e r und We y l ihre gegenteilige Behauptung von der "Unsinnigkeit" dieser Begriffsbildungen zu begründen versuchen. Namentlich hat W e y l in der Bweisführung D e d e k i n d's einen

Circulus vitiosus

entdeckt.

Wer bei ihm diese Überschrift liest (1921, S.40), muss natürlich erwarten, dass die beanstandete Argumentation geprüft und dass genau die Stelle nachgewiesen wird, wo der angebliche Zirkelschluss sitzen soll. Diese Verpflichtung, so selbstverständlich sie ist, hat er indessen nicht gefühlt. Es wird nur ein allgemeines Gerede vorgebracht, von Eigenschaften, Eigenschaften von Eigenschaften, allen möglichen Eigenschaften. E. EA und K-Eigenschaften. Ich nenne das, den Lesern Sand-in-die-Augen-streuen.

Ausserdem findet sich gleich zu Anfang dieser verworrenen Argumentation ein arges Mißverständnis. Die Schnitte D e d e k i n d s brauchen nicht sämtlich "gegeben" zu sein, sondern nur zu existieren (Wegen W e y l s Polemik gegen alle Existential-

sätze siehe Abschnitt XIX).

Aber auch das ist noch nicht das Schlimmste. Es fehlt auch nicht an einer groben Entstellung, die allerdings erst an späterer Stelle (S.46) vorkommt:

> Die heute anerkannte Analysis ... entlehnte der Anschauung des (!) Kontinuums die Überzeugung von der "Existenz an sich" aller reellen Zahlen.

Hätte Herr W e y l sich die Mühe gemacht, die von ihm kritisierten Schriften zu lesen, so würde er gefunden haben, dass D e d e k i n d gegen die ihm hiermit untergeschobene Erschleichung ausdrücklich polemisiert, und dass bei C a n t o r, M é r a y und W e i e r s t r a s s von ~~Anordnung~~ Anschauung gar nicht die Rede ist. Ausserdem hätte W. sich in zahlreichen späteren Werken über Analysis unterrichten können (U. D i n i, P e a n o, M. P a s c h, C. J o r d a n, E. G o u r s a t, A. P r i n g s h e i m, G. K o w a l e w s k i, v. M a n g o l d t, K. K n o p p).

Ich sehe mich ausser Stande zu verstehen, wie Herr F r a e n k e l, der mehrere umfangreiche Referate über den mathematischen Intuitionismus verfasst hat (eines noch 1928 in der dritten Auflage seiner Mengenlehre) einem Mathematiker, dem so etwas möglich ist, besondere Sorgfalt nachrühmen mag. Überhaupt vermisse ich in dem Buche F r a e n k e l's, den Intuitionisten gegenüber, Kritik immer da, wo sie am meisten nötig ist. Auch darin vermag ich ihm nicht zuzustimmen, dass er in der zweiten Hälfte seines Buches das als fraglich hinstellt und teilweise zurücknimmt, was er in der ersten vorgetragen hat. Eine solche Darstellungsform selbst unsichertster Urteile kann nicht als zulässig betrachtet werden. Immerhin wird der Anfang auch seines zweiten Teiles (§ 13 und § 14) noch zur Orientierung empfohlen werden können. Über den Rest schweigt des Sängers Höflichkeit. Er geht uns zum Glück ~~größten~~ großenteils hier nichts an.

Ganz anders als W e y l argumentiert B r o u w e r. Hiervon wird in einem besonderen Abschnitt (XVIII) gehandelt werden.

XVI.

Das werdende Kontinuum und andere Entgleisungen.

Integer vitae
Scelerisque purus
Non eget Mauris
Jaculis nec arcu.

Aber ist denn möglich, dass die mathematischen Intuitionisten in ihrem Zerstörungsfanatismus so weit gehen, einen Grundbegriff wie den des natürlichen Kontinuums ohne irgendeinen Ersatz aus der Mathematik verbannen zu wollen?

Ganz so liegt die Sache in der Tat nicht.

Der Ersatzbegriff führt den Namen Kontinuum als Medium freien Werdens. Er ist nach W e y l, der immer den Mund sehr voll nimmt, eine Entdeckung "von der größten erkenntnistheoretischen Tragweite" (1921, S.50; 1925, S.18).

"Durch freie Wahlakte" "wird" eine Folge (natürlicher Zahlen, etwa der Stellen eines Dezimal- oder Dualbruchs), und der Inbegriff dieser Folgen, der nur als werdend betrachtet werden darf, liefert "das" Kontinuum, in das zwar auch die einzelnen (rationalen oder durch Gesetze definierten) reellen Zahlen hineinfallen, das sich aber keineswegs in eine Menge fertigseiender reellen Zahlen auflöst (auflöst?). Die Zahlen dieses Kontinuums sind nicht, sondern sie werden (abgesehen von den rationalen), insbesondere durch Einschachtelung einander umfassender Intervalle, deren Breite gegen Null konvergiert. (W e y l, 1921, S.50; 1925 S.21, wo es sogar heisst, dass die (allgemeinen) reellen Zahlen durch solche Intervallfolgen definiert werden müssen!)

Was sollen wir nun dazu sagen? Genau so, durch das Schachtelungsverfahren, hat man die irrationalen Zahlen ja sonst schon

---

1) H. W e y l, Mathematische Analyse des Raumproblems, 1923, S.47,48.

definiert. (G. C a n t o r, H e i n e und andere). Im praktischen Rechnen hatte man dasselbe Verfahren schon lange vorher angewendet (Zahl π, Archimedes; angenäherte Quadratur, z.B. G a u s s). Und hatte man nicht längst eine Theorie des Rechnens mit Dezimalbrüchen u.s.w., bei den die einzelnen Stellenzahlen unbestimmt gelassen wurden?

Ist es nötig, da von einer Wahl, also von einem psychischen Prozess zu reden?

Der vermeintliche Fehler der älteren Mathematiker bestand lediglich darin, dass sie von Dingen sprachen, die nicht greifbar sind, nämlich von den Ergebnissen ihrer Grenzübergänge. Aber sind etwa "beliebig-grosse" rationale Zahlen greifbar, deren Begriff auch B r o u w e r und W e y l nicht entbehren können? Wo bleibt da die Konsequenz? Und ist die Greifbarkeit, Vorstellbarkeit durch die menschliche Psyche ein Existenzkriterium?

Mir scheint, dass ein vollendetes Unendliches, gegen das sich ja diese ganze Polemik im Grunde richtet, nichts anderes ist als eine abkürzende Ausdrucksform für einen ziemlich verwickelten Sachverhalt. Ganz so, wie zum Beispiel eine negative Zahl auch nichts anderes ist (Abschnitte VIII, X). Warum sollen wir uns solcher Redeweisen, die unzählige Umständlichkeiten ersparen, nicht bedienen dürfen? Kommt nicht aller Fortschritt in der Mathematik dadurch zustande, dass es zuweilen gelingt, im Verwickelten wiederum ein Einfaches zu sehen, das als Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen dienen kann, dann aber, wenn es dazu brauchbar bleiben soll, nicht immer wieder in seine Bestandteile zerlegt werden darf?

Worin besteht also der von B r o u w e r bemerkte angeblich ungeheure Fortschritt? Darin, dass das Rad der Zeit rückwärts

gedreht, ~~dass~~ glücklich Erreichtes wieder aufgegeben wird, nur weil es zur psychologistischen Grundstimmung nicht passt. Die ganze Mathematik soll in einen ungeheuren Psychologismus verwandelt werden! Eine Aufsichtsbehörde, bestehend aus den Herren B r o u w e r und W e y l, hat darüber zu wachen, dass Rückfälle in den "Existenzialabsolutismus" nicht vorkommen. Ein solcher Rückfall liegt aber bereits in der Zulassung des Inbegriffs aller natürlichen Zahlen - dass dieser Inbegriff nicht vorstellbar ist, stört den ~~xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx~~ Intuitionisten weiter nicht!

Das Werden des nie vollendeten, immer nur "entstehenden" Kontinuums aber verläuft in der Zeit, die mit der Mathematik ein für-alle-mal nichts zu tun hat. Wenigstens vermag ich nicht zu sehen, wie Psychologisten gleich B r o u w e r und W e y l sich den Sachverhalt, von dem sie reden, anders denken könnten [1]. Auch hat dieses "werdende" Kontinuum eine sehr bedenkliche Verwandtschaft mit der sogenannten Approximationsmathematik [2]. Der B r o u w e r'sche Kontinuumbegriff soll nämlich besonders "anschaulich" sein. Übrigens bezweifle ich das.

---

1) Ähnlich F r a e n k e l, 1927, S.240. Bei A. B e c k e r, einem philosophischen Intuitionisten, tritt die angebliche Abhängigkeit der Mathematik von der Zeit noch viel deutlicher hervor.

Unendliche Prozesse beanspruchen zu ihrer Vollendung eine unendlich lange Zeit. Aber wann und wo fangen diese Zeitläufe an? Bei jedem einzelnen Mathematiker, der auf sie verweist?

2) Vgl. S.00, und W e y l 1921, S.79, F r a e n k e l 1927, S. 240,241. Tatsächlich verweist H j e l m s l e v nicht nur auf K l e i n, sondern auch auf B r o u w e r und W e y l, als Urheber von Gedanken, die den seinigen verwandt sind.

Zu alledem kommt schließlich noch eine unglückliche Terminologie.

Das werdende Kontinuum ist eine contradictio in adjecto. So lange es "wird", ist es noch kein Kontinuum, und wenn es geworden ist, (was der Intuitionist nicht zulässt), wird es nicht mehr.

In diesem Falle gibt es allerdings einen mildernden Umstand. Vom "werdenden Unendlichen", einen Ausdruck, den auch ich brauche, weil er nun leider einmal üblich geworden ist, gilt ja dasselbe. Es ist zu unterscheiden zwischen Grenzübergängen und ihren Ergebnissen. Ist das Ergebnis die un*-eigentliche Zahl ∞ , so hat diese immer die Bedeutung eines "fertigen" Unendlichen; wobei auch noch das Wort fertig irreleitend ist, weil es auf das sinnlose Werden eines Unendlichen verweist.

Nachdem wir nun gesehen haben, dass der mathematische Intuitionist den Begriff Kontinuum erst schroff ablehnt und dann unter Einmischung ungehöriger Vorstellungen (Wahl, Zeit) und unter absurdem Namen wieder einführt, dürfen wir uns bei der weiteren Betrachtung von W e y l s Arbeit (der vom Jahre 1921) - in der ich nicht einen gesunden Gedanken habe finden können - wohl kürzer fassen.

S.39. Wer W e y l s Ansicht von der kläglichen Beschaffenheit der heutigen Analysis nicht teilt, dem fehlt es an ernster und ehrlicher Besinnung. Seine Meinung gehört zu jener Art von halb-bis dreiviertel ehrlichen Selbsttäuschungsversuchen, denen man im politischen und philosophischen Denken so oft begegnet. [1]

S.42. Die "ganz neue Idee" des Existierens tritt auf. Vorher war nur von einem Wesen(!) die Rede. (Vgl. S.00)

S.46, 47. Fließender Brei des Kontinuums, kontinuierliche Raumsauce.

S.51. Die moderne Kritik der (älteren) Analysis mündet in Chaos und L sinn.

S.54. Nur das "Hinblicken" auf das Wesen (!) ~~Zahl~~ Zahl kann mir allgemeine Urteile über Zahlen liefern.

---

1) Natürlich nicht bei W e y l, der gelegentlich nicht versäumt, seine eigene Ehrlichkeit hervorzuheben.

S.56. B r o u w e r - das ist die Revolution! (La propriété - c'est le vol! Vgl. N e t t o über K r o n e c k e r, $.244).

S.67. Ein Prachtstück: Die "Behauptung", dass 1 die kleinste auf 0 folgende Kardinalzahl ist, muss als grundlos zurückgewiesen werden. Anscheinend hat W e y l einen ihm eigentümlichen Begriff der"Kardinalzahl". Aber welchen?

S.70. "Wir" müssen Bescheidenheit lernen. (Es ist sicher bescheiden, wenn man in solchem Falle andere einschließt.)

S.73. Ein wahrhaftes Kontinuum ..... kann nicht in getrennte Bruchstücke aufgeteilt werden 1). (Kursiv gedruckt!) Das widerstrebt nämlich reinem "Wesen". Es ist zum Beispiel nicht richtig, dass eine reelle Zahl < 0 oder $= 0$ oder > 0 sein muss. (Vgl. Abschnitt XVIII). Wer unvernünftigerweise daran festhält, leidet an den "atomistischen Denkgewohnheiten", an denen W e y l selbst vorher gelitten hatte.

S.77. Gleichwohl gehört es zum"Wesen" des Kontinuums, dass es Teile hat, und dass jeder seiner Teile sich unbegrenzt weiter teilen lässt. Wie diese These sich mit der vorhergehenden vereinigen lässt, ist Geheimnis des Herrn W e y l.

S.76. In einem Kontinuum kann es nur stetige Funktionen geben. (Auch nicht übel!)

S.78. Indessen ist der Begriff der stetigen Mannigfaltigkeit mathematisch unfruchtbar geblieben. Was wohl B. R i e m a n n, dessen berühmte Habilitationsschrift gerade Herr W e y l erläutert hat, dazu gesagt haben würde?

S.79. Die B r o u w e r'sche Auffassung verbindet höchste intuitive Klarheit mit Freiheit. Wer immer sich im abstrakten Formalismus der Mathematik noch einigen Sinn für anschauliche Gegebenheiten erhalten hat, auf den muss sie wirken wie eine Erlösung vom bösen Albdruck! (Natürlich ist Herr B r o u w e r an dieser ganzen plumpen Reklame unschuldig. Ich denke mir, dass sie ihm peinlich ist.) -

Dies ist übrigens längst noch nicht alles. Hinzugefügt seien zunächst noch einige tiefgeschöpfte philosophische Gründe dafür, dass "das" Kontinuum unzerlegbar ist.

Symposion I, S.22. Der alte Grundsatz kommt wieder zu seinem Recht, dass "sich nicht trennen lässt, was nicht schon getrennt ist" (G a s s e n d i). Mit gutem Grund nämlich argumentiert D e m o k r i t: Kann ich einen Stock zerbrechen, so war er von vorn herein kein Ganzes; die strengste Atomistik (!!) ist die unausweichliche Folge (?).

Dass der Hemmungsapparat, ohne den eine gedeihliche Produktion - auch Kritik - nicht möglich ist, bei W e y l nicht immer funktioniert, dürfte hiermit erwiesen sein.

Ich frage mich vergeblich, wo gewisse Beurteiler ihre Augen haben mögen.

---

1) Ebenso in Handbuch der Philosophie, 1927. Nach einer von mir nicht kontrollierten Angabe G. C a n t o r's soll diese Tollheit von einem Scholastiker, dem heiligen Thomas von Aquino herrühren.

Königus
~~Überhaupt~~ sind uns zuletzt die Grundsätze des mathematischen Intuitionismus ziemlich aus dem Blickfeld entschwunden. Vielleicht ist"Intuitionismus" nur eine Flagge, unter der alles Mögliche dahinsegelt, das bei den einzelnen Intuitionsten durch Personalunion verbunden ist. Eine Grenzlinie ziehen zu wollen, ist jedoch gefährlich. Das Urteil darüber, wie ein "gereinigter" Intuitionismus aussehen mag, darf verschoben werden, bis er vorhanden sein wird.

Suche ich nach einer ähnlichen Mentalität wie der, die wir soeben kennen gelernt haben, so fällt mir zunächst Wilhelm der Zweite ein. In der Tat könnte man W e y l als eine Übersetzung Wilhelms in's Mathematisch-Philosophische betrachten, wenn sein Verhältnis zu B r o u w e r nicht wäre. Darum scheint mir eine Vergleichung mit Mahomet besser zu sein. Wirklich ist der Inuitionismus, der mathematische wie der sonstige, <u>eine Art von Religion</u>. Beide sind von einer ähnlichen Zerstörungswut besessen, wie die Religion der Mohamedaner.

Wie W. als Gesetzgeber auftritt und seine Leser durch Bedrohung mit Personalinvektiven einzuschüchtern sucht, haben wir gesehen. Einer seiner Erlasse betrifft die Definition der Mathematik: Sie "ist" die Lehre vom Unendlichen. Hiervon ist schon die Rede gewesen (S.O.).

Für Mängel dieser Art werden wir durch Poesie entschädigt. So wird Alla
~~Akki~~, nämlich B r o u w e r , im Symposion mit den Worten eingeführt: "Die Eisdecke war in Schollen zerborsten, und jetzt ward das Element des Fliessenden bald vollends Herr über das Feste"; wie es sich denn in der intuitionistischen Mathematik wirklich verhält.

Weiterhin orakelt unser Prophet, Alla
~~Akki~~'s Analysis(?) spreche den Gehalt der mathematischen "Urintuition" rein aus und sei <u>von rätselloser Klarheit durchleuchtet</u>! Wieder kommt sich ein

unglücklicher Leser dumm vor. Denn es könnte geschehen, dass ihm, beispielsweise, schon die Definition des Grundbegriffs (!) der B r o u w e r'schen"Analysis" (nämlich der "intuitionistischen Mengenlehre" nicht eingeht."Eine Menge ist ein Gesetz, auf Grund dessen, wenn immer wieder (aus der Folge der Nummern 1,2,3,4,5,...) eine willkürliche Nummer gewählt wird, jede dieser Wahlen entweder eine bestimmte Zahlenreihe (Nummernreihe) (mit oder ohne Beendigung des Prozesses) (der auf einander folgenden Wahlen)erzeugt, oder aber die Hemmung (?) des Prozesses mitsamt der definitiven Vernichtung seines Resultates (?!) herbeiführt, wobei für jedes n > 1 nach jeder unbeendigten und (?!) ungehemmten (?) Folge von n - 1 Wahlen, wenigstens eine Nummer angegeben werden kann, die, wenn sie als n^{te} Nummer gewählt wird, nicht die Hemmung des Prozesses herbeiführt". (Math. Annalen, Bd.93, 1925, S.244.)

Alles, was ich hiervon zu begreifen vermag, ist, dass"ein Sack Kartoffeln", da er bestimmt kein Gesetz ist, nach B r o u w e r keine "Menge" von Kartoffeln sein kann.

Früher (1921, S.70) konnte man noch lesen, dass W e y l mit vielen der Aussagen B r o u w e r's keinen Sinn zu verbinden wusste. Aber jetzt ist kein Ausdruck stark genug, um die Klarheit dieses Mathematikers genügend zu preisen.

Das Dekretieren von Werturteilen würde jedenfalls besser unterblieben sein. Ausserdem wird Herr W e y l gut tun, sich - wo möglich - etwas von der Bescheidenheit anzueignen, die er anderwärts vermisst hat, und die Herr H i l b e r t unglaublicherweise in den Lebensäußerungen des Intuitionismus gefunden haben will.

XVII.

Der Finitismus und die konstruktive Mathematik Kroneckers. Die Paradoxien der Mengenlehre.

Bis hierher haben wir es lediglich mit den mathematischen "Intuitionisten" zu tun gehabt. Die noch weiter an ihren Meinungen zu übende Kritik trifft indessen auch eine ältere Lehre, die schon ~~daher~~ darum eine Betrachtung verdient, weil sie, wenn auch ebenfalls unhaltbar, doch immerhin einen gesunden Kern hat.

Die Ansichten Kroneckers sind hauptsächlich durch private Mitteilungen verbreitet worden, vielleicht auch durch seine Vorlesungen, worüber ich nicht unterrichtet bin. Öffentlich hat sich Kr. nämlich sehr zurückhaltend geäussert. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn Pasch gehen die zu besprechenden Ansichten schon auf das Jahr 1865 zurück. (Entscheidungsproblem, siehe Abschnitt XVIII).

Natürlich können hier und da auch Missverständnisse untergelaufen sein [1]. Es ist ausserdem anzunehmen, dass sich Kroneckers Gesamtansicht der Mathematik allmälig entwickelt und schließlich sehr verschärft hat. Seine Schüler Netto, Molk und Hensel, denen wir Berichte verdanken, waren nicht seine Schüler in letzter Zeit.

Kr., der sich einst des höchsten Ansehens erfreute, wird gegenwärtig gerade von einigen derer geringschätzig behandelt, die ihm wissenschaftlich am nächsten stehen.

Die mathematischen Intuitionisten erwähnen ihn als einen ihrer Vorläufer, womit er abgetan ist.

A. Fraenkel, der den Intuitionisten gegenüber einen gewissen Skeptizismus an den Tag legt, verfährt ebenso. Er behauptet überdies, Kr. habe intuitionistische (?) Gedanken mehr gefühlsmäßig vorgetragen (?).

Nach D. Hilbert ist Kr. der klassische Verbotsdiktator. Es lag ihm und seiner Schule fern, über die ganze Zahl weiter nachzudenken. Das erste enthält ein gutes Stück Wahrheit, das zweite aber ist ganz unrichtig.

Nur M. Pasch hat in der Diskussion über die Grundlagen der Mathematik Kr.'s mit wirklicher Anerkennung gedacht.

---

1) Zum Beispiel finden sich in den von E. Netto herausgegebenen Vorlesungen über bestimmte Integrale (1894) Äusserungen, die sich gegen Cantor's Untersuchung über trigonometrische Reihen richten. Wenn auch darin eine Ansicht Kr.'s im Ganzen richtig wiedergegeben ist, so ist doch schwer zu glauben, dass Kr. das wirklich gesagt haben sollte, was dort auf Seite 95, Zeile 3-5 zu lesen steht.

XVII

Der Intuitionismus und die konstruktive Mathematik

Kronecker. Die Paradoxien der Mengenlehre.

Die bisher haben wir es lediglich mit den mathematischen "Intuitionisten" zu tun gehabt. Die noch weiter an ihren Meinungen um Übende Kritik trifft indessen auch eine ältere Lehre, die schon dadurch eine Betrachtung verdient, weil sie, wenn auch ebenfalls unhaltbar, doch immerhin einen gesunden Kern hat.

Die Anschauungen K r o n e c k e r's sind hauptsächlich durch private Mitteilungen verbreitet worden, vielleicht auch durch seine Vorlesungen, worüber ich nicht unterrichtet bin. Öffentlich hat sich Kr. nämlich sehr zurückhaltend geäußert. Nach einer brieflichen Mitteilung von Herrn P a s c h kann die zu besprechende Anschauung schon auf das Jahr 1865 zurück. (Untersuchungsproblem, ähnlich Abschnitt XVIII).

Natürlich können hier und da auch Mißverständnisse unterlaufen sein [1]. Es ist immerhin anzunehmen, daß sich K r o n e c k e r's Gesamtansicht der Mathematik allmählig entwickelt und endlich sehr verschärft hat. Seine Schüler H e t t o, M o l k und H e n s e l, denen wir Berichte verdanken, waren nicht seine Schüler in letzter Zeit.

Kr., der sich einst des höchsten Ansehens erfreute, wird gegenwärtig gerade von einigen derer geringschätzig behandelt, die ihm wissenschaftlich am nächsten stehen.

Die mathematischen Intuitionisten erwähnen ihn als einen ihrer Vorläufer, womit er abgetan ist.

A. P r i n g s h e i m, der den Intuitionisten gegenüber einen gewissen Skepticismus an den Tag legt, vertritt ebenso. Er bemüht Überstes, Kr. habe intuitionistische (?) Gedanken mehr gelegentlich vorgetragen (?).

Nach D. H i l b e r t ist Kr. der klassische Verbotsdiktator. Es lag ihm und seiner Schule fern, über die ganze Zahl weiter nachzudenken. Das erste enthält ein gutes Stück Wahrheit, das zweite aber ist ganz unrichtig.

Nur M. P a s c h hat in der Diskussion über die Grundlagen der Mathematik Kr.'s mit wirklicher Anerkennung gedacht.

---

[1] Zum Beispiel finden sich in den von E. H e t t o herausgegebenen Vorlesungen über bestimmte Integrale (1894) Anmerkungen, die sich gegen C a n t o r's Untersuchung über trigonometrische Reihen richten. Wenn auch darin eine Ansicht Kr.'s in Ganzen richtig wiedergegeben ist, so ist doch schwer zu glauben, daß Kr. das wirklich gesagt haben sollte, was dort auf Seite 95, Zeile 3-8 zu lesen steht.

K r o n e c k e r geht mit den Realisten im Anfang zusammen. Ein sehr bekannter Ausspruch von ihm lautet:

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht. Alles übrige ist Menschenwerk.

Und er hat beifällig J a c o b i's Wort zitiert:

Was Du im Kosmos erschaust
ist nur des Göttlichen Abglanz,
In der Olympier Schaar
thronet die ewige Zahl.

Hier wird also die Unabhängigkeit der natürlichen Zahlen (denn diese sind gemeint) vom menschlichen Denken ausdrücklich anerkannt, und ebenso der Ewigkeitswert der Mathematik.

Aber alsbald verschreibt Kr. seine Seele dem Psychologismus. Weil der menschliche Geist (der fast ganz an die Gliederung irgendeiner Sprache gebunden zu sein scheint) sich nur zu bestimmten Denkschritten und nur zu einer endlichen Zahl von solchen bewegen kann, wollte K r o n e c k e r (in seiner letzten Zeit) als in der Mathematik zulässig (sinnvoll) nur das anerkennen, was von seinem Ausgangspunkt her durch eine endliche Zahl von "Schritten" zu erreichen war. Als solche Schritte aber hat er nur "die vier Spezien" des elementaren Rechnens gelten lassen: Nicht, zum Beispiel, die Auswertung bestimmter Integrale, über die er selbst Vorlesungen gehalten hatte. Was dann von der Mathematik übrig bleibt, ist nur die von G a u s s und K r o n e c k e r sogenannte allgemeine Arithmetik, die ausser der elementaren Zahlentheorie noch Teile der Algebra umfasst.

Man hat diese Lehre, die die Mathematik noch mehr einzuengen sucht als die Intuitionisten es wollen, als Finitismus bezeichnet. Diesen Namen verdient sie.

Um mich ohne Umschweife ausdrücken zu können, bedienen ich mich nunmehr einer Fiktion. Ein "Wesen p" soll alle Fähigkeiten menschlichen Denkens haben, ausser der, zufolge schlechten Gedächtnisses oder aus anderen Ursachen Fehler zu machen, dafür aber soll es mit unbegrenzter Lebensdauer und unermesslicher Geduld ausgestattet sein [1]. Auch wollen wir annehmen, dass die Gefälligkeit dieses Fabelwesens ebenfalls unermesslich ist, und dass es x-mal so schnell rechnet als der beste menschliche Rechner, wo x eine beliebig grosse aber endliche Zahl ist - damit wir nämlich nicht wegsterben, ehe unser Wesen p eine ihm etwa aufgehalste Rechnung ausgeführt haben wird.

Dass es ohne eine solche Fiktion nicht abgehen kann, wenn Mathematik als Wissenschaft betrieben und nicht auf einem allzuengen Problemkreis eingeschränkt werden soll, ist leicht zu sehen. Wenn der Mathematiker behauptet, dieses oder jenes ließe sich ausführen, es aber nicht wirklich ausführt, so appeliert er fast immer an die Geduld des Wesens p. Wo er notgedrungen darauf verzichten muss, gewisse Zahlen oder Funktionen so z.B. Invarianten explicite zu bestimmen und sich mit der bescheidenen Angabe begnügt, sie seien in endlicher Zahl vorhanden, da überlässt er das, worauf es ihm in einfacheren Fällen ankam und wovon gar nicht zu reden ihm in verwickelteren misslich scheint, dem Wesen p.

Man könnte auch noch mehr solche Wesen ersinnen, z.B. einen p_1, das die einfachsten Grenzübergänge, insbesondere alle Differentiationen, ausführen könnte, ein anderes p_2, das auch noch alle Quadraturen zu bewältigen wüsste, u.s.w. - je nachdem, was man gerade als "ausführbar" hinstellen will. Ich komme indessen mit dem einen Wesen p aus.

Jedenfalls muss man sich davor hüten solche Fabelwesen zur Vertuschung von Schwierigkeiten zu benutzen. Gar nicht selten haben Mathematiker sich selbst oder andere mit derartigen Wesen verwechselt. Oft sind Probleme als "erledigt" hingestellt worden, zu deren Lösung kaum ein Anfang vorlag. An Stelle der Lösung sollte der Nachweis ihrer "Möglichkeit" - Möglichkeit für das Wesen p - genügen!

Fiktionen ähnlicher Art brauchen übrigens auch andere Wissenschaften. Z.B. steckt hinter den "Gedankenexperimenten" des Physikers ein solches Wesen.

---

1) Dieser sehr zweckmäßigen Erfindung hat sich vor mir Herr P a s c h bedient, von dem sie auch herzurühren scheint. Nur der Name stammt von mir. Etwas ganz Ähnliches kommt übrigens auch bei P o i n c a r é vor (Dernières Pensées, S.145).

Was das Wesen p nicht würde erkennen können, wie etwa die Gesamtheit der Stellen im Dezimalbruch für π, wird als nicht zulässig, als im Sinne der finitistischen Mathematik nicht existierend hingestellt.

"Was nützt uns Ihre schöne Untersuchung über die Zahl π? Wozu das Nachdenken über solche Probleme, wenn es doch gar keine irrationalen Zahlen gibt?" Äusserung K r o n e c k e r's gegenüber F. L i n d e m a n n [1].

Überhaupt sollten nur entscheidungsdefinite Begriffe zugelassen werden [2]. Das heisst, man würde von jeder Definition verlangen müssen, dass sie ein Kriterium liefert, demzufolge "man" entscheiden könnte, ob irgend ein Ding unter sie fällt oder nicht. "Man" ist eine Fiktion, nichts anderes als das Wesen p. Dieses könnte, wenn es existierte, jede endliche Zahl von Additionen u.s.w. ausführen. So dürfen der allgemeine Begriff einer algebraischen Zahl und der transzendenten Zahl schon darum nicht zugelassen werden, weil es kein Kriterium gibt und geben kann, demzufolge (zum Beispiel) immer darüber entschieden werden "kann", ob ein auf irgend eine Art gebildeter Ausdruck algebraisch oder transzendent ist. Dieses Kriterium müsste nämlich, nach der

---

1) Siehe H. P o i n c a r é, 1914, S.252. In der französischen Enzyklopaedie (I,2, S.161) behauptet J. M o l k im Gegensatz hierzu, Kr. habe nur den allgemeinen Begriff der irrationalen Zahl ablehnen wollen. Dieselbe Ansicht, die offenbar aus älterer Zeit stammt, liegt auch dem Bericht von N e t t o zugrunde.

2) Dieser Terminus rührt nicht von K r o n e c k e r her, sondern, wie es scheint, von O. B e c k e r. (B. selbst gibt an, er rühre von B r o u w e r und W e y l her. An der von ihm zitierten Stelle kommt er jedoch nicht vor.)

finitistischen Grundansicht, in einer nachweisbar endlichen Zahl von Additionen u.s.w. bestehen. Nach K r o n e c k e r "gibt es" sogar überhaupt keine Zahlen ausser den rationalen, die allein "konstruierbar" sind.

Übrigens würde ja auch das Wesen p nicht alle rationalen, und nicht einmal alle natürlichen Zahlen angeben können.

Algebraisch heisst eine Zahl der herkömmlichen Mathematik, wenn sie einer Gleichung der Form

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

genügt, in der $a_1 \dots a_n$ rationale Zahlen sind, transzendent heisst jede andere Zahl. Sollte es im Sinne K r o n e c k e r's ein Kriterium für die algebraischen Zahlen geben, so müsste es gerade die genannte Form haben. Da aber die Zahlen $a_1 \dots a_n$ beliebig grosse Werte haben können, so kann es ein solches "finitistisches"Kriterium nicht geben. Die Frage danach ist widersinnig.

In den gesammelten Werken von H. M i n k o w s k i ist eine interessante Abhandlung aus dem Jahre 1911 abgedruckt, die überschrieben ist: Ein Kriterium für die algebraischen Zahlen. Es besteht darin, dass ein gewisser Prozess, bei dem nur die elemantaren Rechnungsoperationen benützt werden, nach einer endlichen Zahl von Schritten abbricht. Da es auch für diese Zahl keine Grenze gibt, so ist die genannte Bedingung kein Kriterium im Sinne K r o n e c k e r's das es eben überhaupt nicht gibt.

Aus dem gleichen Grunde kann vom finitistischen Standpunkt aus auch schon das Kriterium für quadratische Irrationalitäten nicht anerkannt werden, das in ihrer Darstellbarkeit durch Kettenbrüche mit periodischer Endung besteht.

Kurz, die klassische Mathematik, mit ihren unendlichen Summationen und anderen Grenzübergängen soll durch eine finitistische Mathematik ersetzt werden. Was nicht "konstruiert" werden kann (von dem Wesen p !) wird rundweg abgelehnt.

Dass auf Grund dieser Einschränkung gerade die wichtigsten Bestandteile der heutigen Mathematik über Bord gehen müssen, ist klar: Nicht einmal die Gleichung

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1$$

hat einen Sinn, und zwar hat sie ihn darum nicht, weil ihre linke Seite gar nicht "existiert".

An dieser Stelle erhebt sich nun ein erster Einwand gegen die finitistische Mathematik. Die angeführte Gleichung ist ja nur eine Abkürzung für die andere

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right\} - 1 = 0,$$

die selbst wieder eine abkürzende Schreibart dafür ist, dass die Differenz

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^n} - 1$$

(von dem Wesen p) beliebig klein gemacht werden kann, dadurch, dass n hinreichend gross gewählt wird. Zuvor schon Gesagtes gilt auch hier: Warum in aller Welt sollen Abkürzungen, wenn sie bequem sind, nicht benutzt werden dürfen?

Ferner ist zu bemerken:

In der finitistischen Mathematik wird zwischen Schliessen und Begriffsbildung nicht unterschieden.

Dass wir uns nur in einer endlichen Zahl von Denkschritten (Denkakten) vorwärts bewegen können, ist gewiss. Wesentliche Unterschiede aber dürfen nicht verwischt werden.

Während wir, und ebenso das Wesen p, des Unendlichen nicht durch Auszählung habhaft werden können, gelingt das sehr wohl auf dem Wege der Definition.

Bilden wir den Begriff Gesamtheit der natürlichen Zahlen, oder den Begriff Unendlicher Dezimalbruch, oder endlich den Begriff Natürliches Kontinuum (oder z.B. auch den Begriff Bestimmtes Integral), so haben wir in jedem Falle nur einen einzigen Denkakt auszuführen [1] (Ähnlich liegt die Sache bereits bei der vollständi-

---

1) Man kann, wenn man will, auch zwei Denkakte zählen. Eigentlich sollte es heissen: Entschliessen wir uns zur Betrachtung, u.s.w., und geben wir dem Kind einen Namen! Z.B. ist Natürliches Kontinuum ein solcher Name für den Inbegriff der rationalen und irrationalen

An dieser Stelle erhebt sich nun ein erster Einwand gegen die finitistische Mathematik. Die angeführte Gleichung ist ja nur eine Abkürzung für die andere

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right) - 1 = 0,$$

die selbst wieder eine abkürzende Schreibart dafür ist, dass die Differenz

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} - 1$$

(von dem Zeichen p) beliebig klein gemacht werden kann, dadurch, dass n hinreichend gross gewählt wird. Zuvor schon gesagte gilt auch hier: Darum in aller Welt sollen Abkürzungen, wenn sie bequem sind, nicht benutzt werden dürfen?

Ferner ist zu bemerken:

In der finitistischen Mathematik wird zwischen Definierten und Begriffsbildung nicht unterschieden.

Dass wir uns nur in einer endlichen Zahl von Denkschritten (Denkakten) vorwärts bewegen können, ist gewiss. Wesentliche Unterschiede aber dürfen nicht verwischt werden.

Während wir, und ebenso den Zeichen p, den Unendlichen nicht durch Anzahlung handhabt werden können, gelingt das sehr wohl auf dem Wege der Definition.

Bilden wir den Begriff Gesamtheit der natürlichen Zahlen, oder den Begriff Unendlicher Dezimalbruch, oder endlich den Begriff Natürliches Kontinuum (oder z.B. auch den Begriff Bestimmtes Integral), so haben wir in jedem Falle nur einen einzigen Denkakt auszuführen 1) (Ähnlich liegt die Sache bereits bei der vollständi-

---

1) Man kann, wenn man will, auch zwei Denkakte zählen. Eigentlich sollte es heissen: Entschliessen wir uns zur Betrachtung, u.s.w.. und geben wir dem Kind einen Namen! Z.B. ist Natürliches Kontinuum ein solcher Name für den Inbegriff der rationalen und irrationalen

gen Induktion).

Dass wir immer nur ganz spezielle Dezimalbrüche deutlich beschreiben, nur von einzelnen ein Bildungsgesetz angeben und auch solche nicht ausrechnen können, tut nichts zur Sache. Begriffsbildung ist etwas anderes als Konstruktion. Die Physiker arbeiten mit einer Menge von Begriffen, denen nach ihrer Annahme nicht einmal etwas Reales entspricht (Massenpunkte, Kreisprozesse, absolut schwarzer Körper, absoluter Nullpunkt der Temperatur, u.s. w.), und sie tun es mit größtem Erfolg. Auch die Mathematiker brauchen sich keine Scheuklappen anlegen zu lassen.

Es ist ferner nicht einzusehen, warum in einem Falle wie dem vorliegenden das, was von der Mathematik verlangt wird, nicht von allem ernsthaften Denken verlangt werden sollte [1].

Begriffe wie Fester Körper, Flüssigkeit, Gas; Ruhe, Bewegung; Geologische Formation, Gebirge, See, Atmosphäre, Wolke; Thier, Pflanze, Organ, Familie, Gattung Art; Staat, Religion, Kunst, Wissenschaft; deutlich, ähnlich, einfach, verwickelt; normal, gesund, krank; und noch viele andere, sind nicht nur nicht entscheidungsdefinit, sondern nicht einmal scharf abgrenzbar. Also weg damit! Was bleibt dann noch von Wissenschaft übrig? Und auch die Begriffe Entscheidungsdefinit und Nicht-Entscheidungsdefinit

---

Zahlen, deren Dasein vorher erkannt sein muss. Diesen Inbegriff, dessen Existenz somit bereits gesichert ist, zu betrachten, erfordert einen Entschluss, und dieser, zusammen mit der Namengebung, ist der im Texte gemeinte "Denkakt".

1) Die Behauptung, dass nur Entscheidungsdefinite Begriffe Sinn haben, rührt von K r o n e c k e r her, wenn er auch den Terminus selbst nicht gebraucht hat.
Als Beispiel eines nicht entscheidungsdefiniten Begriffs, der gleichwohl völlig bestimmt und natürlich auch wissenschaftlich verwertbar ist, sei - fern nach B o l z a n o - die Menge von Geld angeführt, die auf der Erde vorhanden ist.

sind nicht entscheidungsdefinit. Wie kann man nur einen solchen Begriff verbieten wollen und zu ebendiesem Verbot einen von ~~von~~ ihnen benutzen?! [1]

Auch die blühende ~~Rak~~ Rhetorik, mit der Herr W e y l sein Anathema von allerlei Begriffsbildungen umkleidet hat, kann nichts daran ändern, dass unzählige der verdammten Begriffe in Übung sind und mit vollkommener Sicherheit gehandhabt werden. Mit solcher Sicherheit werden sie gebraucht in allen Wissenschaften, und insbesondere im Rahmen der klassischen Analysis.

Streichen wir aus K r o n e c k e r's Lehre die Negation, so erhalten wir ein völlig verschiedenes und in der Hauptsache auch erfreuliches Bild. Freilich, die Hoffnung, die Mathematik werde dereinst alle ihre Behauptungen (unvermittelt) in der Form von Lehrsätzen über natürliche Zahlen darstellen, wird sicher nicht in Erfüllung gehen. Aber in engerem Kreise lässt sich ein solcher Gedanke ausführen, und ihm hat K r o n e c k e r einen großen Teil seiner Lebensarbeit gewidmet. Ist auch vieles davon so verwickelt und schwierig, dass ein "mathematischer Herkules" dazu nötig war, um es hervorzubringen und immer noch ein kleiner Herkules nötig ist, um alles zu verstehen, so behält es doch, wie ich trotz ungenügender Bekanntschaft damit überzeugt bin, einen dauernden Wert, der unabhängig ist von der Art von Erkenntnistheorie, mit der wir uns hier beschäftigen.

Als eine charakteristische und wichtige Einzelheit sei K r o n e c k e r's Methode zur Bestimmung der irreduziblen Teiler einer ganzen rationalen Funktion von mehreren Veränderlichen erwähnt. Praktisch brauchbar ist sie allerdings nicht. Das Wesen p ist eben, wie gesagt, nicht zu entbehren.

Der Leser, der sich unterrichten will, sei auf das Vorwort zu den schönen Vorlesungen K r o n e c k e r's über Zahlentheorie verwiesen, die K. H e n s e l herausgegeben hat, sowie auf ~~seine~~ zwei Schriften, die meines Wissens in den neueren auf die Grundlagen der Mathematik bezüglichen Literatur niemals genannt worden sind: Den im Literaturverzeichnis angegebenen Aufsatz von E. N e t t o und einen anderen von H. B. F i n e, An Unpublished

---

1) Ähnlich operiert W e y l mit einem Begriff umfangsdefinit. Siehe darüber O. B e c k e r, 1923, S.412, der aber die Einführung des Begriffs entscheidungsdefinit mit dem "Prinzip des transzendentalen Idealismus" motiviert.

Theorem of Kronecker respecting Numerical Equations, Bulletin of the American Mathematical Society, Bd.20, 1914.

N e t t o hat K r o n e c k e r's Ideen im Zusammenhang dargestellt, so weit sie ihm bekannt waren. In der zweiten Schrift handelt es sich um einen "konstruktiven" Ersatz des Fundamentalsatzes der Algebra, ein Thema, das auch in dem ersten Aufsatz besprochen wird. K r o n e c k e r's Ausführung ist sehr viel gründlicher als das, was später andere, z.B. W e y l, darüber geschrieben haben.

K r o n e c k e r's Abhandlungen findet man im Journal für Mathematik.

Unterscheiden wir jetzt vom Finitismus, der unberechtigte Kritik ist, d i e k o n s t r u k t i v e M a t h e m a t i k, so können wir wohl sagen, dass diese letzte den Kern aller Mathematik bildet, insofern alles andere sich ganz von selbst darum gruppiert. K r o n e c k e r's eigene Ausführungen bilden davon einen bemerkenswerten Teil. Zur konstruktiven Mathematik gehört, ausser der elementaren Zahlentheorie, ein großer Teil der Algebra, insbesondere der Invariantentheorie, der Lehre von den höheren komplexen Zahlen, und anderes mehr, wie die im Abschnitt XIII besprochenen linearen Konstruktionen.

In dem zitierten Aufsatz von N e t t o wird die Bedeutung der Forschungsrichtung K r o n e c k e r's , die hauptsächlich, im Sinne der Zahlentheorie von Kongruenzen Gebrauch macht, mit Recht hervorgehoben, aber, wie mir scheint, auch übertrieben. Wenn schon die negativen ganzen Zahlen durch Kongruenzen nach dem Modul $x + 1$, und die G a u s s'schen Zahlen, wie bei C a u c hy, durch Kongruenzen nach dem Modul $x^2 + 1$ ersetzt werden sollen, so ist das denn doch ein zu schwerfälliger Apparat, als dass er

zu allgemeiner Verwendung empfohlen werden könnte. Für die Theorie der analytischen Funktionen und der konformen Abbildung ist er überhaupt nicht zu gebrauchen.

XVIII.

Die Mengentheoretischen Paradoxien.

Gegen das im Haupttexte des vorigen Abschnittes zuletzt Bemerkte wird ein Einwand geltend gemacht, und zwar nicht nur von den mathematischen Intuitionisten:

Da ist doch die Mengenlehre, in der sich flagranteWidersprüche - sogenannte Paradoxien oder Antinomien - gezeigt haben!

Das ist für mich besonders schlimm, nachdem Herr W e y l, unter vielen Namenlosen auch mir ein Viertel bis zur Hälfte des üblichen Maasses von Ehrlichkeit abgesprochen hat(!). Aber vielleicht lässt sich doch so etwas wie eine Erwiderung versuchen.

Ich gehe auf die Mengenlehre G. C a n t o r's, nur so weit ein, als es mir für mein Thema, die Abwehr der gegen die heutige Analysis gerichteten Angriffe, dienlich zu sein scheint. Was unter den "Paradoxien" zu verstehen ist, ist allgemein bekannt. Siehe etwa § 13 der Mengenlehre von A. F r a e n k e l .

1.

Ein fehlerhafter Analogieschluss.

Es könnte gesagt werden - und ich sage es tatsächlich: Ihr, die Ihr versichert, dass die Widersprüche, die sich in der Mengenlehre gezeigt haben sollen, ihren Schatten auf die Analysis werfen, zieht eine Parallele zwischen den transfiniten Zahlen C a n t o r's und jenen anderen und gebräuchlicheren, von denen in diesem Buche bis jetzt allein die Rede war. Beide Arten von "Zahlen" bilden unendliche Mengen, sie sind aber sonst sehr verschieden. Analogien sind trügerisch. Also habt Ihr die Verpflich-

tung, die Widersprüche nachzuweisen, deren Dasein schon in den gewöhnlichen Zahlbegriffen ihr behauptet. Diesen Nachweis habt ihr nicht geführt. Es ist unerlaubt, einen Angeklagten auf einen blossen Verdacht hin zu verurteilen!

Und wie steht es denn um die angeblichen Widersprüche in der Mengenlehre selbst? Hat man diese, die Lehre C a n t o r's richtig aufgefasst? War wirklich kein Mißverständnis möglich, oder könnte es nicht vielleicht sein, dass man, ~~in~~folge oberflächlicher Urteilsbildung, an Stelle einer einwandfreien Definition einen Wechselbalg untergeschoben hat?

Dieses ist nun tatsächlich meine Meinung, und ich stehe mit ihr wenigstens nicht ganz allein: Das, was ich für richtig halte, ist schon im Jahre 1906, in einer Arbeit, die man späterhin völlig ignoriert hat, von A. S c h o e n f l i e s ausgesprochen worden[1].

Sehen wir ~~xxxxxxxx~~ uns also C a n t o r's Mengendefinition noch einmal an!

2.

Die Mengendefinition.

G. C a n t o r's endgültige Umgrenzung des Begriffs Menge - vom Jahre 1895 - ist offenbar das Ergebnis einer reiflichen und sehr sorgfältigen Überlegung. Sie lautet:

E i n e M e n g e i s t e i n e Z u s a m m e n f a s s u n g b e s t i m m t e r w o h l u n t e r s c h i e d e n e r O b j e k t e (u n s e r e r A n s c h a u u n g u n d u n s e r e s D e n k e n s) - w e l c h e d i e E l e m e n t e d e r M e n g e g e n a n n t w e r d e n.

Dies ist, wie mir scheint, nicht eine Erklärung von i d e m p e r i d e m, als die man sie schon hingestellt hat, sondern eine wirkliche Definition, und zwar nicht eine formale,

1) Im Jb.d.D.M.V., Bd.15, S.22.

sondern eine inhaltliche. Es wird nicht von irgendeiner Zusammenfassung geredet, sondern die zusammengefassten Gegenstände (Objekte) sollen bestimmt und wohlunterschieden sein. Das letzte trifft z.B. nicht zu für unsere Farben- und Tonempfindungen, auch nicht für Vorstellungen räumlicher Dinge und noch für manches andere. Gewisse ziemlich nebelhafte Begriffsbildungen, die man, sehr zu Unrecht, der Mengenlehre zur Last gelegt hat, wie "die Menge" aller Dinge und "die Menge" aller Begriffe, werden dadurch, als zur mathematischen Bearbeitung ungeeignet, von vornherein ausgeschlossen, ebenso z.B. auch die Gesamtheit aller (bekannten oder bekannten und unbekannten, aber richtigen) mathematischen Lehrsätze.

Es kann sein, dass Gegenstände sicher verschieden sind, dass aber wir sie nicht oder nicht sicher oder nicht immer unterscheiden können, wie z.B. Billardbälle oder eineiige Zwillinge. Das von C a n t o r gwählte Wort Element stammt aus der Chemie. Werden nur chemische Unterschiede beachtet, so bilden die Elemente der älteren Chemie eine endliche Menge, deren Elemente wiederum Mengen (von Isotopen) sind. Es sind aber noch nicht alle Elemente und noch weniger alle Isotopen bekannt, und schon manche Elemente sind sehr schwer zu trennen. Dass die zusammengefassten Gegenstände bestimmt sein sollen, heisst also nicht, dass sie sozusagen auf den Tisch des Hauses gelegt und "überblickt" werden können. Wir wissen nicht, ob $\overline{\pi}$ eine rationale Zahl oder irrationale Zahl ist. Das hindert aber nicht, die Begriffe rationale und irrationale Zahl, und auch die zugehörigen Mengen, mit vollkommener Sicherheit anzuwenden. Was besagt es wohl gegen die Astronomie, dass der Astronom nicht alle seine Objekte "überblicken" kann?

Das in der Mengendefinition vorkommende Wort Z u s a m m en-

f a s s u n g wird nicht erklärt und kann auch nicht erklärt werden. Es ist ein primitiver Begriff, der nicht mehr auf einfachere Begriffe zurückgeführt werden kann, ebenso wie Zuordnung und Vertauschung, Worte, die ein jeder versteht und über die philosophische Betrachtungen anzustellen also müßig ist. Es ist indessen ein Mißverständnis möglich, das vor allen Dingen abzuschneiden ist. Es handelt sich um den psychischen und also in der Zeit und in einzelnen Individuen verlaufenden Akt eines Zusammenfassens. Es kommt vielleicht mehr auf das, einerlei wie, Zusammengefasste an. Worte wie G e s a m t h e i t, I n b e g r i f f würden angemessener gewesen sein. C a n t o r hatte wohl an die Möglichkeit, dass sein Mengenbegriff psychologisiert werden könnte, gar nicht gedacht. Ihm waren ja die natürlichen Zahlen, von denen er ausging, e i n D i n g a n s i c h, ein Vorhandenes und zu Erforschendes, wie Gegenstände der Natur, nicht, wie bei D e d e k i n d und anderen, an menschliches Denken gebunden, nicht Produkte sogenannter Schöpfungsakte, wie Dichtungen und Werke der bildenden Kunst, aus denen nicht mehr herauszuholen ist als was vorher hineingesteckt worden war.

Überhaupt hat die Mathematik, wie wir schon gesehen haben, mit Psychologie nicht das Geringste zu tun.

Augenblicklich freilich scheint die entgegengesetzte Meinung nicht nur die Oberhand gewonnen zu haben, sondern auch von ihren Vertretern als selbstverständlich angesehen zu werden, ganz als ob die genannten hochverdienten Forscher nie gelebt hätten. Einige bilden sich ja gar ein, die Mathematik, oder was sie so nennen, aus dem Nichts - buchstäblich a u s d e m N i c h t s! - erschaffen zu können (S.00). Eine objektive, also nicht anthropologische Auffassung der Mathematik wird nicht einmal diskutiert.

Mit dem Schlagwort Existenzialabsolutismus und einigen philosophischen Dekreten ist alles erledigt.

Jede einzelne Menge ist weiter nichts als die Gesamtheit ihrer Elemente. Werden mehrere Mengen zugleich betrachtet, so tritt jede den übrigen als ein Ganzes gegenüber. Das schließt nicht aus, dass Elemente der einen Menge auch anderen angehören. (Durchschnitte, Teilmengen - Vereinigungsmenge)

Die Mengendefinition wird gegenstandslos, wenn es sich nur um ein einziges Ding handelt. Sinngemäß wird auch dieser Fall noch unter den Mengenbegriff einbezogen.

Außerdem hat man behufs Vereinfachung von Ausdrucksformen noch eine weitere "Menge" eingeführt, die Nullmenge heißt und eine grammatikalische Fiktion ist wie das Nichts.

Diese beiden Arten sogenannter Mengen, die an sich eine sehr sorgfältige Erörterung verdienen, kommen für das Folgende nicht in Betracht.

3.

Die Antinomien.

Einer Menge, von der P, Q,... einige (nicht notwendig einzeln aufgezählte oder auch nur abzählbare) Elemente sind, werde, wie in der deutschen Literatur üblich, das Zeichen

$$M = \{P, Q, \ldots\}$$

zugeordnet.

Dass eine Menge, die mehr als ein Element hat, von allen ihren Elementen unterschieden werden muss, wird bei erster Bekanntschaft mit der Mengenlehre wohl von einem jeden als selbstverständlich erachtet werden. Es liegt das ja schon in der Definition des Mengenbegriffes und wird auch von mir als v o l l k o m m e n s e l b s t v e r s t ä n d l i c h angesehen. Bis die Logistiker

B u r a l i - F o r t i (1897) und B. R u s s e l l (1903) auf den Gedanken kamen, dass es unter Umständen auch anders sein könnte, hat meines Wissens niemand ein Wort darüber verloren. Die Mengenlehre von F. H a u s d o r f f enthält in der neuesten Ausgabe von 1927 keinen ausdrücklichen Hinweis darauf, dass eine Menge mit einem ihrer Elemente zusammenfallen könnte, und auch in der ganzen ersten Hälfte der Mengenlehre von A. F r a e n k e l - 1928 - findet sich nichts derart. Hier jedoch erscheint der genannte Gedanke später und zwar wie etwas, das ohne weiteres einleuchten muss (S.211). Überhaupt scheint diese Idee, mit der einzigen Ausnahme von A. S c h o e n f l i e s, nirgends Verwunderung ausgelöst zu haben, wiewohl sie wirklich sehr erstaunlich ist. Ich halte sie - immer bei Mengen, die mehr als ein Element haben - für schlechthin absurd. Denn sie verstößt gegen ein elementares Gesetz alles Denkens, demzufolge jede Gesamtheit mehrerer Dinge, ~~einerlei~~ e i n e r l e i, o b s i e d e r M e n g e n d e f i n i t i o n g e n ü g t o d e r n i c h t, etwas Umfassenderes ist als jedes der in ihr vereinigten Dinge (Objekte)[1].

---

1) Das Wort Gesetz ist hier wohl sogar noch zu anspruchsvoll. Dass ein Mehreres mehr ist als das darin enthaltene Einzelne ist eine Tautologie. Der Satz (Euklid I, Κοιναὶ ἔννοιαι ,7) Τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν, Totum parte majus est, steht nicht in jedem Lehrbuch der Logik. Er fehlt zum Beispiel in dem von G. Störring. Er darf fehlen, eben wegen seines tautologischen Charakters. Ganzes und Teil sind kontradiktorische Gegensätze.

In einem philosophischen Seminar der Universität Bonn hat einer der Teilnehmer behauptet, d e r g e n a n n t e S a t z g e l t e n i c h t i n d e r M a t h e m a t i k. Dies dürfte die vollkommen zutreffende Formulierung einer gegenwärtig bei Mengentheoretikern herrschenden Ansicht sein.

Nehmen wir an, dass P eine Menge ist und außerdem das Element, mit dem M zusammenfallen soll, so haben wir, in Zeichen ausgedrückt, die beiden Voraussetzungen

$$M \succ P, \quad M = P$$

vor Augen. Diese sind aber so wenig mit einander verträglich, als ~~dass~~ Im Falle von zwei reellen Zahlen m und p die Annahmen

$$m > p, \quad m = p$$

es sind. (Das Zeichen $M \succ P$ sagt nur aus, dass M ausser P noch mindestens ein Element enthält. Es sagt nichts aus über eine etwaige Äquivalenz von M und P, Äquivalenz im Sinne der Mengenlehre.)

Die Annahme M = P ist also wirklich absurd. Nur wer die Mathematik mit einem Formelspiel verwechselt, kann auf einen solchen Gedanken kommen. Daher können wir die Unzuträglichkeit, die darin liegt, dass für ein und dasselbe Ding eine unendliche Menge von Zeichen

$$P = \{P,Q,\dots\} = \{\{P,Q,\dots\}Q,\dots\}$$
$$= \{\{\{P,Q,\dots\},\ Q,\dots\}Q,\dots\} = \dots$$

eingeführt wird, ganz auf sich beruhen lassen.[2]

S ä m t l i c h e s o g e n a n n t e n A n t i n o m i e n "d e r M e n g e n l e h r e" s i n d d a d u r c h z u s t a n d e g e k o m m e n, d a s s m a n d e n B e g r i f f e i n e r G e s a m t h e i t (M e h r h e i t), "d i e s i c h s e l b s t (A l s E l e m e n t) e n t h ä l t" (M = P), f ü r w i d e r s p r u c h s f r e i a n g e s e h e n u n d ü b e r d i e s M e n g e g e n a n n t h a t. S i e h a b e n a l s o m i t d e r M e n g e n l e h r e (der C a n t o r s!) g a r n i c h t s z u t u n.

---

1) Ein noch schöneres Beispiel für eine lediglich papierne Existanz ist jene berühmte Bibliothek

$$\{o\},\ \{\{o\}\},\ \{\{\{o\}\}\},\dots,$$

von der mir ein unbekannter Spottvogel gesagt hat, der erste Band enthalte gar nichts, jeder andere aber das Inhaltsverzeichnis des vorhergehenden Bände.

Dies gilt zunächst von der"Menge aller Mengen", die gerade eine solche denkwidrige Beschaffenheit hat, und natürlich auch von der "Menge aller Dinge" und ähnlichen, die schon aus dem zuvor genannten Grunde nicht unter den Mengenbegriff gefasst werden können. Aber auch von feiner Erdachtem gilt dasselbe. Stellen wir, nur um für den Augehblick ein anderes Wort als Menge zu haben, je zwei zueinander ähnliche wohlgeordnete Mengen in eine "Klasse", so erweist sich der Begriff einer umfassehdsten Klasse derart aus demselben Grunde als eine Denkwidrigkeit. D a m i t f ä l l t d a s "B u r a l i - F o r t i s c h e P a r a d o x o n" w e g[1]. Dass es, statt von Klassen, von Ordnungszahlen spricht, bedeutet nur einen terminologischen Unterschied. Es ist gar nicht paradox, da man bei Ausgang von widerspruchsvollen Voraussetzungen Widersprüche erwarten muss.

Ebenso absurd und der richtig verstandenen Mengenlehre fremd ist der Inbegriff ("die Menge") aller C a n t o r s c h e n Kardinalzahlen [2].

U n d a u c h "d a s R u s s e l s c h e P a r a d o xon" ist aus dem gleichen Gmnde illusorisch.

R. ist durch eine Überlegung, b e i d e r d i e E x i s t e n z v o n "M e n g e n, d i e s i c h s e l b s t (a l s E l e m e n t) e n t h a l t e n" (M = P), e i n e w e s e n t l i c h e V o r a u s s e t z u n g i s t, zu dem Schluss gekommen, dass der Inbegriff (nach R. die Menge, class) aller Mengen, die diese Eigenschaft n i c h t haben, einen Widerspruch ent-

---

1) F r a e n k e l, S.212. Die "Menge W" hätte gar nicht als Menge bezeichnet werden dürfen.

2) G. C a n t o r, Jb.d.D.M.V., Bd.1, 1892, S.77.

halten muss. So verhält es sich, aber die Formulierung und namentlich die Begründung dieser Behauptung sind fehlerhaft. Es ist übersehen, dass der genannte Inbegriff von dem aller Mengen gar nicht verschieden, dieser aber von vornherein als widerspruchsvoll zu erkennen ist [1]. Er hat, wie aller Widersinn, eine lediglich psychische Existenz, geht die Mathematik überhaupt nichts an.

H i e r m i t s i n d b e r e i t s a l l e s o g e n a n n t e n A n t i n o m i e n a u f g e z ä h l t, d i e j e t z t n o c h d e r M e n g e n l e h r e z u r L a s t g e l e g t w e r d e n.

Das mit Worten Gesagte lässt sich in einer Formel ausdrücken. Nach der Mengendefinition muss jede Menge mit mehr als einem Element,

$$M = \{P, Q, \ldots\},$$

in der durch sie eindeutig bestimmten umfassenderen und also von ihr verschiedenen Menge

$$M^* = \{P, Q, \ldots; M\}$$

(als Teilmenge) enthalten sein:

$$M^* > M$$

ist, n a c h d e r M e n g e n d e f i n i t i o m, das Kriterium, das rechtschaffene Mengen mit mehr als einem Element von widersinnigen Begriffsbildungen trennt, die fälschlich Mengen genannt worden sind.

I n s u m m a: Man hat die Mengentheorie durch Einschmuggelung eines ihr fremden Begriffs (s i t v e n i a v e r b o)

---

1) Ebenso steht es schon bei S c h o e n f l i e s. Spätere aber haben R u s s e l l s Argumentation mehrfach reproduziert. So auch F r a e n k e l.

verfälscht und ausserdem übersehen, dass dieser Begriff sinnlos ist.

Die verbreitete Meinung, dass die Definition C a n t o r s zu nebelhaft oder zu umfassend sei, halte ich, mit S c h o e n f l i e s, für ein Fehlurteil. Keinesfalls kann sie mit einem Hinweis auf die Antinomien begründet werden. Hirngespinste sind unter Umständen interessante Gegenstände der Psychologie. Für die Mathematik jedoch folgt aus ihrer Existenz nicht das geringste. Besonders auch nicht die angebliche Erbärmlichkeit der Analysis.

F. H a u s d o r f f, der die Definition C a n t o r s anders beurteilt, hat eben darum auf eine deutliche Beschreibung des Mengenbegriffs verzichtet. Er gibt, statt einer Definition, lediglich einige Beispiele von "Mengen". Damit lässt er die Frage nach dem Geltungsbereich der in seinem Werke enthaltenen Lehrsätze offen. Dieser Geltungsbereich wird g e n a u durch die soeben reproduzierte Definition angegeben. Nach meiner Ansicht ist die Forderung, dass die Voraussetzungen von Behauptungen genau anzugeben sind, auch für die Mengenlehre bindend.

Ich habe mich mit meinem Freunde, mit dem ich natürlich diesen ganzen Stoff durchgesprochen habe und dem ich auch einige Verbesserungsvorschläge verdanke, über diesen Hauptpunkt leider nicht einigen können.

Völlig verfehlt ist der finitistische Einwand, der von den Gegenständen der Mathematik "Konstruierbarkeit" verlangt. Nicht wegen einer angeblichen Unbestimmtheit dieses Begriffs, die man jedenfalls K r o n e c k e r nicht zum Vorwurf machen kann, sondern deshalb, weil das Wesen der Definition verkannt ist. Definieren heißt, für etwas, dessen Existenz als schon gesichert angesehen wird, einen Namen einführen (F r e g e). Von Sammel- oder

Gattungsdefinitionen, zu denen alle Definitionen der Mathematik gehören, wie z.B. irrationale Zahl, Funktion, Menge, müssen Beispiele angegeben werden, aus denen ersehen werden kann, dass der umschriebene und benannte Begriff nicht leer ist. Mehr zu verlangen, ist dogmatisch und unvernünftig, zerstört die Mathematik.

Wäre die genannte Forderung berechtigt, so wäre bei wirklicher Folgerichtigkeit auch schon der allgemeine Begriff der Primzahl, ja schon der der natürlichen Zahl, zu verwerfen. Das "Sieb der Eratosthenes" stellt bereits eine unerfüllbare Forderung. H. P o i n c a r é hat eine derartige Konsequenz wirklich gezogen. und dadurch den Finitismus, wider Willen, a d a b s u r d u m geführt (S.00).

Die Ausführungen R u s s e l s über das nach ihm benannte Paradoxon scheint noch niemand genau gelesen zu haben (!). Sonst hätte man schwerlich so dogmatisch zu Werke gehen können, wie z.B. F r a e n k e l es tut.

Zunächst fällt auf, dass bei R. die ganz und gar nicht überflüssige Einschränkung C a n t o r s, derzufolge die Elemente einer Menge (class) wohl unterschieden sein müssen, vollständig fehlt. Überall arbeitet R. mit verschwommenen Begriffen, deren manche er zu"Mengen"zusammenfasst. Ferner hätte bemerkt werden sollen, dass R. seiner Sache gar nicht sicher ist. Seine Theorie treibt bald hierhin, bald dorthin, wie eine losgerissene Boje.

Ich zitiere eine Reihe von Stellen aus der Schrift, von der die vermeintliche Erschütterung der Lehre C a n t o r s hauptsächlich ausgegangen ist, nämlich aus den P r i n c i p l e s o f M a t h e m a t i c s (1903).

S.69: A c o m p l e x / w h o l e c a n n e v e r b e o n e o f i t s o w n c o n s t i t u e n t s.

Das Gegenteil davon liest man später:

S.112: A c l a s s a s o n e m a y b e a t e r m o f i t s e l f a s m a n y. Dies, das man schlecht genug übersetzt hat, heißt: Eine Menge mag als Ganzes eines ihrer eigenen Elemente sein. Noch später kommen dem Autor wieder Bedenken:

S.358: T h e p o s s i b i l i t y t h a t w h o l e a n d p a r t m a y h a v e t h e s a m e n u m b e r o f t e r m s (e l e m e n t s) i s, i t m u s t b e c o n f e s s e d, s h o c k i n g t o c o m m o n - s e n s e.

Natürlich hätte es heißen müssen: i n c o m p a t i b l e w i t h l o g i c [1].

---

1) Eine erstaunliche Verwechselung. Common-sense (sagt das O x f o r d D i c t i o n a r y) is normal understanding, good practical sense in everyday affairs, general feeding of mankind or community.

Ebenda: Common-sense, therefore, is here in a very sorry plight; it must choose (?) between the paradox of Z e n o and the paradox of C a n t o r (Gemeint ist die Nichtexistenz einer größten Cardinalzahl). I d o n o t p r o p o s e t o h e l p i t, s i n c e i c o n s i d e r t h a t, i n t h e f a c e o f p r o o f s (?) i t o u g h t t o c o m m i t s u i c i d e i n d e s p a i r(!).

S.362: .... One would be tempted to say that the conception of the totality of things, or the whole universe of entities and existents, is in some way i l l e g i t i m a t e and inherently c o n t r a r y to l o g i c. B u t i t i s u n d e s i r a b l e (!!) t o a d o p t s o d e s p e r a t e a m e a s u r e (m e a s u r e?) a s l o n g a s h o p e r e m a i n s o f s o m e l e s s h e r o i c (?) s o l u t i o n.

S.368: Thus the application of C a n t o r s argument to the doubtful?cases yields contradictions(?), though I have been unable to find any point in which the argument appears faulty. The only solution I can suggest is, to accept the conclusion that there is no greatest (transfinite) number and(?) the doctrine of types and to deny that there are any true propositions concerning all objects or all properties. Yet the latter at least seems plainly false, since all propositions are at any rate true or false, even if they had no other common properties. (Hier ist übersehen, dass es auch völlig sinnlose Behauptungen gibt und dass gerade die zur Erörterung stehende dazu gehört.) I n t h i s u n s a t i s f a c t o r y s t a t e, I r e l u c t a n t l y l e a v e t h e p r o b l e m t o t h e i n g e n u i t y o f t h e r e a d e r. (Alle Hervorhebungen rühren von mir her.)

Mit diesem Schluss, der an eine Humoreske von M a r k T w a i n erinnert, scheint also R.s Mengentheorie endgültig gestrandet zu sein, und das ist sie denn auch. Indessen hat es nicht an Versuchen gefehlt, sie wieder flott zu machen. Nach einigen hier- und dorthin weisenden Meditationen (Z i g z a g T h e o r y, T h e o r y o f L i m i t a t i o n o f S i z e, N o - c l a s s T h e o r y) ist ein anscheinend groß angelegter Versuch derart gelungen, der aber einen recht dogmatischen Charakter hat und auch sonst nicht einwandfrei ist.(V i c i o u s - c i r c l e P r i n c i p l e, H i e r a r c h y o f T y p e s, A x i o m o f R e d u c i b i l i t y). Und dieses alles, und weitere Ausbesserungsversuche selbst davon, lediglich darum, weil es in einer Untersuchung über die Logik der Mathematik als unerwünscht (?) und allzu "heroisch" empfunden wird, den Geboten der gewöhnlichen Logik Folge zu leisten [1]. Eine Mathematik der Wünsche und Willkürakte, dazu noch vorgetragen in einer nahezu unlesbaren Sprache. Eine moderne Scholastik, die zehnmal schlimmer ist als die Scholastik der Scholastiker.

---

1) B. R u s s e l l, Proceedings of the London Mathematical Society, Bd.4, 1907. American Journal of Mathematics, Bd.30, 1908. A.N. W h i t e h e a d and B. R u s s e l l, Principia Mathematica, I. 1910, 1925; II. 1912, 1927; III. 1913, 1927 (alles in zwei Auflagen). Siehe ferner A. F r a e n k e l, 1928, S,244 - 268.

Andere"Paradoxien" oder "Antinomien", die der Mengenlehre ebenfalls in die Schuhe geschoben worden sind, würden vielmehr in der allgemeinen Logik abzuhandeln sein 1). Paradox (aber nur im Sinne von p u z z l i n g) ist zum Beispiel der witzig erdachte Begriff eines Barbiers, der alle Männer seines Dorfs barbiert, die sich nicht selbst barbieren; oder der aus dem Altertum überlieferte zirkelhafte Krokodilsschluss, den C e r v a n t e s bei Gelegenheit der Statthalterschaft von Sancho Pansa so hübsch verwertet hat. Übrigens ist schon von P. F i n s l e r, der das gleichfalls hierhergehörige R i c h a r dsche Paradoxon analysiert hat, hervorgehoben worden, dass bei weitem nicht jede zirkelhafte Definition widerspruchsvoll ist (Jb.d.D.M.V., Bd.34, 1925): x = 2 x - I. Der von R u s s e l l versuchte Ausschluss aller Definitionen derart schüttet das Kind mit dem Bade aus.

Die angeführten Beispiele zeigen lediglich, dass man Zusammenstellungen von Worten bilden kann, deren Widersinn nicht oder doch nicht für jeden auf den ersten Blick erkennbar ist - wie eben auch die Wortverbindung Menge (oder Gesamtheit), die mit einem ihrer Elemente zusammenfällt. An einem solchen Spiel kann man gelegentlich seine Freude haben, eine tiefere Bedeutung hat es nicht.

Ist das Vorgetragene richtig, so liegt die Sache genau so wie bei den Antinomien K a n t s, die nicht minder berühmt sind als die "der Mengenlehre" und ebenfalls eine nicht geringe Verwirrung angerichtet haben. Ist es überhaupt denkbar, dass es sich anders verhalten könnte?

---

1) Dies ist schon öfter bemerkt worden, so von F r a e n k e l. Den Unterschied jedoch, der zwischen "logischen" und "epistemologischen" Antinomien gemacht werden soll, verstehe ich nicht. Sie scheinen mir allesamt "logisch", nämlich unlogisch zu sein.

4.

Bedenken und Zusätze.

Gegen das Vorgetragene werden vermutlich Einwände erhoben werden. Einer besagt, dass die durch die Antinomien verursachte Beunruhigung nicht beseitigt ist. Dies räume ich ein. Es gibt indessen auch eingebildete Ursachen der Beunruhigung. Z u e r s t kommt doch wohl, dass nach bestem Vermögen ein Zustand hergestellt wird, der logisch einwandfrei zu sein scheint; d a n n, dass unnütze Verwickelungen und sonstige Schönheitsfehler vermieden werden; und zuletzt erst kommt, wenn überhaupt, in sehr weitem Abstand die Beschwichtigung einer schlecht, ja vielleicht gar nicht motivierten mathematischen Seelenangst. Derartigem kann man mit Gründen nicht beikommen. Zwangsvorstellungen gehen nicht den Mathematiker, sonder den Psychiater an.

E i n a n d e r e s B e d e n k e n: Ausser Mathematikern, die ihre Urteile leichthin bilden - sie z.B. fix und fertig aus der "Zentralstelle" des Denkens beziehen -, gibt es doch zum Glück auch andere. Ist es denn glaubhaft, dass ein so scharfsinniger und gewissenhafter Forscher wie F r e g e , wie es heisst auch D e d e k i n d, und nicht minder einwandfreie Mathematiker dieser Unserer Gegenwart, den Widerspruch zwischen $M > P$ und $M = P$ übersehen sollten? Ist es überhaupt möglich, dass die Auflösung der Antinomien, die eine ganze Literatur hervorgerufen haben, so lächerlich einfach sein kann, wie es von S c h o e n f l i e s behauptet worden ist und auch hier behauptet wird?

Wie man sieht, habe ich mich das schon selbst gefragt. Ich bin indessen zu dem Schluss gekommen, dass das wirkungsvollste - und wohlfeilste - aller Argumente, das a r g u m e n t u m

4.

Bedenken und Einwände.

Gegen das Vorgetragene werden vermutlich Einwände erhoben werden. Einer besagt, dass die durch die Antinomien verursachte Beunruhigung nicht beseitigt ist. Diese rühre ich ein. Es gibt indessen auch eingebildete Ursachen der Beunruhigung. Z w e i f e l kommt doch wohl, dass nach beiden Verfahren ein Zustand hergestellt wird, der logisch einwandfrei zu sein scheint; d a s s, dass unauflösliche Verwicklungen und sonstige Schönheitsfehler vermieden werden; und zuletzt erst kommt, wenn überhaupt, in sehr weitem Abstand die Besorgnis wegen einer möglicht, da vielleicht gar nicht motivierten mathematischen Gesetzmässigkeit. Derartigem kann man mit Gründen nicht beikommen. Zweifelvorstellungen gehen nicht den Mathematiker, sondern den Psychiater an.

E i n a n d e r e s B e d e n k e n: Unserer Mathematiken, die ihre Urteile leichthin bilden - wie z.B. fix und fertig aus der "Zentralstelle" des Denkens beziehen -, gibt es doch zum Glück auch andere. Ist es denn glaubhaft, dass ein so konstruierender und gewissenhafter Forscher wie F r e g e , wie es scheint auch D e d e k i n d, und nicht minder einwandfreie Mathematiker dieser Unserer Gegenwart, den Widerspruch zwischen M > P und M = P übersehen sollten? Ist es überhaupt möglich, dass die Auflösung der Antinomien, die eine ganze Literatur hervorgerufen haben, so lächerlich einfach sein kann, wie es von S o n s o e n f l i e s behauptet worden ist und auch hier behauptet wird?

Wie man sieht, habe ich mich das schon selbst gefragt. Ich bin indessen zu dem Schluss gekommen, dass das wirkungsvollste - und wohlfeilste - aller Argumente, das A r g u m e n t u m

a d h o m i n e m, keinen genügenden Grund zu literarischem Selbstmord abgibt. Mag man immerhin auch mich majorisieren oder ignorieren, wie man S c h o e n f l i e s majorisiert und ignoriert hat.

F r e g e hat sich, grundehrlich wie er war, der Argumantation R u s s e l l s, die er aus einer brieflichen Mitteilung kannte, tatsächlich gebeugt, obwohl er sein Lebenswerk nahezu zerstört glaubte. Ein leuchtendes Vorbild für solche, die Ausflüchte machen, wenn man ihnen Fehler nachweist (Grundgesetze der Arithmetik II, 1903, S.253, 254). Er sagt, es handle sich um seinen Grundsatz V. Das verstehe ich nicht, da ich Fr.s Begriffsschrift nicht lesen kann, Es kommt aber hier nichts darauf an.

Dass auch G. C a n t o r der Argumentation R u s s e lls zum Opfer gefallen sein sollte, ist sehr schwer zu glauben, wiewohl ihm seine theologischen Spekulationen allerdings einen bösen Streich gespielt haben. (Vgl. O. B e c k e r, 1927, S.83 = Zeitschrift für Philosophie und phänomenologische Forschung, Bd.VIII, S.523).

Gegen die Arbeit von S c h o e n f l i e s, auf die hier Bezug genommen worden ist, sind bald nach ihrem Erscheinen Einwendungen erhoben worden, und es scheint, dass ebendiese die Wirkung gehabt haben, dass der darin enthaltene und hier nochmals dargelegte Gedanke alsbald in der Versenkung verschwand 1)

Diese Einwände sind nicht alle unberechtigt, treffen aber Nebendinge. Ganz unberechtigt ist jedoch der Einwand, der den Kern der Sache treffen soll. Die Kritiker stimmen darin überein, dass sie den durch M = P gekennzeichneten widerspruchsvollen Begriffsbildungen E x i s t e n z zuschreiben. Sie unterscheiden aber nicht zwischen nur-psychischer und mathematischer Existenz.

Wie man nun auch den Begriff der mathematischen Existenz fassen mag, F r e i h e i t v o n W i d e r s p r ü c h e n muss jedenfalls verlangt werden. Im Betrieb der mathematischen Wissenschaft ist, wie schon dargelegt worden ist, natürlich auch Widerspruchsvolles nicht zu entbehren, es kommt aber nur vor, um

---

1) A. K o r s e l t, Jb.d.D.M.V., Bd.15, 1906, und G. H e s s e n b e r g, ebenda, Bd.17, 1908.

zurückgewiesen zu werden ($x^3 + y^3 = z^3$, x, y, z natürliche Zahlen), und so wird es insbesondere gebraucht im indirekten Beweisverfahren.

Bei K o r s e l t liest man, der C a n t o rsche Satz: "Zu jedem Inbegriff gibt es einen ~~höheren~~ Inbegriff von höherer Mächtigkeit" sei falsch (S.219). Das hat K. aber nicht bei C a n t o r gefunden. Er polemisiert gegen ein eigenes Mißverständnis.

Noch weniger umsichtig ist H e s s e n b e r g zu Werke gegangen. Bei ihm heisst es gar (S.147):

"Mit der Konstatierung, dass in eine Paradoxie widerspruchsvolle Begriffe eingehen, ist ... bestenfalls die T a t s a c h e d e r P a r a d o x i e konstatiert, was bei allgemein (?) anerkannten Paradoxien eine überflüssige Mühe ist - n i e m a l s a b e r i s t d a r i n e i n e L ö s u n g e n t h a l t e n" Es ist unmöglich, so etwas ernst zu nehmen. Selbstverständlich besteht die "Auflösung" einer "Paradoxie" eben darin, dass man den gemachten Denkfehler nachweist, - wie es S c h o e n f l i e s ~~gemachtxhatte~~ getan hatte.

Wer die "Antinomien der Mengenlehre" anerkennt, kann mit Aussicht auf einen gewissen Erfolg immer noch eines versuchen. Sie werden sich vielleicht umgehen lassen. Man kann auch gar nicht vorhandene Klippen umschiffen. So ist E. Z e r m e l o verfahren, der sich durch seinen Wohlordnungssatz ein bedeutendes Verdienst um die Mengenlehre älteren Stils erworben hatte, dann auch A. F r a e n k e l (1928, S.268 - 293).

D i e s o g e n a n n t e a x i o m a t i s c h e B e g r ü n d u n g s a r t d e r M e n g e n l e h r e vermeidet die Widersprüche, verstopft ihre Quelle aber nicht. Sie schießt

mit Kanonen nach Spatzen, die nicht da sind, und überdies ist sie zu formal. Schon damit kann ich nicht einverstanden sein, dass allgemeine Grundsätze des Denkens (κοιναὶ ἔννοιαι) als besondere "Axiome der Mengenlehre" hingestellt werden.

An der Selbstverständlichkeit, dass zu jeder Menge (jeder widerspruchsfrei gebildeten Menge!) eine Potenzmenge gehört, wird nicht das Mindeste dadurch geändert, dass man statt von einer Selbstverständlichkeit von einem Axiom spricht. Nur sieht das "philosophischer" aus. Es muss eben durchaus alles auf Axiomen beruhen. Am wenigsten können Psychologisten gegen die Existenz von Potenzmengen unendlicher Mengen etwas einwenden. Denn sie können sich auch schon die Potenzmengen hinreichend großer endlicher Mengen nicht vorstellen, deren Existenz sie zugeben. Keinesfalls können solche Betrachtungen mit dem Hinweis auf die Antinomien motiviert werden, wenn diese, wie doch wohl nachgewiesen sein dürfte, lediglich Gespenster sind. Und nun soll gar noch die gesamte Mathematik, mit den natürlichen Zahlen angefangen, auf eine so beschaffene Mengenlehre gegründet werden. T h. S k o l e m, der die Z e r m e l osche Theorie kritisiert hat [1], hat mit Recht auf die Künstelei derartiger Versuche hingewiesen - da doch die Arithmetik schon durch Induktionsschlüsse und rekurrente Definitionen hinreichend begründet ist.[2]

Im Zusammenhang mit den Antinomien ist mehrfach (von den mathematischen Intuitionisten) vor einer gedankenlosen Anwendung

---

1) Wissenschaftliche Vorträge, gehalten auf dem fünften Kongress der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors.(1922) 1923.

2) Auf dem Mathematikerkongress zu Heidelberg (1904) soll C a n t o r einen seiner Bemängler gefragt haben: Geben Sie mir die Existenz der Zahl Zwei zu? Ja? Dann lassen Sie sich umarmen! Sie haben mir alles zugegeben.

der Begriffe i m m e r, a l l e, j e d e r auf Unendliches gewarnt werden.

Es liegt gar kein Grund zur Beunruhigung vor. Bei Gebrauch der ü b e r a l l nötigen Vorsicht können die Begriffe immer, alle, jeder ganz selbstverständlicherweise auf Unendliches angewendet werden, und zwar mit vollkommener Sicherheit. Man könnte ja auch das Addieren verbieten wollen, weil dabei zuweilen Irrtümer vorkommen.

5.

Andere Beurteilungen der Antinomien.

Dass Widersprüche im Denken in Verstößen gegen die Logik ihre Quelle haben müssen, dürfte wohl, von einigen Eigenbrötlern abgesehen, allgemein zugestanden werden.

Im Falle der Mengenlehre konnte der Umstand, dass die Quelle des Widersinns einigermaßen im Verborgenen floss, eine beträchtliche Unsicherheit hervorrufen. Das mehrfach erwähnte Werk von A. F r a e n k e l leidet in seiner zweiten Hälfte sehr darunter. Alles, was dort abgehandelt wird, ist mit Gespensterfurcht motiviert und nach meiner Meinung nicht richtig bewertet. Was sollen uns noch so "grandiose" oder "gigantische" Lehrgebäude, wenn den Problemen eine vernünftige Motivierung fehlt und der Aufbau überdies dogmatisch und unlogisch ist? In dem Buche von F r a e n k e l selbst kommt noch dazu, dass sein zweiter Teil den ersten verleugnet (nicht nach F r a e n e k s eigener Meinung, aber tatsächlich), und dass, wie bei R u s s e l l, alles unklar hin und her schwankt. Von dem doch schon vorhandenen Versuch, C a n t o r s Kritikern das Wasser abzugraben, berichtet die einhundertundachtzig Druckseiten umfassende Schilderung Fr.s überhaupt nichts.

Neuerdings hat K. M e n g e r einen weiteren solchen Versuch gemacht (Jb. d. D. M. V., Bd.37, 1928). Gleich anderen hat er aber den Wortlaut der Mengendefinition nicht beachtet oder nicht sinngemäß aufgefasst.

Auch er ist der Begriffsschiebung zum Opfer gefallen, die von den Logistikern verursacht worden war. Er arbeitet, wie R u s s e l l, mit dem Begriff von "Mengen, die sich nicht als Element enthalten", lässt also auch anders geartete "Mengen" zu. Ausserdem soll es noch "Unmengen" geben, die M. nicht als widerspruchsvoll betrachtet, die nämlich, nach ihm, anderen "Gesetzen" folgen als die Mengen. Durch die Verwechslung von Unmengen mit Mengen lässt er die Antinomien zustande kommen.

Die "Gesetze", denen die Unmengen folgen sollen, sind die des Widersinns, und auch in dem verwendeten Mengenbegriff steckt noch der hier kritisierte Widersinn. Ausserdem liegt ein ~~air~~ c i r c u l u s v i t i o s u s vor. Es geht nicht an, die Unmengen dadurch z u d e f i n i e r e n, dass sie den Gesetzen der Mengenlehre nicht folgen, und dann zu behaupten, man hätte

sie mit Mengen verwechselt. Die Antinomien sind nicht beseitigt, sondern lediglich mit Hilfe eines Zauberwortes eskamotiert. Begriffe, die verwechselt werden können, müssen unabhängig von einander definiert sein.

Mit der Parallelisierung von u n -endlichen, u n -abzählbaren, u n -mengenhaften Inbegriffen, in denen das Präfix eine Negation bedeutet, kann man allenfalls eine Terminologie motivieren, aber nichts begründen.

Im gemeinen Sprachgebrauch bezeichnet das Wort M e n g e einen nicht näher bekannten Inbegriff zahlreicher Gegenstände (Menge von Geld, von Druckfehlern usw.), U n m e n g e aber einen ~~Begriff~~ Inbegriff, dessen Ausmaß alle Vorstellung übersteigt. So, wie M. das Wort gebrauchen will, kann es jedenfalls nicht verwendet werden, wohl aber könnte man es den durch die Gleichung M = P charakterisierten fehlerhaften Begriffsbildungen anheften.

Dann würde allerdings auch schon das papierne Monstrum

$$P = \{P,Q\} = \{\{P,Q\}, Q\} = \ldots,$$

das nur zwei "Elemente" enthält, Unmenge heissen müssen.

Eine Garantie dafür, dass nirgends ein Fehlschluss unterläuft, kann es natürlich nicht geben. Bis ~~Fehler~~ bündigen Beweise des Gegenteils wird, gleich anderen mathematischen Theorien, so auch der Bestand der Mengenlehre - der Mengenlehre C a n t o r's! - als gesichert gelten dürfen.

XIX.

D a s s o g e n a n n t e E n t s c h e i d u n g s p r o b l e m u n d d a s i n d i r e k t e B e w e i s v e r f a h r e n.

Immer hat es in der Mathematik Vermutungen gegeben (die öfter auch in Gestalt von Behauptungen auftraten), über deren Richtigkeit man nicht in's Reine kommen konnte. Eine Vermutung, sogar allereinfachster Art, bei der die Sache noch heute so liegt, ist der sogenannte G o l d b a c h' s c h e S a t z: "Jede gerade Zahl, mit Ausnahme der Zahl 2, ist Summe zweier Primzahlen"[1]. Die Zahlentheorie kennt noch mehr derartiges, wie z.B. die Frage, ob es nur eine endliche Zahl von malen oder unendlich oft vorkommt, dass zwei Primzahlen die Differenz 2 haben.

---

1) 2 = 1 + 1. Die Einheit wird nicht als Primzahl bezeichnet.

XIX.

Das sogenannte Entscheidungsproblem und das indirekte Beweisverfahren.

Immer hat es in der Mathematik Vermutungen gegeben (die öfter auch in Gestalt von Behauptungen auftraten), über deren Richtigkeit man nicht ins Reine kommen konnte. Eine Vermutung, sogar allgemeinster Art, bei der die Sache noch heute so liegt, ist der sogenannte Goldbach'sche Satz: "Jede gerade Zahl, mit Ausnahme der Zahl 2, ist Summe zweier Primzahlen[1]. Die Zahlentheorie kennt noch mehr derartige, wie z.B. die Frage, ob es nur eine endliche Zahl von Zwillingen oder unendlich oft vorkommt, dann zwei Primzahlen die Differenz 2 haben.

[1]) 2 = 1 + 1. Die Einheit wird nicht als Primzahl betrachtet.

Die älteren Mathematiker scheinen mir in ihrer Bescheidenheit alle der Ansicht gewesen zu sein, dass das Misslingen in solchen Fällen (auch in den hoffnungslosesten) an menschlicher Unvollkommenheit liegen müsse; dass also eine (nicht widerspruchsvolle) Frage mathematischen Inhalts sich immer müsse beantworten lassen, wenn auch vielleicht nicht durch sterbliche, mühselige und beladene, ungeduldige und vergessliche Menschen, so doch durch das Fabelwesen p , dem wir ja dieselben Denkmittel zugeschrieben hatten, die uns selbst zu Gebote stehen, und Unfehlbarkeit dazu.

Die Physik sagt, dass im Schwerpunkt des Erdkörpers eine sich nur sehr langsam ändernde Temperatur herrscht. Setzen wir den Fall, dass sie hinreichend lange 6023,75° betrage, so werden die Physiker schwerlich imstande sein, f ~~deren~~ dieses Wert genau zu ermitteln. Sie finden das begreiflich. Nur Mathematiker haben analogen Erscheinungen in ihrer Wissenschaft Bedeutung beigelegt.

So wie hier ausgedrückt hat man den beschriebenen Gedanken allerdings wohl noch nicht, aber darauf kommt es nicht an. Wenn jemand die Ansicht hat "ein jedes" mathematisches Problem (gemeint sind einwandsfrei gestellte Probleme) sei "grundsätzlich" oder "prinzipiell" lösbar, so will er dasselbe sagen, und wenn ein anderer kurzweg behauptet, er halte alle mathematischen Probleme für lösbar, so meint auch er nichts anderes. Im letzten Falle aber wird eine Mißdeutung nicht ausgeschlossen. Es kann verstanden werden, dass nach Meinung dessen, der spricht, irgend ein Sachverständiger die Lösung herstellen kann, so bald es ihm nur der Mühe wert erscheint. Offenbar sind diese beiden Aussagen grundverschieden. Sie werden aber tatsächlich sehr oft mit einander verwechselt.

So werden sie von allen denen verwechselt, die behaupten, durch H i l b e r t's ~~Satz~~ (natürlich wertvollen) Satz von der Endlichkeit der Invariantensysteme sei das von C l e b s c h und G o r d a n in besonderen Fällen gelöste Problem, das Hauptproblem der Invariantentheorie, allgemein erledigt worden. (Siehe z.B. A. O s t r o w s k i, Jb.d. d. D. M. V., Bd.33, 1924, S.174).

Man sollte mit dem Ausgeben und Nachsprechen von Werturteilen vorsichtiger sein. So manche Münze mit unzutreffender Aufschrift ist schon in Umlauf gesetzt worden, insbesondere auch von der "Zentralstelle" mathematischen Denkens aus.

Es muss also unterschieden werden zwischen dem (fiktiven) "Können" des Wesens p und dem (wirklichen) Können von Menschen oder einigen Menschen. Mir scheint es angezeigt, da, wo das Wesen p tatsächlich auftritt, das auch zum Ausdruck zu bringen, damit sein freundlicher, wenn auch nur fiktiver Beistand nicht vergessen werde.

Der genannten, wie es scheint (?), unbegründeten, Ansicht jener älteren Mathematiker haben nun neuere, schon K r o n e c k e r, dann P a s c h, besonders aber die Intuitionisten, und zwar diese mit vielem Nachdruck, eine andere Meinung gegenüber gestellt:

Es soll im Bereiche der Möglichkeit liegen, dass (einwandsfrei gestellte) Fragen mathematischen Inhaltes sich (selbst durch das Wesen p) nicht würden beantworten lassen.

Von K r o n e c k e r liegt darüber nur eine ganz kurze Äußerung vor. Sie steht in der Festschrift für K u m m e r, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen, Journal für Mathematik, Bd.92 (1881) 1882 auf Seite 11.

Siehe ferner M. P a s c h, 1918. Man beachte, wie vorsichtig P a s c h sich ausdrückt!

Freilich habe ich auch gegen seine Ausführung, die mir viel besser durchdacht zu sein scheint, als alles, was die Intuitionisten über die Grundlage der Mathematik geschrieben haben, einen Einwand.

Wenn verlangt wird, dass solche Behauptungen, bei deren Begründung das indirekte Beweisverfahren nicht entbehrt werden kann, von den anderen gesondert werden sollen, so wird schließlich auch noch diese ihre Eigenschaft bewiesen werden müssen. Das aber würde, so viel ich sehe, eine ungeheure Belastung der mathematischen Literatur bedeuten, die ohnehin schon mit zuviel Unproduktivem beschwert ist.

Ist die genannte Möglichkeit nicht etwa nur eine Illusion, so muss bei dem Aufbau der Mathematik unbedingt Rücksicht darauf genommen werden.

Zum Beispiel tritt im Falle des Goldbach'schen Satzes, so lange er nicht bewiesen ist, neben die früher allein als möglich betrachteten Urteile gültig, ungültig noch ein drittes Urteil, die Behauptung einer möglichen Unentscheidbarkeit. Oder, wenn G o l d b a c h's Vermutung in die Form einer Frage gesetzt wird, es tritt an Stelle der doppelten Alternative Ja, Nein eine dreifache.

A_1) Ja, A_2) Nein, B) Unentscheidbarkeit.

Wenn nun auch nicht jede Frage mathematischen Inhalts auf Ja und Nein gestellt werden kann, so hat doch dieser Fall eine besondere Bedeutung. Er liegt nämlich überall da vor, wo in der Mathematik das indirekte Schlussverfahren, die reductio ad absurdum, nicht entbehrt werden kann; also in einer Menge von Beweisen, deren Streichung von der Mathematik zwar immer noch Wertvolles, im Ganzen aber doch nur einen Trümmerhaufen übrig lassen würde. Hat man gezeigt, dass die Annahme A_2 unmöglich ist, so "folgt" jetzt nicht mehr A_1, sondern es bleibt die Alternative A_1, B übrig, mit der man nichts anfangen kann.

Hat man es nur mit einer endlichen Menge von "Dingen" (natürlichen Zahlen und "konstruktiv" daraus abgeleiteten Begriffen) zu tun, so tritt dieser sehr missliche Umstand allerdings noch nicht auf. Dann aber lässt sich das indirekte Beweisverfahren entbehren (Immer theoretisch entbehren - für das Wesen p -, und meistens auch praktisch). Die indirekte Schlussweise wird daher gewöhnlich nur auf unendliche Mengen angewendet, wo sie dann Existentialsätze liefert. Also gerade in den Fällen wird die indirekte Schlussweise anzig angewendet, in denen sie unzulässig sein soll [1].

1) B r o u w e r gibt ausserdem an, dass man diese Schlussweise zunächst im Endlichen angewendet und dann gedankenlos auf

Es versteht sich wohl von selbst, dass der Mehrheit der Sachverständigen eine derartige Behauptung unannehmbar sein muss, wenn ihnen nicht wenigstens an einem Beispiel nachgewiesen werden kann, dass es einwandsfrei gestellte und gleichwohl nicht zu beantwortende mathematische Fragen gibt. Tatsächlich hat B r o u w e r Beispiele zu konstruieren gesucht. Der Gedanke einer solchen Konstruktion ist folgender: Es wird von unbegrenzt vielen Stellen der Dezimalentwickelung der Zahl π (3, 14159...) eine andere Zahl ν abhängig gemacht, von der man z.B. nicht weiß, ob sie rational ist oder nicht. Da nun die Entwickelung von π nicht bis in's Unendliche durchlaufen werden kann, - auch nicht von dem Wesen p - so soll es unmöglich sein, die fragliche Angabe zu machen.

Dieser Schluss ist offenbar falsch. Es könnte ja auf andere Art gelingen, so unwahrscheinlich das auch ist. Niemand kann sagen, was alles aus irgend einer Prämisse folgt. Es lässt sich nicht zeigen, dass unter den möglichen Folgerungen keine ist, die in den Bereich des Entscheidbaren fällt.

Aber B r o u w e r will mit seinem Beispiel noch viel mehr bewiesen haben. Die Zahl $\overset{\nu}{\alpha}$ soll weder <0 noch $=0$ noch >0, weder rational, noch irrational sein, und ausserdem soll eine bei dieser Gelegenheit gefundene Zahlenmenge weder endlich noch unendlich sein [1].

Unendliches übertragen hat. Ich halte das nicht für richtig, es ist aber dies eine historische Frage, durch deren Beantwortung sachlich gar nichts ausgemacht wird.

1) 1925, S.2,3. - Man vergleiche mit dem, was folgt, die Darstellung, die A. F r a e n k e l auf Seite 236 von diesen Thesen B r o u w e r's gegeben hat.

Dieses ist der Sinn der Behauptungen B r o u w e r's. Er selbst bedient sich jedoch einer eigenen von ihm andererseits noch weiter ausgebildeten Terminologie, und er drückt alles auf eine ziemlich verschrobene Art und nicht immer sinngemäß aus. Wie gesagt will er (wie auch W e y l, vgl. Seite 000) nichts davon wissen, dass die reellen Zahlen eine geordnete Menge bilden, d.h., dass zwischen je zweien a und b von ihnen immer eine der Beziehungen

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b$$

bestehan muss. Diese Behauptung versucht B r. wiederzugeben, aber sie nimmt bei ihm eine sinnwidrige Form an. (1925, S.3):

> " Wenn ... einerseits $a < b$ entweder gilt oder unmöglich ist, andererseits $a > b$ entweder gilt oder unmöglich ist, so gilt entweder $a < b$ oder $a > b$ oder $a = b$."

Gelten und Unmöglichsein schließen einander aus, sind aber nicht Gegensätze. Es handelt sich um Zutreffen oder Nichtzutreffen, Richtig oder Falsch. Brauchen wir die sachgemäßen Worte, so sehen wir, dass der mit Wenn eingeleitete Vordersatz nichtssagend und also sinnlos ist.

Sehr verzwickt ist das von B r. ausgeführte Beispiel. Ich nehme daher eine Änderung vor, natürlich nur eine solche, die das, worauf es für B r. ankommt, nicht betrifft.

Das Motiv der anzustellenden Überlegung ist eine Wahrscheinlichkeitsbetrachtung, die ich zu besserem Verständnis vorausschicken will.

Wenn $c_0, c_1, \ldots c_8, c_9$ eine Folge von zehn Ziffern in der Dezimalentwicklung von π ist, der Bestimmtheit halber eine, deren Ziffern nicht alle einander gleich sind, so ist die mittlere Dichte des Vorkommens dieser Ziffernfolge, trotz der Gesetzmäßigkeit des π darstellenden Dezimalbruchs, sehr wahrscheinlich $(10)^{-10}$. Das heisst, wenn das Wesen p auf einen unbegrenzt langen Papierstreifen die Entwicklung von π hineinzuschreiben beginnt, und jede Ziffer den Raum von einem Millimeter einnimmt,

so wird die vorgeschriebene Ziffernfolge durchschnittlich auf der Strecke von zehn Kilometern einmal vorkommen.

Wir nehmen an, dass die Folge $c_0 \ldots c_9$ nicht durchweg einander gleiche Ziffern unter den schon berechneten Ziffern nicht vorkommt 1).

Es sei nun n die Stellenzahl einer Ziffer hinter dem Komma, und $a_n = 0$, ausser dann, wenn gerade an der n^{ten} Stelle eine Ziffernfolge $c_0 \ldots c_9$ beginnt. Dann sei

$$a_n = \left(-\frac{1}{2} \right)^n .$$

Unter diesen Voraussetzungen ist die Summe $\sum a_n$ konvergent und zwar ist ihr Vorzeichen das des ersten von Null verschiedenen Wertes von a_n.

Wir wissen nun nicht:

(1) Ob die Summe $\sum a_n$ keine oder endlich viele oder unendlich viele von Null verschiedene Glieder enthält.

(2) Ob im letzten Falle ihr Wert rational oder irrational ist.

(3) Ob der Wert von $\sum a_n$ negativ oder Null oder positiv ist.

Es liegt also in jedem Falle eine Alternative vor. Statt entweder-oder lesen wir aber bei B r o u w e r weder-noch!!

Nach diesem salto mortale hat B r. natürlich leichtes Spiel, zu "beweisen", was er will. Es gibt jetzt für ihn Zahlen und Zahlenmengen, von deren Existenz Niemand vor ihm eine Ahnung gehabt hatte. B r. erklärt demgemäß für unrichtig:

I. wie gesagt die Behauptung, dass die reellen Zahlen eine geordnete Menge bilden.

II. die Behauptung, dass eine Menge von Dingen (Begriffen)

---

1) Nach einer Angabe von K o w a l e w s k i sollen 707 Ziffern berechnet worden sein.

notwendig endlich oder unendlich ist.

III. Eine Anzahl grundlegender Sätze der Analysis.

Nicht als ob immer da, wo ein Satz falsch ist, die Sprachfigur (?!) des Widerspruchs [1] erscheinen müsste:

"Eine durch keinen Widerspruch zu hemmende unrichtige Theorie ist darum nicht weniger unrichtig, so wie eine durch kein reprimierendes Gericht zu hemmende verbrecherische Politik darum nicht weniger verbrecherisch ist."

In Wirklichkeit ist natürlich nur bewiesen, was man immer schon wusste: Dass sich mehr Fragen stellen lassen als sieben Weise beantworten können.

Dass die Argumentation B r o u w e r's auf Psychologisches verweist, ist klar. Auch B r. selbst scheint darüber im Klaren zu sein [2]. Er befindet sich auch in dieser Hinsicht in Übereinstimmung mit W e y l. Die von B r. vorgenommene Verwässerung des Begriffs Beweis ist gleichbedeutend mit der Einführung eines verfälschten Wahrheitsbegriffs. Auf die unvermeidliche Tatsache unserer Unkenntnis von dem und jenem kann keine Theorie gegründet werden! [3]

Es ist die denkbar schlechteste Empfehlung für das Neue, wenn es mit einer völlig verfehlten Kritik des Alten einsetzt.

Beiläufig sehen wir wiederum, dass der Intuitionismus

---

1) F r a e n k e l scheint Gewicht darauf zu legen, dass B r. die Unabhängigkeit der Mathematik ~~wie~~ der mathematischen Sprache betont. Mir ist nicht bekannt, dass irgend jemand eine Abhängigkeit derart angenommen hätte, ausser Laien, die die Mathematik mit dem Formelwerk verwechseln.

2) Math. Annalen, Bd.38, 1921, S.210; Bd.93, 1925, S.256.

3) Hier zeigt sich eine Verwandtschaft B r o u w e r's mit B e r g s o n, D r i e s c h und anderen Vitalisten. Lebenskraft (Elan vital, Entelechie) ist ein Deckname für eine besondere Art von Unkenntnis.

seinen Namen nicht ganz mit Recht führt. Was hat die besprochene Argumentation mit Intuitionen zu tun?

Von sonstigen Ausführungen B r's sei der folgende Satz mitgeteilt [1]:

Absurdität der Absurdität der Absurdität ist äquivalent mit Absurdität.

Das ist nicht etwa ein Witz, Was sollen wir mit dieser Häufung von Absurditäten anfangen? Logik und Erkenntnistheorie haben das größte Interesse daran, solchen ungebetenen Gästen schleunigst die Tür zu weisen. Die Mathematik hat nicht einmal mit dem Satz, dass zwei hinter einander gestellte Negationen einander aufheben, etwas anfangen können.

Hier sei wieder einigen der Dithyramben eine Stelle gegönnt, die W e y l, der Philosoph, vom Stapel gelassen hat. W. spricht von dem "zu Ende gedachten" Idealismus in der Mathematik!

Wie ich mich freue, ausnahmsweise einmal mit Herrn W e y l einverstanden zu sein! Ja, wir stehen mit dieser Mathematik, dieser "reifgewordenen Logik" genau in jenem Schnittpunkt von Gebundenheit und Freiheit (?), welcher das Wesen (?!) des Menschen selbst ist!" (1925, S.12, 23, 24.)

Zum Glück hängt die Frage der Entscheidbarkeit an etwas ganz anderem.

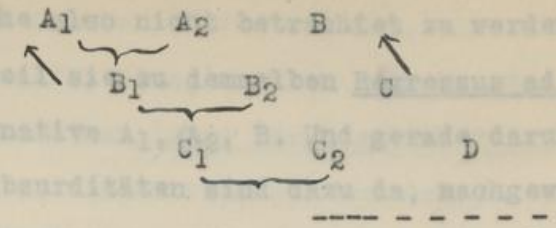
Wir bemerken, dass die Alternativen A_1 und A_2 zusammen das kontradiktorische Gegenteil von B darstellen. Sie bedeuten eine weitere Gliederung der Alternative

B_1) Entscheidbarkeit B_2 Nichtentscheidbarkeit.

Und gegen diese Alternative kann derselbe Einwand erhoben werden wie gegen die Alternative A_1, A_2; dass nämlich eine dritte Möglichkeit C in Betracht zu ziehen sei, derzufolge auch zwischen Entscheidbarkeit und Nicht-Entscheidbarkeit nicht entschieden werden kann. Und so weiter, ad infinitum! oder vielmehr vom

1) Jb.d.D.M.V., Bd.33, 1925. Auch O. B e c k e r, 1927, S775.

Unendlichen her, nach folgendem Schema:



Hier sind wir also bei einer handgreiflichen Absurdität angelangt.[1)]

Ebenso liegt die Sache auch im Falle einer Alternative $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, ja, wie man leicht erkennt, unter noch sehr viel umfassenderen Voraussetzungen.

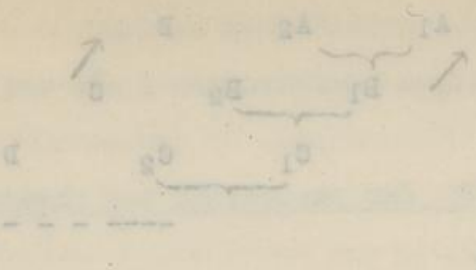
Man sieht, dass die Entscheidungsfrage falsch gestellt ist. Nicht nur ist das vorgeführte Beispiel verfehlt, auch jeder andere Versuch, ein solches Beispiel zu konstruieren, muss scheitern.

Der soeben ausgeführte Gedanke liegt so nahe, dass man glauben sollte, er müsse sich einem jeden darbieten, der von der Entscheidungsfrage hört [2)]. Es war das erste was mir einfiel, als ich im Jahre Kunde davon bekam. Meine damalige Hoffnung, Herr B r., dessen Ausführung über die Zahl π Widerspruch gefunden hatte, würde zu besserer Einsicht kommen, ist leider nicht in Erfüllung gegangen, und in der Literatur habe ich mich vergeblich nach einer genügenden Kritik der B r o u w e r'schen Überlegungen umgesehen.

---

1) Für den Intuitionisten liegt der Anfang (sit venia verbo) dieser Folge von Gliederungen sogar in einer unendlich fernen Vergangenheit. Denn die Geltung des Mathematischen hängt nach ihm vom Denken ab, und dieses verläuft in der Zeit.

2) Zweifellos würde B o l z a n o so geschlossen haben, wenn ihm die Entscheidungsfrage vorgelegt worden wäre. Siehe die schon einmal zitierten Stellen (1837, § 32, 41).



Hier sind wir also bei einer Bedingung angelangt.[1])

Ebenso liegt die Sache auch im Falle einer Alternative $A_1, A_2, \ldots A_n, B$, ja, wie man leicht erkennt, unter noch sehr viel umfassenderen Voraussetzungen.

Man sieht, dass die Entscheidungsfrage falsch gestellt ist. Nicht nur ist das vorausgesetzte Beispiel verfehlt, auch jeder andere Versuch, ein solches Beispiel zu konstruieren, muss scheitern.

Der soeben ausgeführte Gedanke liegt so nahe, dass man glauben sollte, er müsse sich einem jeden darbieten, der von der Entscheidungsfrage hört [2]). Ich war den erste was mir einfiel, als ich im Jahre Kunde davon bekam. Meine damalige Hoffnung, Herr B r., dessen Äußerung über die Zahl π widersprach gelungen hatte, würde zu besserer Einsicht kommen, ist leider nicht in Erfüllung gegangen, und in der Literatur habe ich mich vergeblich nach einer genügenden Kritik der B r o u w e r'schen Überlegungen umgesehen.

---

1) Für den Intuitionisten liegt der Anfang (cit venia verbo) dieser Folge von Bedingungen sogar in einer unendlich fernen Vergangenheit. Denn die Geltung des Kontinuitätsaxioms hängt nach ihm von Denken ab, und dieses verläuft in der Zeit.

2) Ebenso wurde B o l z a n o sie gewonnen haben, wenn ihm die Entscheidungsfrage vorgelegt worden wäre. Siehe die schon einmal zitierten Stellen (1837, § 32, 41).

Vielleicht wird man sagen, die Alternative B_1, B_2, C sei absurd, brauche also nicht betrachtet zu werden. Freilich ist sie absurd, weil sie zu demselben Regressus ad infinitum führt wie die Alternative A_1, A_2, B. Und gerade darum muss sie betrachtet werden. Absurditäten sind dazu da, nachgewiesen, nicht aber vornehm ignoriert zu werden, wenn es sich um so wesentliche Dinge handelt, wie die gesamte Analysis.

Wäre der Intuitionist nicht so sehr von sich selbst überzeugt, so würde ihm auch eingefallen sein, dass man mit gleichem Rechte sagen könnte:

Auch neben Sinn und Unsinn gibt es unter Umständen noch ein drittes, die Unmöglichkeit einer Unterscheidung des einen vom anderen!

In der Tat! Da sind nicht nur Theologen (denen hier, wie an den Universitäten, der Vorrang gebührt) und Philosophen, sondern auch noch viele andere, die sich nie darüber haben einigen können, was Sinn hat und was nicht. Und ein Kriterium für Sinn oder Unsinn gibt es nun einmal nicht. Ein absoluter Denkzwang, dem ein jeder sich fügen müsste, existiert ebenfalls nicht. (N i e t z s c h e!). Warum also sollte der Intuitionist sich nicht auch noch zu diesem letzten Schritt entschließen? Ich sehe wirklich keinen Grund, der von seinem Standpunkt aus geltend gemacht werden könnte. Wenn man schon einmal in Geltungsfragen mit Psychologischem arbeitet, so kann gegen diese Argumentation nichts eingewendet werden.

Die Mathematiker waren zweitausend Jahre lang die einzigen unter allen Menschen, die sich über Sinn und Unsinn verständigen konnten. Diese unsere schöne Welt, der Intuitionist hat sie zerschlagen. Und für eine solche Wohltat sollen wir ihm womöglich

noch dankbar sein!

Wirklich dankbar dürfen wir ihm, oder wenigstens B r o u w e r, jedoch dafür sein, dass er im Falle der Alternative A_1, A_2, B zugestanden hat, dass ihm, dem Intuitionisten, die Beweislast zufällt. Von diesem Gedanken aus ist ja das besprochene Beispiel konstruiert.

Auf dem Titelblatt eines längst vergessenen Buches stand zu lesen: Zweite Lieferung des zweiten Bandes. Was hätte vorausgehen sollen, ist nie erschienen. Auch der Intuitionismus scheint mir eine solche zweite Lieferung eines zweiten Bandes zu sein.

Wenden wir uns nun noch einmal zum Finitismus, so finden wir, dass für diese Standpunktsmathematik das Entscheidungsproblem noch aus einem anderen Grunde sinnlos ist. Da nämlich auch der Finitist die Gesamtheit der Folgerungen nicht übersehen kann, die sich aus irgend einer seiner Prämissen ziehen lassen, so wird ihm diese Gesamtheit zu einem unzulässigen, sinnlosen Begriff.

Auf diesen Begriff, auf etwas das nicht konstruiert werden kann, das also "gar nicht existiert", bezieht sich des Finitisten Frage nach der Entscheidbarkeit!

Ausserdem ist auch Entscheidbarkeit kein entscheidungsdefiniter Begriff. Auf beiden Verbotstafeln, der finitistischen wie der intuitionistischen, steht, dass man ihn nicht verwenden darf!

Aus demselben Grunde gehört auch die Frage "Finitismus oder Intuitionismus oder ... ?" zu denen, die nach der finitistischen oder intuitionistischen Grundansicht nicht entschieden werden können.

XX.

Die angebliche Sinnlosigkeit von Existentialsätzen.

Zusammenfassung.

Die intuitionistische Lehre gipfelt in einer These, deren zerstörende Wirkung wo möglich noch größer ist als alles, wovon bisher die Rede war.

Eines der wichtigsten Hülfsmittel der herkömmlichen Analysis ist der nach Bolzano und Weierstrass benannte Satz: Eine im Intervall $a \leq x \leq b$ (einem "abgeschlossenen" Intervall) gelegene unendliche Zahlenmenge ("Punktmenge") hat irgendwo in diesem Intervall (zu dem auch die Grenzen a und b zu rechnen sind) eine Häufungsstelle ("einen Häufungspunkt"). Das heisst, es gibt in diesem Intervall mindestens eine Stelle $x = x_0$, in deren noch so naher Nachbarschaft Stellen (Punkte) der Menge liegen (natürlich dann unendlich viele).

Der Beweis, bei dem angenommen werden darf, dass nicht schon a oder b Häufungspunkt ist, wird bekanntlich so geführt, dass man das Intervall von a bis b, zunächst, etwa in zwei gleichgroße (ebenfalls abgeschlossene) Teilintervalle zerlegt. Ist der benutzte Teilpunkt selbst ein Häufungspunkt, so ist man bereits am Ziele. Wenn nicht, so müssen in mindestens einem der Teilintervalle unendlich viele Punkte der Menge liegen. Man kann dann auf dieses Teilintervall dasselbe Verfahren anwenden und so weiter. Da jedes der aufeinander folgenden Teilintervalle in dem unmittelbar vorhergehenden liegt, und halb so lang ist als dieses, so konvergiert dieser Prozess auch dann, wenn er nicht abbricht, gegen eine bestimmte Zahl (einen bestimmten Punkt) x_0, die ohne weiteres

XX.

Die unendliche Häufigkeit von Existentialsätzen.

Zusammenfassung.

Die intuitionistische Lehre gipfelt in einer These, deren zerstörende Wirkung wo möglich noch größer ist als alles, wovon bisher die Rede war.

Eines der wichtigsten Hilfsmittel der herkömmlichen Analysis ist der sogen. Bolzanosche und Weierstraßsche benannte Satz: Eine im Intervall $a \leq x \leq b$ (einem abgeschlossenen "Intervall") gelegene unendliche Zahlenmenge ("Punktmenge") hat irgendwo in diesem Intervall (es dem auch die Grenzen a und b zu beiden sind) eine Häufungsstelle ("einen Häufungspunkt"). Das besagt, es gibt in diesem Intervall mindestens eine Stelle $x = x_0$, in deren noch so nahe Nachbarschaft Stellen (Punkte) der Menge liegen (natürlich dann unendlich viele).

Der Beweis, bei dem angenommen werden darf, daß nicht schon a oder b Häufungspunkt ist, wird bekanntlich so geführt, daß man den Intervall von a bis b, zunächst, etwa in zwei gleichgroße (ebenfalls abgeschlossene) Teilintervalle zerlegt. Ist der benutzte Teilpunkt selbst ein Häufungspunkt, so ist man bereits am Ziele. Wenn nicht, so müssen in mindestens einem der Teilintervalle unendlich viele Punkte der Menge liegen. Man kann dann auf dieses Teilintervall dasselbe Verfahren anwenden und so weiter. Da jede der aufeinander folgenden Teilintervalle in dem unmittelbar vorhergehenden liegt, und halb so lang ist als dieses, so konvergiert dieser Prozess auch dann, wenn er nicht abbricht, gegen eine bestimmte Zahl (einen bestimmten Punkt) x_0, die selbst weiteren

als Häufungspunkt der vorgelegten Menge zu erkennen ist.

Davon, dass man den geschilderten Prozess bis ins Unendliche hin durchführen sollte oder könnte, ist nicht die Rede. Es wird nur die Konvergenz des Verfaherns benutzt, die ebensowenig unendlich viele Denkschritte erfordert, wie anedere Grenzübergänge auch. Es wird lediglich die Existenz eines Häufungspunktes behauptet, und, wie man glauben sollte, auf völlig einleuchtende Art bewiesen. Der Punkt x_0 liegt irgendwo im Intervall $a \leqq x \leqq b$.

Da der Intuitionist wie der Finitist einen engeren Existenzbegriff hat, so lehnen beide schon aus diesem Grunde das angewendete Verfahren ab. Aber es gibt noch einen weiteren Scheingrund für die Verwerfung des skizzierten Schlussverfahrens. Es kann nömlich sein, dass es schon bei dem ersten Teilungsschritt nicht gelingt zu sagen, in welchem der zwei Intervalle unendlich viele Punkte der (durch irgendeine Vorschrift gegebenen) Punktmenge liegen. Gleich ist dann das Entscheidungsgespenst mit einer Polizeivorschrift da [1].

Auf alle Fälle ist das ganze Verfahren sinnlos.

Der besprochene Satz ist eines der einfachsten Beispiele von sogenannten Existentialbehauptungen. Von allen anderen gilt Ähnliches. Dem entsprechend verneinen wir"das erlösende Wort":

Blosse Existentialsätze sind eine leere Erfindung der Logiker.[2] (Also dürfen sie nicht einmal als Hilfsmittel zum Bwweis wirklicher Lehrsätze geduldet werden.)

Ein "irgendwo", wie in dem Satz von B o l z a n o und W e i e r s t r a s s, darf überhaupt nicht zugelassen werden.

---

1) Siehe B r o u w e r, 1925, S.4, Nr.1.

2) H. W e y l, 1921, S.54. 1925, S.19; vgl. auch 1927, S.41, 42.

Es ist viel mehr zu verlangen. (Hier darf man sich wundern, warum nicht auch die"endliche Zahl von Denkschritten" durch eine genaue Angabe dieser Zahl ersetzt werden soll. Die bare Unmöglichkeit kann doch für einen Intuitionisten kein genügender Grund sein.)

Alles, was dem gegenüber ~~zu~~ gegeben werden kann, sich aber auch von selbst versteht, ist, dass blosse Existentialbehauptungen als Ziele der Forschung vielfach etwas Unbefriedigendes haben. Man vermag das nicht zu erreichen, was man eigentlich will; also bescheidet man sich mit weniger, oft auch mit vielem weniger, wie etwa in H i l b e r t's Satz von der Endlichkeit der Invariantensysteme. Was bleibt anderes übrig?

Aber nicht nur diese Existentialsätze, zu denen denn doch einige der schönsten Ergebnisse der mathematischen Wissenschaft gehören (Geometrie der Zahlen, konforme Abbildung), werden von unserem Intuitionisten (wie er in seiner Bescheidenheit glaubt) mit einem Federzug vernichtet, sondern auch sämtliche Konvergenzuntersuchungen, so unerlässlich sie überall sind; denn ihre Ergebnisse sind nichts anderes als eine besondere Art von Existentialsätzen. G a u s s, A b e l, W e i e r s t r a s s und viele andere haben umsonst gelebt. Mit der theoretischen Physik ist es natürlich auch nichts, wenigstens in ihrer gegenwärtigen Gestaltung.

Eine Existentialbehauptung ist also ein wertloses Stück Papier, eine Anweisung auf einen Schatz, von dem man nicht weiß, wo er liegt [1], und zwar ist das anscheinend immer so.

Beiläufig bemerkt, wie immer, alle, jeder nicht"gedankenlos" dürfen Begriffe angewendet werden; nämlich da nicht ohne sorgfältigste Unter-

---

1) H. W e y l 1, 1921, S.54 und 1925, S,19.

suchung, wo es sich um Unendliches handelt. Die Existentialsätze bilden aber ein Unendliches der allerverdächtigsten Art!

Wenn zwischen Wesentlichem und Nebendingen (den oft ganz überflüssigen, oder nach Umständen überhaupt unmöglichen genauen Angaben über gewisse Zahlenwerte) so ~~wenig~~ wenig unterschieden wird, so kann man auch zu dem Schluss kommen:

Wenn ich erfahre, dass mein Freund X gestorben ist, so hat das für mich nur insofern eine Bedeutung, als es einen Anreiz enthält, nach der Ursache seines Todes zu forschen.

Auf die Frage: Wie kann ich aus einem Existentialsatz etwas schließen, ist zu antworten: Auf keine Weise; da er nichts aussagt, kann auch nichts aus ihm erschlossen werden [1].

Da Herr W e y l - derselbe Weyl, dessen Gottähnlichkeit die Zahlen und mit ihnen alle Mathematik aus dem Nichts hervorzuzaubern versteht, immerfort von Unsinn redet und für die Kontinuen der klassischen Mathematik die auf Seite 00 angegebenen Kosenamen erfunden hat, so wird er sich nicht beklagen dürfen, wenn ich nunmehr den letzten Satz samt allem, wovon in Abschnitt XVI die Rede war, für reinen Unsinn erkläre, und seine redselige sogenannte Philosophie für gestaltlosen Brei.

Derartige Entgleisungen, verbunden mit anspruchvollstem Auftreten, findet man sonst nur in Schriften unwissender und blutdürstiger Laien, die über "die verzopfte Wissenschaft" zu Gericht sitzen.

Wie wäre es, wenn Herr W e y l in Zukunft auf den Druck seiner Philosopheme verzichtete? Und sich, als Mathematiker, um einwandsfreie Logik und "rätsellose Klarheit" bemühte?

---

1) 1927, S.42. Es wird dann noch der Ersatz des "Nichts"durch ein "sinnvolles Ganzes" gefordert.

Besonders bedauerlich ist natürlich, dass ein solcher Dilettantismus sich gerade in einem Handbuch der Philosophie hat austoben dürfen. Auch die Redaktion der Zeitschrift ~~Syporion~~ Symposion, die W e y l den Eröffnungsartikel hat schreiben lassen, ist sehr schlecht beraten gewesen.

Als ein wahres Glück ist es zu betrachten, dass der in Aussicht genommene "philosophische" Band der Mathematischen Enzyklopaedie nicht mehr zustande gekommen ist. Was würden wir da erst erlebt haben!

Ich stelle jetzt den "philosophischen" Lehrmeinungen einiger Mathematiker einen Ausspruch eines Fachphilosophen gegenüber - eines, der den Namen des Philosophen wirklich verdient:

W e n n n i c h t z w i s c h e n G e l t e n u n d N i c h t g e l t e n, R i c h t i g u n d U n r i c h t i g, W a h r u n d F a l s c h, d a s V e r h ä l t n i s d e s S i c h a u s s c h l i e s s e n s b e s t ü n d e u n d z w a r o h n e j e d e s W e n n u n d A b e r, o h n e j e d e A b s c h w ä c h u n g b e s t ü n d e, s o w ä r e e s ü b e r h a u p t s i n n l o s, z u u r t e i l e n, z u b e h a u p t e n, z u d e n k e n, z u e r k e n n e n (V o l k e l t, S.289).

Was haben also die Fanatiker der intuitionistischen Religion getan? Um vermeintlichen Widersprüchen der Mengenlehre zu entfliehen, haben sie, nach philosophischem Vorbild, den Wahrheitsbegriff umgebogen. An zahlreichen bewährten Begriffen und Schlussweisen der Analysis haben sie in der leichtfertigsten Weise Kritik geübt und dabei sind sie selbst kopfüber in ein Gewirre von Widersprüchen gestürzt, die tausendmal schlimmer sind als schlimmstenfalls das sein konnte, was beseitigt werden sollte. Darin sitzen

sie nun, wie Fische im Netz. Und gleich den phänomenologischen Philosophen, zu denen der eine von ihnen sogar gehört, leben sie "in der beglückenden Einbildung, die reinen Wesenheiten leibhaftig zu schauen". So sind sie denn seelenvergnügt und behaupten, es sei wundervoll, in einem solchen Netz gefangen zu sein. (Erlösung von bösem Albdruck.) Auch sind zum Hineinziehen anderer schon verheissungsvolle Anfänge gemacht.

Man stelle sich vor, was unsere Kritik zu dem allen gesagt haben würde, wenn dieselben - genau dieselben - Entdeckungen von Fachphilosophen, selbst ohne alles Bumbum und Trara, in die Welt gesetzt worden wären!

Freilich wird das, was geschehen ist, wohl nicht allein aus persönlichen Eigenheiten der handelnden Personen zu verstehen sein. Die Neigung, es nur mit Mathematischemernst zu nehmen, insbesondere also mit der Philosophie nicht, scheint unter Mathematikern verbreitet zu sein, nach Äußerungen zu schließen, die ich gelegentlich zu hören bekommen habe. Auch B o l z a n o, der selbst Wertvolles zur Mathematik beigetragen hat, hat dieser Überheblichkeit widersprochen. Leider kann ich die Stelle nicht finden.

"Hast Du wohl schon darauf geachtet, dass die von Natur zur Mathematik Veranlagten [1] auch für alle anderen Wissenschaften sozusagen geschärft sind?" So lesen wir bei P l a t o n (im Staat). Damit war der Widerspruch von A r i s t o t e l e s herausgefordert, der meinte, H i p p o k r a t e s sei wohl ein geschickter Geometer gewesen, im übrigen aber dumm und unver-

---

1) φύσει λογιστικοί. λογιστική ist, nach T o e p l i t z, ~~P l a t o n~~ bei P l a t o n nicht mit Redenkunst, sondern mit Mathematik zu übersetzen.

unvernünftig. Toll ist eine Äusserung von J o h a n n B e r n o u l l i "Dass ein Mathemathicus schier alle Wissenschaften auszuführen im Stande ist,...". Selbst L. E u l e r soll gesagt haben, es gebe nichts Unwichtigeres als einen botanischen Garten; die ganze Botanik sei nichts als eine Spielerei und überhaupt nur eine Wissenschaft in der Welt, die Mathematik nämlich [1]. So dürfen wir uns also nicht übermässig wundern, dass da, wo die Erkenntnistheorie in die Mathematik hineinspielt, die oberflächliche Beschäftigung damit als genügend erachtet wird - nicht etwa nur von den Intuitionisten.

Ich komme zu dem Schluss, dass wir den mathematischen Tatsachen genau so gegenüber stehen, wie jene älteren Forscher, die sich um die Philosophie ihrer Zeit gar nicht gekümmert hatten, die natürlich auch noch nichts wussten von Intuitionen, Wesenhaftigkeiten, intentionalen Gegebenheiten und sinngebenden Akten, auch an umfangsdefinite Begriffe und das Entscheidungsgespenst gar nicht dachten; die gar keine andere Vorschrift kannten als

D u s o l l s t e r n s t l i c h d i e W a h r h e i t s u c h e n u n d z u d e m, w a s D u g e f u n d e n z u h a b e n g l a u b s t, d i c h b e k e n n e n, u n t e r Z u f ü g u n g e i n e r o r d e n t l i c h e n B e g r ü n d u n g.

Du sollst dich also bemühen, keine Schnitzer zu machen, nichts Halbfertiges drucken zu lassen, überhaupt deine Worte genau überlegen, vor allem kein hochtönendes und leeres Geschwätz in die Welt posaunen, unter dem Vorgeben, das sei Philosophie.

---

1) Zitate nach W. A h r e n s, Scherz und Ernst in der Mathematik, 1904, S.81.

Als Kritiker sollst du Gerechtigkeit üben, niemanden unterstellen, was er nicht gesagt hat, und überhaupt nicht durch oberflächliche Urteilsbildung anderen die Freude an ihrer Sache verderben. Auch nicht dich für einen König und andere, von denen du doch meistens sehr wenig weißt, für Kärrner halten. Glaubst du etwas gefunden zu haben, das den herrschenden Schulmeinungen widerspricht, so sollst du, nach reiflicher Überlegung, es sagen, unbekümmert um die Wespen, die dir etwa um den Kopf fliegen werden. Wenn du aber einen Fehler gemacht hast, so sollst du ihn eingestehen und nicht zu faulen Ausflüchten deine Zuflucht nehmen, überhaupt Niemandem einen blauen Dunst vormachen. Auch sollst du nicht beanspruchen, dass man dir auf dein ehrliches Gesicht hin oder etwa darum, weil du in G ö t t i n g e n zuhause bist, etwas glaubt.

Auch fernerhin werden, wie ich vermuten möchte, Mathematiker Aufgaben, die sie - zu Recht oder Unrecht - für einwandsfrei gestellt, sinnvoll ~~xxxxxxx~~ ansehen, zu lösen suchen, und sie werden dabei, wenn sie es für gut halten sich des Begriffs Kontinuum, sowie des indirekten Beweisverfahrens bedienen. Und wenn der gewünschte Erfolg ausbleibt, so werden sie, und auch wir, glauben dürfen, dass ihre, vielleicht auch allgemeinmenschliche Unvollkommenheit die Ursache ist - dass also "philosophische" Gründe nicht gesucht zu werden brauchen.

Und wenn es Jemanden sehr gleichgiltig sein sollte, aus welchem Grunde ihm die Lösung eines Problems nicht gelingt, so wird die Gedankenwelt der Mathematiker darüber nicht zugrunde gehen. Ja das würde für den Zustand unserer Wissenschaft nicht den geringsten Unterschied machen.

In summa: Es wird dabei bleiben müssen, dass präzis formulierte Behauptungen, wie überall, so auch in der Mathematik,

richtig oder falsch sind, ganz einerlei, ob es sich um Endliches oder Unendliches und um "werdendes" oder "fertiges" Unendliches handelt.

Von dem Intuitionismus aber steht zu hoffen, dass er nun bald als leere Schale in Museen aufbewahrt werden wird[1].

Ich komme nun noch einmal zu den Herren B r o u w e r und W e y l. Ich habe nämlich noch immer etwas auf meinem lediglich mit Gift und Tinte gefüllten und daher pechschwarzen Herzen, Ja es kommt mir so vor, als hätte ich das Schlimmste noch gar nicht gesagt. Es muss heraus. Ohnehin wird ja demnächst "der Blitz des W e y l'schen Gedankens" auf mich niederfahren.

Diese so siegesgewiss auftretenden Autoren glauben selbst nicht ernstlich an ihre Sache.

Ist es denn schon je dagewesen, dass jemand, der eine bestimmte Art von"Wissenschaft", z.B. Theologie, als sinnlos hinstellt, sich gleichzeitig um ihre Förderung bemüht?[2]

Seid ihr denn Schauspieler, dass ihr heute in dieser Rolle auftretet und morgen in jener, und dann wieder in der ersten?

Nichts kennzeichnet drastischer den Tiefstand, zu dem wir bereits gekommen sind, als dass unsere Kritik nicht einmal Anstoss daran genommen hat. Kann etwa nicht verlangt werden, dass der Forscher nach seinen Grundsätzen lebt? Haben nicht eben diese Intuitionisten, B r o u w e r und W e y l verkündet, die Mathematik sei mehr ein Tun denn eine Lehre?

Man bedenke doch, was auf dem Spiele steht! Es geht um die Wissenschaft überhaupt. Ein ernsthafter Forscher, der im Jahre

---

1) W e y l, Raumproblem, S.48.

2) Siehe z.B. W e y l, Math. Zeitschrift, Bd.10, 1921, S.39, 88.

1925 den auf der einen Seite von den Mächten der Finsternis inspirierten Zeitungskrieg der Münchener Neuesten Nachrichten verfolgt hat, wird nicht zweifeln können, dass unsere geistige Kultur sich in einer grossen Gefahr befindet; wenn ihm das ~~nicht~~ nämlich nicht ohnehin schon klar sein sollte.

XXI.
Die Mathematik Hilberts.

H i l b e r t ist (meines Wissens) der einzige Mathematiker, der bis jetzt den Ansprüchen der Intuitionisten mit Bestimmtheit entgegengetreten ist. Leider muss ich nun auch ihm widersprechen.

Auf die allgemeinen Fragen des Denkens, auf die es, nach meiner Meinung, vor allem ankommt, ist H. überhaupt nicht eingegangen. Er will mit Hülfe des Logikkalküls den ganzen Streit auf dem Boden der Mathematik austragen. Ich halte schon das für einen Fehler. Formeln dienen nicht immer zur Aufhellung eines Sachverhaltes, sondern manchmal auch zur Verdunkelung.

Folgen wir H. eine Strecke weit, so finden wir schon in der ersten seiner neueren Arbeiten über die Grundlagen der Mathematik (1922) eine Konzession, die sogar noch über das hinausgeht, was die Intuitionisten verlangt haben. Diese Grundlagen sollen auch bei H. "anschaulich" sein, nun aber in Sinneswahrnehmungen bestehen (wohl auch, und zum mindesten, in Erinnerungsbildern von solchen).

Um dies mit Sicherheit zu erreichen, wird an den Anfang der Mathematik, wie wir schon gesehen haben, eine Figur gestellt [1].

---

1) H i l b e r t selbst spricht von Zeichen, wogegen A. M ü l l e r mit Recht Einspruch erhoben hat.

Die Figur 1 ist eine Zahl! Ebenso 1 + 1, 1 + 1 + 1, u.s.w. Diese Figuren sind alle Zahlen, haben aber sonst keinerlei Bedeutung. Zur Abkürzung wird dann die Figur 2 für 1 + 1 und 3 für 1 + 1 + 1 gesetzt, und wir erfahren nun mit Erstaunen, dass diese neuen Figuren, die doch mit den anderen äquivalent sein sollen, etwas bedeuten und "zur Mitteilung dienen". 2 + 3 = 3 + 2 ist "keine Formel", sondern (?) dient ebenfalls zur Mitteilung. Was ist, nach H i l b e r t, eine Formel? Ich kann das unmöglich ernst nehmen, mag es herrühren, von wemm es will.

Alledem liegt dieselbe Kritik zugrunde, die die Intuitionisten geübt haben. ~~Warum~~ Wozu wäre sonst eine Neubegründung der Mathematik nötig?

Tatsächlich finden wir ein geradezu verhängnisvolles Zugeständnis gegenüber den Forderungen der Intuitionisten in einer späteren Arbeit H i l b e r t's (1925, S.173). Nunmehr wird ausgeführt, dass ein Es gibt, wenn von Unendlichem die Rede ist, "zunächst" sinnlos sein soll, und es wird das an dem Beispiele des Satzes erläutert, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Dies wird bekanntlich damit begründet, dass, wenn p eine Primzahl ist, zwischen p + 1 und p! + 2 mindestens eine Primzahl liegen muss.[1] Wenn nun statt dessen blos behauptet würde, dass eine Primzahl existiert, die grösser ist als p, so würde das zwar ganz harmlos aussehen, aber doch einen"Sprung in's Transfinite" bedeuten, der ohne besondere Erörterung und "gewisse Vorsichtsmaßregeln" ebensowenig erlaubt sein soll, als in der Analysis der Übergang von einem endlichen zu einem unendlichen Produkt es ist. Warum? erfahren wir nicht. In Wahrheit wird hier-

1) Besser wohl zwischen p + 1 und 2.3.5.7... p (p + 2).

mit das Entscheidungsproblem in seinem ganzen Umfang aufgerollt. Wir hatten, bei auf Unendliches bezüglichen Fragen, die Behauptung kennen gelernt - und zurückgewiesen -, dass neben Ja und Nein auch noch eine dritte Möglichkeit besteht, die angebliche Unentscheidbarkeit. Jetzt heisst es, die Alternative Ja, Nein, sei "zunächst" sinnlos: Das ist kein grosser Unterschied. Drückt man sich auf diese oder jene Art aus: In beiden Fällen wird der Wahrheitsbegriff negiert. Ausserdem lässt sich einwenden, dass, was „zunächst" sinnlos ist, überhaupt sinnlos ist. Dass es entweder endlich-viele oder unendlich-viele Primzahlen geben muss, ist a priori klar. Tertium non datur!

H i l b e r t ist also Finitist geworden, und er erkennt auch das Entscheidungsproblem an. Weit entfernt ist er jedoch davon, wie K r o n e c k e r die Mathematik auf ihren konstruktiven Bestandteil beschränken zu wollen. Vielmehr glaubt er sie, genauer die Analysis (und im Wesentlichen auch die Mengenlehre) "retten" zu können, trotz der "finiten Einstellung", die nach seiner Meinung notwendig ist. Zwar gelten, wie H. behauptet, in Bezug auf das Unendliche die logischen Gesetze nicht, die Menschen seit sie denken, stets gebraucht haben, - aber wir wollen uns erinnern, dass wir Mathematiker sind und uns schon öfter aus solchen misslichen Lagen herausgefunden haben. (1925, S.174).

Gegen die ohne Begründungsversuch hingestellte Behauptung, dass auf "das Unendliche", sogar ohne Einschränkung, die logischen Gesetze nicht anwendbar sein sollen, muss ich Widerspruch erheben. Wie anders könnte man wohl so etwas zu beweisen versuchen, als durch Anwendung der logischen Gesetze, die für das Unendliche nicht gelten sollen, auf eben dieses Unendliche?

Ohne Zweifel denkt H. an die mengentheoretischen Paradoxien.

Wie nun aber, wenn diese gerade durch Nichtbeachtung einer Forderung der Logik zustande gekommen sein sollten? (S.000)

Dass für das Unendliche die Gesetze der Logik nicht gelten sollen, hat übrigens wohl noch niemand angenommen. Um so weniger ist es eine Selbstverständlichkeit.

Die Rettung soll erfolgen vermöge eines eigentümlichen Denkverfahrens, das den Namen Metamathematik führt. "Ideale Aussagen", die von H., sicher zu Unrecht, den idealen Zahlen verglichen werden, sollen es ermöglichen, vom Endlichen her das Unendliche zu beherrschen, und so dem "Es gibt", das vorher ein sinnloses Wort war, nachträglich noch einen Sinn unterzulegen - eine jedenfalls sehr ungewöhnliche Art, Begriffe einzuführen.

Die idealen Aussagen, "Gebilde" oder „Formeln", deren Gesamtheit auch als Beweistheorie bezeichnet wird, bedeuten an sich nichts, so wenig wie die Zahlfiguren (S.175, 176) - aber doch sollen sie ein solches Wunder zu vollbringen imstande sein.

Dass Formeln nichts zu bedeuten haben, ist schon öfter vorgekommen, aber dass der, der sie aufstellt, es selbst sagt, dürfte neu sein [1].

Es handelt sich, wie O. B e c k e r mit Recht bemerkt hat, um eine klappernde Formelnmühle - eine, die leer geht.

Zufolge einer "prästabilierten Harmonie" hat H. den "Logikkalkül" ziemlich fertig vorgefunden, und er sucht ihn nun für seinen Zweck auszunutzen.

Während in der klassischen Mathematik die Formeln zur Unter-

---

1) Bei H i l b e r t's Schüler und Mitarbeiter P. B e r n a y s findet man die verunglückte Parodie einer Stelle aus Faust: "Wo Begriffe fehlen (!), da stellt ein Zeichen zur rechten Zeit sich ein". Dies, so heisst es, ist die Methode der H i l b e r t'schen Theorie. Dieser B e r n a y s ist ein wahres enfant terrible! Vgl S. 88 des Anfangs.

stützung des Gedankens und dazu dienten, Behauptungen, die sich mit Worten nur umständlich würden ausdrücken lassen, eine einfache Gestaltung zu geben, erscheinen sie bei H. beinahe als Selbstzweck. Sie führen eine Art von Sonderdasein.

Dass sie, die an sich nichts bedeuten, dennoch für die Mathematik eine Bedeutung haben, soll nun darauf beruhen, dass sich"ein jedes mathematische Problem" formulieren, auf die "Spielregeln" des Logikkalküls zurückführen lässt. Der gesamte Gedankeninhalt der mathematischen Wissenschaft soll sich auf diese Weise einheitlich ausdrücken und derart entwickeln lassen, dass zugleich die Zusammenhänge der einzelnen Sätze deutlich werden, und so soll dem Formelspiel eine philosophische Bedeutung zukommen (1928, S. 79).

Die Philosophie würde wohl besser nicht mit dem Formelspiel verquickt wprden sein. Vor allem aber muss ich staunen, dass H. von der Gesamtheit aller mathematischen Probleme redet. Diese ist doch, nach finitistischen Grundsätzen, ein sinnloser Begriff, jedenfalls, gerade auch nach H i l b e r t, kein Begriff, auf den Worte, wie immer, alle, jeder ohne weiteres, also "gedankenlos" angewendet werden dürfen. Hier liegt also ein weiterer Denkfehler vor.

Sodann will es mir scheinen, dass Zusammenhänge in der mathematischen Wissenschaft auch bisher schon zur Geltung gekommen sind - anders als zusammenhängend lässt sich nämlich Mathematisches überhaupt nicht erweisen - und dass die Forderung des Formalisierens auch schon bei Beschränkung auf die bereits vorliegenden Probleme nicht erfüllt werden kann. Wie sollte das durchführbar sein, und bei der ungeheuren Mannigfaltigkeit von Gestalten, in denen mathematische Probleme auftreten! Dazu liegt

nicht ein ausgeführtes Beispiel vor, alles ist Zukunftsmusik!

Betrachten wir einen konkreten Fall, etwa wieder die Goldbach'sche Frage! Wie sie "formalisiert" werden kann, davon habe ich keine Ahnung - es fehlt jede Anleitung dazu. Nehmen wir indessen an, es sei geschehen - was kann damit gewonnen werden? Dass dieser Weg zum Beweis (oder zur Widerlegung) der Vermutung Goldbach's führen wird, das wird H. wohl selbst nicht glauben. Aber es müsste sich, nach seiner These, mit Hülfe des Formelspiels beweisen lassen, dass die Antwort auf die Frage Goldbach's nur Ja oder Nein lauten kann. Dann würden wir also etwas erfahren, woran im Ernste - nicht bloss zum Zwecke des Disputierens - noch Niemand gezweifelt hat, und woran auch gar nicht zu zweifeln ist (S.00). Also wozu das ungeheure voller Reibungen steckende Räderwerk?

Aber es wird sich nicht einmal so viel erreichen lassen. In welcher Richtunge sollen, nach den festgesetzten Spielregeln, die Formelsymbole an einander gereiht werden? Liegt die Sache nicht überall so, wie im Schachspiel? Hat man dieses zu Ende denken können? Wo ist der Formalismus, der bei mechanischer Handhabung, ohne inhaltliches Denken, je etwas Wertvolles hervorgebracht hätte?[1] Der Logikkalkül, auf den H. verweist, ist gewiss sehr sinnreich erdacht, er hat aber unsere inhaltliche Einsicht, wenn ich mich nicht sehr täusche, noch niemals gefördert. Ein angebliches "philosophisches Interesse" ist dafür eine recht magere Entschädigung!

Lassen wir uns nun bei dem Formelspiel, wie es angezeigt ist, durch inhaltliches Denken leiten - so kann sich noch immer

---

1) Allerdings hat L. E u l e r bescheiden gesagt, seine Feder sei manchmal klüger als er selbst.

nicht das ergeben, was H. leisten zu können behauptet; selbst dann nicht, wenn nie ein Fehlzug getan wird. Soll die Lösung eines Problems, oder auch nur der Lösbarkeitsbeweis, durch Handhabung eines Kalküls erzwungen werden, so wird immer eine gewisse Anzahl von Zügen zu tun sein ~~#~~. Das Wesen p marschiert auf. Die genannte Zahl muss abhängen von der Natur des einzelnen Problems, und sie wird umso größer sein, je verwickelter das Problem ist. Eine Schranke für diese Zahl kann es nicht geben. Auch hier liegt also ein Denkfehler vor - derselbe, den jemand begehen würde, der nach einem finitistischen Kriterium für die algebraischen Zahlen suchen wollte. Die von H. behauptete Überblickbarkeit seines Formelwerks ist eine Illusion!

Und wie konnte gar H. sich zu einer Herausforderung versteigen wie der, erst auf Grund der Einführung seiner "idealen Aussagen" sei wissenschaftliche Mathematik möglich!! (1928,S.73).

Ausserdem ist Herr H i l b e r t, der die Suggestibilität so vieler Mathematiker mit Recht beklagt, selbst der Suggestion erlegen. Die Intuitionisten hatten Beweise der Mangelhaftigkeit der bisherigen Mathematik doch wenigstens versucht!

Sehr sonderbar ist auch H.'s Stellung zum Begriff des Kontinuums. Auch da hat er sich von den Intuitionisten einen Floh in's Ohr setzen lassen. Jedenfalls ist das natürliche Kontinuum für H. kein ohne weiteres legitimer Begriff. (1925, S.164, 170, 190). Nur auf dem Wege über die idealen Aussagen soll es zugänglich sein - und auf eben diesem Wege glaubt H. das "Kontinuumproblem" lösen zu können, das allen sonstigen Anstrengungen widerstanden hat! [1] Auch das ist Zukunftsmusik!

---

1) Siehe H a u s d ~~#~~ o r f f, Mengenlehre, 1927, S.40.

Natürlich kommt nun auch H. in das Dilemma, von dem früher die Rede war (S.00). Er macht es nicht wie W e y l, aber er macht es nicht besser. Es entzieht sich dem genannten Dilemma, indem er es eskamotiert! Er verweist auf die physikalischen Grenzen der Teilbarkeit der Materie und auf die Energiequanten der Physiker, spricht mit keinem Worte vom Ablauf der Zeit und von dem Raume, den die Atome einnehmen, auch nicht von Kraftfeldern und kinetischer und potentieller Energie (deren atomistische Zerstückelung eine Umwälzung radikalster Art bedeuten würde), und von Farbenempfindungen und dergleichen ebensowenig.

Dieses primitive Verfahren, über Erfahrungstatsachen hinweg zur Tagesordnung zu schreiten, ermöglicht H. die Behauptung, dass wir in der Natur nirgends Kontinuen finden; womit auch von seiner Seite der Knoten zerhauen ist.

Mit dem alten Satz Natura non facit saltus ist es aus!

Es ist sehr bedauerlich, dass H., dem wir so Wertvolles verdanken, sich auf Spekulationen eingelassen hat, von denen ein guter Erfolg nicht abzusehen ist. Er befindet sich in der Lage eines Generals, dessen Kerntruppen ohne sein Wissen zum Feinde übergegangen sind. Es kann nur eines erfolgen. Der Gegner müsste ganz und gar auf den Kopf gefallen sein, wenn er die so geschaffene Lage nicht auszunutzen wüsste.

Wir finden bei B r o u w e r (1928) vier "Einsichten" formuliert, bei denen es sich, wie er sagt, um reine Besinnungsergebnisse handelt, die kein diskutables Element enthalten, und zu denen jedermann, der sie einmal verstanden hat, sich bekennen muss. Es sind die folgenden:

I. Die Unterscheidung der formalistischen Bemühungen in einen Aufbau des "mathematischen Formelbestandes"

(formalistischen Bildes der Mathematik) und eine intuitive (inhaltliche) Theorie der Gesetze dieses Aufbaues, sowie die Erkenntnis, dass für die letztere Theorie die intuitionistische (?) Mathematik der Menge der natürlichen Zahlen unentbehrlich ist.

II. Die Verwerfung der gedankenlosen Anwendung des logischen Satzes von ausgeschlossenen Dritten, sowie die Erkenntnis, erstens, dass die Erforschung des Berechtigungsgrundes und des Gültigkeitsbereichs des genannten Satzes einen wesentlichen Gegenstand der mathematischen Grundlagenforschung ausmacht, zweitens, dass dieser Gültigkeitsbereich in der intuitiven (inhaltlichen) Mathematik nur die endlichen Systeme umfasst.

III. Die Identifizierung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten mit dem Prinzip von der Lösbarkeit jedes mathematischen Problems.

IV. Die Erkenntnis, dass die (inhaltliche) Rechtfertigung der formalistischen Mathematik durch den Beweis ihrer Widerspruchslosigkeit einen circulus vitiosus enthält, weil diese Rechtfertigung auf der (inhaltlichen) Richtigkeit der Aussage, dass aus der Widerspruchslosigkeit eines Satzes die Richtigkeit dieses Satzes folge. d.h. auf der (inhaltlichen) Richtigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten beruht.

Hieran erscheint mir dreierlei als bemerkenswert:

(1) Dass Br. sich tatsächlich - wie er angibt - mit seinem Gegner überall auf gemeinsamem Boden befindet. Dass er also recht wohl von der Annahme seiner vier "Einsichten" durch H. das Ende "des Grundlagenstreites in der Mathematik" (lies: des Streites

mit H i l b e r t) erwarten darf. Gegen die Anerkennung eines circulus vitiosus in seinem Formalismus wird sich H. voraussichtlich sträuben, aber das kann ihm nicht viel helfen, nachdem er die These B r o u w e r's über das ausgeschlossene Dritte einmal zugegeben hat. Antwortet er nichts, wie wohl zu erwarten, so ist auch das eine Antwort.

(2) Dass Br. nunmehr zu der Erkenntnis gekommen ist, dass der wirkliche Gegensatz zum Formelspiel das inhaltliche Denken ist.

(3) Dass ihm jedoch die Einsicht fehlt, dass dieses inhaltliche Denken sich nicht mit anschaulichem Denken oder Intuitionismus deckt. (Punkt I). Inhaltlich ist das Denken der gesamten klassischen Mathematik. Der Formalismus, den Br. mit Recht, aber mit ungeeigneten Mitteln bekämpft, ist eine ganz moderne Modekrankheit!

Man sieht hier so klar, wie man es nur wünschen kann, dass der ganze neuere Grundlagenstreit ein Familienzwist ist, in dem beide Parteien Unrecht haben; oder ein Hader zweier Sekten derselben Religion, deren Angehörige von Gespensterfurcht besessen sind. Unter II erscheint das Entscheidungsgespenst mit seinen Verbotstafeln. Kümmert man sich nicht darum, so verliert die ganze neuere sogenannte Grundlagenforschung samt den Einsichten III und IV jedes sachliche Interesse. Und immer fehlt Dasselbe: Der Grund des Grundlagenstreits, die angebliche Fehlerhaftigkeit der klassischen Mathematik, ist nicht nachgewiesen. Dazu beruht auf derselben Verfälschung des Wahrheitsbegriffs wie bei den Intuitionisten auch der Gedankengang H i l b e r t's.

Auch das war kein glücklicher Gedanke, Schlachtrufe "Hie Intuition, hie Formalismus" auszugeben. Eine derartige

Disjunktion besteht gar nicht.

B r o u w e r nimmt zu seinem letzten Aufsatz auch auf die"formalistische Schule", d.h. auf Schüler H i l b e r t's Bezug. Die Existenz einer derartigen Schule (und von "Schulen" überhaupt) ist ein besonders betrübender Punkt. Jüngere Mathematiker sollten doch, wenn sie ihre Probleme nicht selbst suchen wollen, sich das genau ansehen, was ihnen auch von noch so verdienten und noch so sehr verehrten Lehrern empfohlen wird, vor allem aber sollten sie ihre Arbeitskraft nicht an abstruse Aufgaben und namentlich nicht an solche von angeblich philosophischem Interesse setzen. Um in philosophischen Fragen ein sicheres Urteil zu haben, sind sie noch zu jung. Bekanntlich ist nicht alles Gold, was glänzt, und die idealistische Philosophie, die auch bei H i l b e r t, einem großen Verehrer K a n t's, den Untergrund bildet, glänzt nicht einmal. Die heutige Mathematik ist voll von ungelösten Problemen, darunter solche konkreter Natur, die meines Erachtens viel mehr Interesse haben, als die gegenwärtig vorwiegenden Allgemeinheiten von Problemen, bei deren Bearbeitung man hoffen kann, auch <u>die Schönheit der Mathematik</u> zur Geltung zu bringen, die gewöhnlich ein Traum bleiben muss. In einem englischen Kinderbuch steht der (wenn meine Erinnerung nicht trügt, von S t e v e n s o n herrührende) Vers:

The world is so full of wonderfull things,
I'm sure we should all be as happy as kings.

An der"Metamathematik" hat schon A. B e c k e r eine Kritik geübt, mit der sich das hier Vorgetragene in Einklang befindet. Besonders sei auf B.'s lichtvolle Ausführung über das Hinreichend-Kleine verwiesen (1927, S.772).

XXII

Die ontologische Mathematik O. Becker's.

In die Kampfrufe der mathematischen Intuitionisten hat, wie nicht zu verwundern ist, ein Philosoph aus der Schule Husserl's eingestimmt.

Ich werde über O. Becker's Philosophie der Mathematik nur noch weniges zu sagen haben. Darin aber wolle man nicht etwa einen Ausdruck von Geringschätzung erblicken! Es hat sich so gefügt, dass fast alles, was ich zu bemerken hätte, schon vorher gesagt worden ist. Vor allem wünsche ich keinen Zweifel darüber aufkommen zu lassen, dass ich den wissenschaftlichen Ernst von B.'s mathematischen Studien durchaus anerkenne. B. unterscheidet sich dadurch von so manchem der Philosophen, die über Mathematik geschrieben haben. Die Einwände, die ich zu erheben haben werde, liegen samt und sonders auf philosophischem Gebiet. Sie besagen, dass B. auf ein falsches Geleise geraten ist.

B. ist Psychologist von reinstem Wasser. Er hat die gesamte Philosophie von Husserl's dritter Periode, auch noch einiges mehr, samt der Philosophie Heidegger's, mit Haut und Haaren hinuntergeschluckt [1]. Auch dem Intuitionismus ist er anheimgefallen, wenn auch nicht genau im Sinne von Brouwer und Weyl, die ja anscheinend auch nicht in allen Einzelheiten übereinstimmen.

---

1) M. Geiger sagt in einer Rezension von B.'s zweitem Buch (1928), B. habe nicht alles richtig verstanden. In der Art des Philosophierens scheint mir jedoch zwischen B. und den genannten Philosophen eine vollkommene Übereinstimmung zu bestehen. Auch gibt B. an, dass seine Arbeit im Verkehr mit Husserl entstanden ist (S.144).

XVII

Die typologische Methode

O. Becher.

Der Geometrie, deren Begriff B. in dem schon besprochenen engen Sinn fasst, schreibt B. einen "eigentümlichen Doppelcharakter" zu (1923, S.388). Sie soll nämlich ihre"Begründung" einmal aus dem Gebiete des reinen Verstandes, dann aber auch aus dem Gebiete der sinnlichen Anschauung ziehen. Hier erhebt sich der Einwand, dass es sich nur im ersten Falle um eine Begründung, im zweiten aber um eine Motivierung der Voraussetzungen (Hypothesen, Axiome) eben dieser Begründung handelt [1]. Ich glaube, dass auch vom psychologischen Standpunkt ~~auch~~ hier eine scharfe Trennung recht wohl möglich ist.

Als seine zwei Hauptprobleme bezeichnet B., in der geometrischen Schrift (S.367):

1) Das Problem der rationalen Erfassung des Schlicht-Anschaulichen. Speziell: Geometrische Idealisierung, Limes.

2) Das Problem der Kontingenz [2] Wie kann nicht nur das Empirisch-Kontingente, sondern gerade das Apriorisch-Kontingente überwunden(!)werden? Insbesondere: Wie kann der scheinbar (?) kontingent-materiale Gehalt der geometrischen Axiome transzendental begründet (?) d.h. als notwendig, seiner scheinbaren ~~Unfähigkeit~~ Zufälligkeit entrückt, verstanden werden?

Das erste "Problem" soll, "in der üblichen mathematischen Terminologie ausgedrückt", nichts anderes sein als das Kontinuumproblem (!!); das zweite aber ist, nach B., das "Problem" des Verhältnisses der Enklidischen zu den sogenannten Nichtenklidischen Geometrien.

---

1) Hypothesen können niemals begründet, sondern immer nur motiviert werden. Andernfalls wären sie nicht Hypothesen

2) Contingentia ist ein scholastisches Wort. Es bezeichnet eine Art von "Zufälligkeit", nämlich das "Auch-anders-Gedachtwerdenkönnen". Kontingent ist zum Beispiel die Gravitation.

Dies ist, nach B., die präzise (?) Formulierung seiner Problematik.

Ich kann nicht einräumen, dass durch die ~~Beurteilung~~ Bearbeitung einer so beschaffenen Problematik unsere Einsicht gefördert wird. Eine Zusammenstellung von Worten mit einem Fragezeichen dahinter ist nicht immer ein Problem, und in diesen Fällen ist sie es wirklich nicht - auch nicht im zweiten, wenn man das versteht, was der Autor meint.

Ich wende mich zu B.s zweiter Schrift (1927), in der die mathematische Existenz abgehandelt wird.

Der Gedanke, dass der gegenwärtig von vielen in Acht und Bann getane "Existential-Absolutismus" der griechischen Mathematiker am Ende vielleicht berechtigt sein möchte, oder dass er, wenn nicht berechtigt, doch mindestens eine sorgfältige Erörterung verdient, taucht bei B. nicht einmal auf. Er ist dermaßen von den Lehren H u s s e r l's eingenommen, dass er selbst in der Mathematik überall Phänomene, und nichts als Phänomene sieht. Sein Thema ist der "Seinssinn" dieser Phänomene, - wobei ich mir überhaupt nichts denken kann. Die von H e i d e g g e r begründete Forschungsweise der "hermeneutischen Phänomenologie" wird zur Anwendung gebracht. Es handelt sich dabei um die Hermeneutik der Faktivität (!) oder um "Ontologie", d.i. um die Auslegung (?) menschlichen Daseins(!). So hat denn B. versucht, die mathematische Existenz, nämlich das, was er darunter versteht, in den Zusammenhang des ~~unendlichen~~ menschlichen Lebens hineinzustellen, der als der allenthalben grundlegende Interpretationszusammenhang überhaupt anzusehen ist. (ἄνθρωπος μέτρον ἁπάντων). Natürlich kommt in diesem Falle nur das "mathematisierende" Dasein in Betracht. Das Mathematisieren (μαθηματικεύεσθαι)

ist, analog dem Philosophieren und Musizieren, eine Weise lebendigen Daseins des Menschen. Die Mathematik, nicht etwa der Inhalt von Zeitschriften und Lehrbüchern, sondern die Mathematik selbst erscheint als der Niederschlag mathematisierenden Lebens, so wie die Kunst Niederschlag des künstlerischen Schaffens ist.

Dieses alles ist nahezu wörtlich aus B!s Vorrede entnommen. Im Texte lesen wir dann unter anderem und Ähnlichem (S.761):

> Um den Seinssinn des Mathematischen zu verstehen, muss man das ganze ontologische Problem (?) hineinstellen in die universale Spannung zwischen Historischem und Nichthistorischem, zwischen "Geist" und "Natur".
>
> Die "überzeitliche" Vernunft ist ein primitiver Zug im historischen Dasein (?), sie ein archaisches Erbstück (!), sie bezeichnet die Naturgebundenheit und die relative Ungeistigkeit menschlichen ~~Denkens~~ Daseins. (Vom Autor gesperrt)
>
> Die Überwindung des Todes (!) durch die Voraussicht der Zukunft und die Beherrschung der Natur, das ist die Leistung der auf Mathematik gegründeten Naturwissenschaft.

Hier ist gewiss jede Kritik überflüssig.

Ich zitiere nun weiter aus der Vorrede:

> Aber .... ist die Mathematik sonst nichts? Geht sie nicht gerade am ehesten von allen menschlichen Betätigungen auf Gegenständliches, Ob - jektives, An - sich.- ewig - Seiendes? Es lässt sich nicht leugnen, dass „μαθηματα"... auch diesen rein gegenständlichen" Sinn hat. Es ist die Frage nicht abzuweisen, was es denn besage, dass die "Äussere Welt"

> doch offenbar von mathematischer Harmonie .... durchherrscht und durchleuchtet ist. Dieses große Problem der Existenz des Mathematischen in der Natur, das durch die .... Erfolge der theoretischen Physik gestellt wird, bleibt als ungelöster Rest unserer .... Untersuchungen bestehen.
>
> (Diese Hervorhebungen rühren fast alle von mir her.)

Ein ehrliches Bekenntnis! Der Autor ist in eine böse Sackgasse geraten. Und er wird sich niemals herausfinden, es sei denn dem Scheine nach durch die Methodik H u s s e r l's und anderer, mit der man überhaupt jedes "philosophische Problem" lösen kann.

Wenn der Inhalt der Mathematik menschliches Produkt und insbesondere Kulturprodukt ist - wie kann es dann möglich sein, dass die Natur überall mathematischen Regeln folgt? Ist die Natur nicht viel älter als wir? Und gar als unsere Kultur? Sind nicht auch wir selbst Naturprodukte, und sind wir nicht eben darum, weil - zugleich allen anderen Tieren - gerade wir uns intellektuell weit genug entwickelt haben, fähig geworden, Mathematisches sowohl an sich als im Naturverlauf zu erkennen?

Ich kann mir kein ärgeres Fiasko der anthropozentrischen Weltauffassung denken als es in diesem Bekenntnis liegt!

In dem Streit zwischen B r o u w e r und H i l b e r t nimmt auch B. den sonst von ihm verleugneten Standpunkt eines Tertium non datur ein. Auch B e c k e r scheint wie B r o u w e r zu glauben, dass die großen Mathematiker der Vergangenheit nicht "inhaltlich" gedacht haben. Aber wie haben sie denn gedacht? Etwa formalistisch?

Für den Intuitionisten - somit auch für B. - beruht die reine Mathematik auf einer Reihe von intuitiv zu erkennenden (?)

Akten, ... wie Kolligieren, Ordnen, Zuordnen, Vertauschen u.s.w. (S.463).

Wäre es nicht doch vielleicht möglich, dass durch alle diese Akte nichts zum Vorschein kommen kann, als was schon da ist? Wie steht es denn in der Physik, die doch auch ihre Gegenstände sammelt, ordnet, zuordnet und umordnet? Werden diese Gegenstände dadurch geändert?

B. wird das gewiss nicht behaupten wollen. Aber dass mathematische Sachverhalte mit dem Fortschritt des mathematischen Wissens der Menschheit sich verändern, sagt er ausdrücklich (S,508). Er sagt das mit anerkennenswertem Mute, wiewohl er weiss und selbst erwähnt, dass diese (im Namen des Pragmatismus von F. C. S. S c h i l l e r verkündete) Lehre "für die hergebrachte Auffassung" den Gipfel der Absurdität darstellt, - und obgleich er sich damit zu einer anderen (schon zitierten) Stelle seines Buches in Widerspruch setzt, in der er von dem Ewigkeitswert der Mathematik gesprochen hat.

Sonderbar ist auch, wie B. die Mathematik mit dem Begriff der Sorge in Verbindung bringt - einem Hauptstück der Philosophie H e i d e g g e r's (S.627 - 629). Die Forderung der Widerspruchsfreiheit entspringt auch der Sorge um den unbegrenzten Fortgang des Deduzierens. Einer sehr überflüssigen Sorge, wie mir scheint. Daran wird dann noch eine kleine Polemik gegen den (nicht von B., sondern) von W e y l geringschätzig sogenannten Existentialabsolutismus geknüpft. Dieser verbietet nämlich, nach dem "Seinssinn" von mathematischen Gegenständlichkeiten zu fragen. Ganz so"verbietet"die Biologie, nach dem "Seinssinn" des Erregers der Cholera zu fragen. Dass da Vergleichsmöglichkeiten bestehen, kommt B. gar nicht in den Sinn. Dass seine Art von "Ontologie"

mit der Abstammungslehre unvereinbar sein könnte, natürlich auch nicht.

Sie ist völlig ungenießbar, diese Philosophie von H u s s e r l, H e i d e g g e r und B e c k e r. Das Erbstück einer ursprünglich halbtheologischen Weltansicht [1], die sich von K a n t her mit allerlei Variationen, in der Hauptsache aber immer sich selbst gleich, durch hundertundfünfzig Jahre fortgepflanzt hat, von einem Philosophen zum anderen, von einem bald phantastischen bald trockenen Buch zum anderen, längst ohne Berührung mit der Wirklichkeit.

Vielleicht mag dieser Fall dazu dienen, dem einen oder anderen der vielen noch im Idealismus befangenen Mathematiker die Augen zu öffnen.

Bei alledem gehört B. nicht etwa zu den von Natur unklaren Köpfen (Vgl. S.000, 000). Aber er hat sich offenbar stark beeinflussen lassen.

Ganz anders als seine Philosophie sind ohne Zweifel B.'s historische Untersuchungen zu bewerten.

Sie scheinen, wenn ich mir eine Meinung in einer Sache erlauben darf, in der ich eigene Studien nicht angestellt habe, nicht nur erfreulich, sondern sogar sehr erfreulich zu sein. Freilich hat ihm auch da seine Voreingenommenheit einen bösen Streich gespielt [2]. Aber es beruht doch, wenn ich mich nicht

---

1) B e c k e r, S.732: Das Grundproblem des K a n t i s c h e n wie auch schon des L e i b n i z'schen Denkens ist die richtige Fixierung des Verhältnisses von Gott und Mensch .... Die Antwort auf diese Frage bestimmt auch K a n t's Philosophie der Mathematik. (gesperrt)

2) Siehe die schon zitierte überhaupt sehr beachtenswerte Rezension von G e i g e r (1928), S.414.

sehr täusche, alles auf gründlichen Studien, und seine Darlegung über die Mathematik der Griechen (S.570-588) wird durch das "Prinzip des transzentalen Idealismus" nicht gefährdet. Ich habe viel Interessantes und für mich Lehrreiches darin gefunden.

Ich schliesse mit dem Ausdruck der Hoffnung, dass Herr B. seine Grundansicht revidieren und vom Begriff des Problems sich eine gesundere Vorstellung bilden wird - er ist wohl noch jung genug dazu. - und dass wir ihm noch vieles Gute zu verdanken haben werden.

Auswahl aus der Literatur.

Die folgende Zusammenstellung enthält die vollständigen Titel von einigen der Schriften, die im Texte meistens nur mit Namen und Jahreszahlen zitiert sind. Weitere Titel sind hinzugefügt, zumeist solche von Schriften historischen Inhaltes; sie sollen dem Leser die Möglichkeit bieten, sich von manchem ein vollständigeres Bild zu machen, als es im Texte gegeben werden konnte. Zur Erleichterung der Übersicht sind Schriften ausgesprochen idealistischen (und also psychologistischen) Inhaltes mit Kreuzen, solche realistischer Tendenz mit Sternen versehen worden.

Dass jede Wahl ihre Gefahren mit sich bringt, weiss ich. Ich weiss aber auch, was das sicherste Mittel ist, Leser zur Verzweiflung zu bringen. Haben die Autoren wirklich das alles gelesen und genügend geprüft, was sie uns mit so viel Gewissenhaftigkeit aufzählen und zum Studieren zu empfehlen scheinen. Was für einen Sinn hat diese Leidenschaft zur Vollständigkeit, die dem Leser fast unmögliche Zumutungen stellt, nur um ihm eine Enttäuschung nach der anderen zu bereiten? Ich habe also auf diese Art von Objektivität verzichtet. Vielleicht werden vernünftige Leser finden, dass der aufgezählten Titel immer noch eher zu viele als zu wenige sind [1].

(Zum ersten Teil.)

1810* B. B o l z a n o. Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik. (Neu herausgegeben mit dem Haupttitel) Philosophie der Mathematik, von H. Fels, 1926)

1837* B. B o l z a n o. Wissenschaftslehre. Bd.I. (Die beiden ersten Bände dieses Werkes sind 1914 von Höfler neu herausgegeben worden, jetzt vergriffen, wie der Originaldruck. Eine neue Ausgabe des Ganzen ist in Vorbereitung)

1851* B. B o l z a n o. Paradoxien des Unendlichen. Aus dem Nachlass herausgegeben von Fr. Přihonsky. (Mit Anmerkungen neu herausgegeben von H. Hahn 1920. Der Text soll nicht ganz verlässlich sein)

1872. F. K l e i n. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.(Bedeutung des Gruppenbegriffs für die Geometrie. Auch in den mathematischen Annalen Bd. XLIII, 1893.)

1) Von F r ä n k e l (1928, S.264) werden allein zum Thema Formalismus nicht weniger als achtzig Schriften genannt "abgesehen von der schon erwähnten Literatur." Dazu beginnt diese Liste mit den Worten: Es genüge hier!

1872

1879

1883

1884

1887

1888

1893

1900

1904

1904

1907

1912

1872. † R. D e d e k i n d. Stetigkeit und irrationale Zahlen. (Spätere Ausgaben sind gleichlautend.)

1879. † H. v. H e l m h o l t z. Die Tatsachen in der Wahrnehmung. (abgedruckt in H.v.H., Schriften zur Erkenntnistheorie, herausgegeben und erläutert von P. Hertz und M. Schlick, 1921)

1883. G. C a n t o r. Grundlagen der allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. (Auch, unter anderen Titel, in den Math. Annalen, Bd.21)

1884. * G. F r e g e. Die Grundlagen der Arithmatik. Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.

1887. † H. v. H e l m h o l t z. Zählen und Messen. (Abgedruckt wie der Schrift von 1879)

1888. † R. D e d e k i n d. Was sind und was sollen die Zahlen? (Vierte Auflage 1918, mit einem zweiten Vorwort)

1893. * G. F r e g e. Grundgesetze der Arithmetik, I. (Vorwort)

1900. * E. H u s s e r l. Logische Untersuchungen, I. (Zweite Auflage 1913)

1904. J. T a n n e r y et J. M o l k. Principes fondamentaux de l'Arithmétique. (Historisch. Encyclopédie des Sciences Mathématiques. Bd.I)

1904. A. P r i n g s h e i m et J. M o l k. Nombres irrationales et notion de limite. (Historisch. Ebenda)

1907. A. R i e h l. Logik und Erkenntnistheorie. (In dem Sammelwerk Kultur der Gegenwart).

1912. † H. P o i n c a r é. Science et Méthode. Deutsch: Wissenschaft und Methode, mit Anmerkungen von F. und L. Lindemann, 1914.

1913. A. V o s s. Über das Wesen der Mathematik. (Zweite Auflage)

1914. A. V o s s. Über die mathematische Erkenntnis. (Sammelwerk Kultur der Gegenwart, Teil III, Abteilung I. Vorzugsweise historisch.)

1918. J. V o l k e l t. Gewissheit und Wahrheit. Untersuchung der Geltungsfragen als Grundlegung der Erkenntnistheorie.

1918. G. F r e g e. Der Gedanke. (In der Zeitschrift: Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus, Bd.I.)

1921. A. P f ä n d e r. Logik. (Im Jahrbuch für Philosophie und Phänomenologische Forschung, Bd.IV. Auch als Sonderdruck)

1922. G. H e s s e n b e r g. Vom Sinn der Zahlen.

1923. B. R u s s e l l. Einführung in die mathematische Philosophie. Deutsch von E. J. Gumbel und W. Gordon. Mit einem Vorwort von D. H i l b e r t.

1923. E. S t u d y. Die Realistische Weltansicht. Zweite Auflage I. (Zitiert R. W.)

1923. E. S t u d y. Mathematik und Physik. (Zitiert M. Ph.)

1924. F. E n r i q u e s. J numeri reali. (In dem Sammelwerk Questioni riguardanti le Matematiche elementari. Dritte vervollständigte Auflage. - Erste Auflage 1912).

1924. O. H ö l d e r. Die mathematische Methode. Logisch-erkenntnistheoretische Untersuchungen im Gebiete der Mathematik, Mechanik und Physik.

1927. P. B o u t r o u x. Das Wissenschaftsideal der Mathematiker. Deutsch von H. Pollaczek - Geiringer. (Vorwiegend historisch. Das Original ist im Jahre 1920 erschienen. Die deutsche Ausgabe mit falschem Verfassernamen auf dem Titelblatt: Emile Boutroux, Membre de l'Institut!)

1928. H. H a s s e und H. S c h o l z. Die Grundlagenkrisis in der griechischen Mathematik.

1929. O. H ö l d e r. Die Arithmetik in strenger Begründung. Zweite Auflage) (Erste Auflage 1914).

(Zum Thema des zweiten Teiles.)

1887. L. K r o n e c k e r. Über den Zahlenbegriff. (Journal für Mathematik, Bd.101).

1893. E. N e t t o. Über die arithmetisch-algebraischen Tendenzen Leopold Kroneckers. (Papers read at the Chicago Mathematical Congress, erschienen erst 1896.)

1913†. L. E. J. B r o u w e r. Intuitionism and Formalism. (Bulletin of the American Mathematical Society. Bd.20)

1913†. H. P o i n c a r é, Dernières Pensées. Kap.V.

1918†. M. P a s c h. Die Forderung der Entscheidbarkeit. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd.27)

1921†. H. W e y l. Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik! (Mathematische Zeitschrift, Bd.10)

1922†. D. H i l b e r t. Neubegründung der Mathematik. (Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, Bd.I)

1922†. D. H i l b e r t. Die logischen Grundlagen der Mathematik. (Mathematische Annalen, Bd.88)

1923†. O. B e c k e r. Beiträge zur phänomenologischen Begründung der Geometrie und ihrer physikalischen Anwendungen. (Im Jahrbuch für Philosophie und phänomenologischen Forschung, Bd.6)

1928

1928

1928

1927

1928

1928

1928

1928

1929*

1925. L. E. J. Brouwer, Über die Bedeutung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten, insbesondere in der Funktionentheorie. (Journal für Mathematik, Bd.154)

1925. D. Hilbert. Über das Unendliche. (Math.Ann.Bd.95)

1925. H. Weyl. Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik. (Zeitschrift Symposion, I. Auch als Sonderdruck)

1926. H. Weyl. Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft. (Im Handbuch der Philosophie, I. Auch als Sonderdruck)

1927. O. Becker. Mathematische Existenz. Untersuchungen zur Logik und Ontologie mathematischer Phänomene. (Wie oben Jahrbuch für Philosophie, Bd.8. Auch als Sonderdruck)

1928. D. Hilbert. Die Grundlagen der Mathematik. (Abh.a.d. Math. Sem., Hamburg, Bd.6)

1928. L. E. J. Brouwer. Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus. (Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften)

1928. M. Geiger. Rezension des zweiten Buches von O.Becker (1927).(Göttingische gelehrte Anzeigen)

1928. A. Fraenkel. Einleitung in die Mengenlehre.Dritte Auflage, Kapitel IV.V. (Sehr vollständige Literaturangaben. Ein Auszug daraus ist im Jahre 1927 unter dem Titel Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre erschienen.)

1929. E. Study. Die angeblichen Antinomien der Mengenlehre. Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften. (Auch einzeln zu haben)

A N H A N G .

Es folgen jetzt die Blätter,die dem Studyschen Manuskript ungeordnet beilagen.Sie rühren von früheren Bearbeitungen her unddie Stelle,an der sie früher standen,ist nicht mehr mit Sicherheit anzugeben.In den endgültigen Text sollten sie nicht mehr eingefügt werden.Die Seitenzahlen der beiden bis hierher abgedruckten Manuskriptteile folgen lückenlos aufeinander.Die Wiedergabe der folgenden Blätter geschieht also nur aus dem Wunsche heraus,hier alles zusammenzustellen, was sich im Studyschen Nachlasse zusammen mit dem Buchmanuskript vorfand.

Es gibt eine Menge von Mathematikern, denen, wenn sie nur das Wort Axiom hören, Ehrfurchtsschauer durch die Gebeine rieseln. Worauf es ankommt, ist, möglichst unverständlichen "Tiefsinn" hervorzubringen, der gesunde Verstand, der in unserer verworrenen geistigen Kultur auch sonst zur Seltenheit geworden ist, wird gar nicht befragt. Er ist eben naiv - und wird somit durch ein Wort ~~xxxxxxxxx~~ bezeichnet, das schon seit längerer Zeit auf dem Wege ist, sich zu einer Ausdrucksform für tiefste Geringschätzung zu entwickeln. Besonders in einem Teile der heutigen Mengenlehre - ganz und gar nicht in der C a n t o r's - hat sich, wie wir noch sehen werden, die Unvernunft zu bedeutenden Dimensionen entwickelt.

Anmerkungen und Zusätze.

I.

Die "Revolution" in der Mathematik.

Zu Satz 00. Ein Fall, in dem auf eine im Sinne von P a s c h zu gestaltende Beweisführung nicht wohl verzichtet werden kann, bildet den Gegenstand von Arbeiten, die ihres ungewöhnlichen Charakters wegen Aufsehen erregen mussten.

Worum es sich dabei handelt, soll am Beispiel des "grossen" Fermat'schen Lehrsatzes" erläutert werden, der behauptet, die Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

sei in positiven ganzen Zahlen x, y, z und n unlösbar, wenn $n > 2$ ist.

Bekanntlich sind, durch 200 Jahre, alle Bemühungen, diese Behauptung zu begründen oder zu widerlegen, ohne Erfolg geblieben.

Die meisten Mathematiker zweifeln nun nicht daran, dass menschliche Unvollkommenheit die Ursache des bisherigen Scheiterns solcher Versuche sein müsse. Vielleicht würde es doch noch gelingen, der Sache auf den Grund zu gehen. Genau genommen muss aber auch noch mit der Möglichkeit gerechnet werden, dass diese Aufgabe und noch viele andere zu schwer seien für die Köpfe auch der klügsten Menschen, deren Fassungskraft, insbesondere für lange Ketten von Schlüssen nun einmal nicht unbegrenzt ist. Im letzten Falle würden gewisse Probleme, unter ihnen das genannte, praktisch, tatsächlich, nicht gelöst werden können. Die Sache würde ähnlich liegen wie bei der viel einfacheren, aber freilich auch sehr uninteressanten Frage nach der Zahl, die im Dezimalbruch für π hinter dem Komma an der Stelle 2^{1000} steht: Niemand würde die erforder-

liche Zeit aufbringen können, von der nicht minder nötigen Geduld ganz zu schweigen. Es haben nun

Und es gibt noch eine andere"Denkmöglichkeit", die, wenn man es genau nehmen will, gleichfalls in Betracht gezogen werden muss. Die gesamte Arithmetik beruht auf dem auch den Laien geläufigen Rechnen mit natürlichen (positiven, ganzen) Zahlen. Es könnte nun sein, dass wir diese Regeln noch nicht vollständig kennen: Es würde noch etwas hinzuzufügen sein, wovon freilich Niemand die entfernteste Vorstellung hat. In diesem Falle würde möglicher Weise die Frage nach dem Richtig oder Falsch des Femat'schen Satzes mit unseren bisherigen Mitteln wirklich nicht entscheidbar sein. Aber auch das wäre dann wieder eine Folge menschlicher Unvollkommenheit, ebenso wie in dem vorher betrachteten Falle.

Dem gegenüber haben nun verdienstvolle Mathematiker, wie H. L. T. B r o u w e r und H. W e y l, die sich, ich weiss nicht warum, Intuitionisten nennen, darauf aufmerksam gemacht, dass noch mit einer anderen Möglichkeit gerechnet werden muss. Es ist denkbar, dass gewisse Fragen, wie eben die des F e r m a t'schen Problems, selbst von denkenden Wesen mit unbegrenzter Lebensdauer und Geduld, unter keinen Umständen beantwortet werden können. Neben der Beantwortung durch Ja und Nein steht in der That, als "Denkmöglichkeit", noch die"Nicht-Entscheidbarkeit". Nun beruhen aber nicht wenige Schlüsse der Mathematik, wie auch anderer Wissenschaften, auf der Annahme, dass es eine solche dritte Möglichkeit, wenigstens für die genannten fiktiven Wesen, gar nicht gibt. (Annahme des Ausschlusses "eines Dritten"). Zum Beispiel wird irgend eine durch einen verwickelten Prozess definierte Zahl entweder $\neq 1$ oder $= 1$ sein. Gelingt es, die eine Alternative auszuschliessen, so bleibt nun die andere übrig, und damit hat man einen Lehrsatz. Nein, sagen die Intuitionisten, es gibt eben noch ein Drittes. Und damit bricht ein grosser Teil von dem, was nach

Ansicht der meisten Sachverständigen wohlbegründet war, zusammen. Vieles, ja der grösste Teil der heutigen Mathematik, wird einfach über Bord zu werfen sein, anderes bedarf einer neuen Ableitung, bei der vom Ausschluss der dritten Alternative nicht Gebrauch zu machen ist. Man kann sich nicht leicht ein radikaleres Programm vorstellen, oder eines, dessen Verwirklichung noch beschwerlicher wäre.

Was sollen wir nun davon denken?

Vor Jahren ist einmal ein Buch erschienen, auf dessen Titelblatt zu lesen stand: Zweite Lieferung des zweiten Bandes. Der von einer Zeitschrift bestellte Referent bemerkte dazu ganz trocken: Warten wir mit dem Rezensieren, bis die erste Lieferung des ersten Bandes erschienen sein wird!

Nun ist das, was wir bisher von der Ausführung des geschilderten Umsturzprogramms zu sehen bekommen haben, alles eines zweiten Bandes zweite Lieferung. Was den Anfang bilden müsste, fehlt: Ein nach den eigenen Grundsätzen der Intuitionisten, und dazu durch lückenlose Aneinanderreihung einfacher Schlüsse, geführter Beweis, dass irgend eine bestimmte Frage der Mathematik, die nach den bisher in Geltung gewesenen Ansichten eine auf Ja und Nein gestellte ~~Ansicht~~ Antwort zulassen müsste, sie gleichwohl nicht haben kann.

Es geht nicht an, zu argumentieren: Sollte eines Tages der F e r m a t'sche Lehrsatz bewiesen oder widerlegt werden können, nun, so nehmen wir eben ein anderes Beispiel. An Fragen, die Niemand zu beantworten weiss, war in der Mathematik noch niemals Mangel, der Hinweis darauf lehrt uns gar nichts, und die Konstruktion immer neuer hoffnungslos verwickelter Gesetzmässigkeiten eben so wenig.

Darüber, dass ihnen und nicht uns anderen die Beweislast zufällt, sind sich die Vertreter der besprochenen Ansicht anscheinend im Klaren. Mögen sie also zusehen, dass ihnen ihr Plan gelingt! Mögen sie es über allen Zweifel sicherstellen, dass nicht etwa menschliche Schwäche die Ursache dafür ist, dass wir auch im Gebiete der Mathematik vor unlösbaren Rätseln stehen, sondern dass das Denken selbst schon das bewirken muss, genauer gesagt, dass aus den Regeln des Zahlenrechnens die grundsätzliche Unentscheidbarkeit irgend einer bestimmt gegebenen Alternative Ja - Nein gefolgert werden muss, und dass diese Regeln sich auch nicht so ergänzen lassen, dass eine solche Folgerung aufgehoben werden müsste.

Bis das auf völlig einwandfreie Art geleistet sein wird, werden wir die herkömmliche Mathematik, mag sie auch noch so viele Mängel haben, nicht über den Haufen zu werfen brauchen. Wir werden also, nach einer gelegentlichen Bemerkung von F. H a u s d o r ff, fortfahren, eine Funktion f(x) als wohldefiniert anzusehen, von der gesagt ist, dass sie für alle rationalen x den Wert Eins und für die übrigen den Wert Null haben soll, auch wenn wir vielleicht niemals erfahren werden, welchen Wert sie für das Argument $x = \pi^{\pi^{\pi}}$ haben mag; und wir werden uns darin nicht stören lassen, wenn wir sogar bemerken müssen, dass es Mathematiker gibt, die nicht zu wissen behaupten, was eine irrationale Zahl ist.

Merkwürdig ist übrigens, dass die besprochene Ansicht von der Mathematik als die bescheidenere hingestellt werden konnte. Ist es denn nicht bescheidener, zuzugeben: "Wir können das nicht", als die blosse Denkmöglichkeit "Es geht überhaupt nicht" zum Leitsatz eines Umsturzprogramms zu machen?

Im Grunde steckt in dem allem dieselbe Überschätzung der reinen Logik, von der im Texte die Rede war, und zwar auch hier

der Logik im Gegensatz zur praktischen Vernunft. Dass man über die Entscheidbarkeit einer unentschiedenen Alternative nicht entscheiden kann, ist ein zu schwaches Argument, um langatmige Auseinandersetzungen und namentlich eine Abweichung von dem Grundsatz des Quieta non movere zu rechtfertigen.

Sollte den besprochenen Forderungen nachgegeben werden, so würde man alle auf Ja und Nein gestellte Fragen in drei Klassen unterbringen müssen:

I. Solche, die entschieden sind.

II. Solche, die entscheidbar, aber tatsächlich nicht entschieden sind.

III. Solche, die unentschieden sind, und zwar auch für die mehrfach genannten fiktiven Wesen.

Und zwischen den Klassen II und III würde man wieder nicht zu unterscheiden wissen. Worauf dieses Nichtwissen beruht, ist aber doch für die Praxis der Forschung ganz gleichgültig. Daher ist es auch gleichgültig, ob man der sicher vorhandenen Klasse II die hypothetische Klasse III hinzufügen will oder nicht, ihre Zusammenfassung zu einer einigen Klasse leistet der Wissenschaft dieselben Dienste.

Die genannten Mathematiker haben einen Vorgänger gehabt in dem "mathematischen Herkules", L. K r o n e c k e r, der zuerst die Forderung der Entscheidbarkeit stark betont zu haben scheint. K r o n e c k e r hat selbst viele Untersuchungen im herkömmlichen Stile angestellt, zuletzt wollte er aber, in einem Idealzustand der Mathematik, doch nur rationale Zahlen gelten lassen. Von einer Definition verlangte er, dass sie ein Kriterium liefern sollte, ob ein gegebenes Ding unter die Definition falle oder nicht. Für die algebraischen Zahlen (Wurzeln von algebraischen

Gleichungen mit ganzzahligen Kooffizienten, $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$) war ein solches Kriterium nicht bekannt, also wurden sie abgelehnt. "Was nützt uns - sagte er zu F. L i n d e - m a n n - Ihre schöne Untersuchung über die Zahl π? Wozu das Nachdenken über solche Probleme, wenn es doch gar keine irrationale Zahlen gibt?" Seitdem ist ein Kriterium für die algebraischen Zahlen bekannt geworden [1]; ich vermute indessen, dass K r o n e c k e r auch dagegen grundsätzliche Einwendungen erhoben haben würde.

Übrigens ist, nach einer Angabe von G. H e s s e n b e r g, Kronecker bereits von A. H. S c h w a r z aufgefordert worden, ein nachweisbar nicht zu entscheidendes Beispiel anzugeben.

In summa, wir dürfen bis auf weiteres der Ansicht bleiben, dass die nicht überwundenen Schwierigkeiten der Mathematik ihre Quelle nicht da haben, wo die sogenannten Intuitionisten sie suchen.

Literatur: F. L i n d e m a n n, (1904), in der Deutschen Ausgabe von H. P o i n c a r é's"Wissenschaft und Hypothese", Anmerkung 4. (3.Auflage, 1914, S.252).

G. H e s s e n b e r g, Grundbegriffe der Mengenlehre, 1906, Kap.XXII.

M. P a s c h, Die Forderung der Entscheidbarkeit. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 27, 1918, S.228.

---

1) H. M i n k o w s k i (1899). Gesammelte Abhandlungen I, 1911, S. 293.

122

angenäherten Berechnung bereits definierter Zahlen. Man braucht sich dann auch nicht auf Folgen (a_m) oder (b_m) rationaler Zahlen zu beschränken.

Das Näherungsverfahren, dessen sich A r c h i m e d e s zur Berechnung der Zahl π bedient hat, gehört bereits in diesen Gedankenkreis. Die Bedeutung dieser geistigen Tat sollte in Elementarbüchern ganz anders gewürdigt werden, als es gewöhnlich geschieht.

Dasselbe Verfahren zur Approximation irrationaler Zahlen ist aber schon P l a t o n bekannt gewesen. Man kennt, auch noch aus dem Altertum, ein einfaches Näherungsverfahren für $\sqrt{2}$, das ebenfalls hierhergehört. Die ersten Näherungswerte sind

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{7}{5}, \quad \frac{41}{29}, \quad \frac{243}{171} \quad \cdots \quad \{< \sqrt{2}\}$$

$$\frac{3}{2} \quad \frac{17}{12} \quad \frac{99}{72} \quad \cdots \quad \{> \sqrt{2}\}$$

jeder folgende Näherungswert $b_{m+1} : a_{m+1}$ wird nach der Formel

$$a_{m+1} = a_n + b_n, \quad b_n + 1 = 2a_n + b_n$$

berechnet. Dies ist das Gesetz der Näherungswerte des Kettenbruchs

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots \quad \{= \sqrt{2}\}$$

Siege wegen des Historischen M o l k, S.136, 137, 166.

124 – 126

sie nicht werden behaupten können, dass sie beliebig grosse endliche Zahlen zu "übersehen" vermöchten, und dass z.B. die Angabe, die man oft genug gedruckt lesen kann, es sei möglich, solche Zahlen in ihre Primteiler zu zerlegen, wenn ein menschliches Vermögen gemeint sein sollte, einfach falsch ist. Es wird ferner darauf hingewiesen werden können, dass der Begriff einer sehr grossen Zahl, so lange nicht weitere Bestimmungen hinzutreten, etwas ganz Nebelhaftes ist, und dass man schon aus diesem Grunde nichts mit ihm anfangen kann, während der Begriff eines vollendeten Unendlichen, wie der Gesamtheit aller rationalen Zahlen, und auch der der Gesamtheit aller rationalen und reellen irrationalen Zahlen immerhin bestimmte Begriffe darstellen, die zu anderen in Beziehung treten können und einer Analysis ihres Inhaltes in gewissem Maasse zugänglich sind. Ich erinnre an die berühmten Sätze von G. C a n t o r: Dass alle rationalen (und auch noch alle algebraischen) Zahlen eine abzählbare Menge bilden, die Zahlen des linearen Kontinuums aber nicht.

Wir stellen also vorläufig fest:

(1) Dass der Gebrauch von Begriffen wie immer, alle, jeder auch in Bezug auf unendliche Mengen unvermeidlich ist, wenn man überhaupt Mathematik treiben will,

(2) dass man durch den Gebrauch derartiger Begriffe ein vollendetes Unendliches bereits als legitimen Begriff der Mathematik anerkennt,

(3) dass die Anerkennung der allgemeinen Begriffe der rationalen und reellen irrationalen Zahlen auch die Anerkennung ihrer Zusammenfassung zu einem neuen Begriff, dem des linearen Kontinuums, notwendigerweise nach sich ziehen muss.

Hiermit ist, nach meiner Meinung, die Verkehrtheit aller

124 – 126

Einwände gegen den Begriff Kontinuum bereits vollständig erwiesen; denn was man sonst noch dagegen vorgebracht hat, ist geradezu absurd. Immerhin soll, um nicht auch eine nur scheinbare Lücke zu lassen, auch das noch betrachtet werden. (Abschnitt VII.)

Den Gedanken, der dem auf Seite 00 hervorgehobenen Satze zugrunde liegt, hat man Prinzip der Permanenz formaler Gesetze genannt. Diese formalen Gesetze bestehen, nach einer ohne Beweis veröffentlichten Bemerkung von G a u s s auch noch für die gemeinen komplexen Zahlen (die der Form x + i y), für höhere komplexe Zahlen (Quaternionen u.s.w.) aber nicht.

Inversion oder dem Punktkreis (𝔶) konjugiert. Zwei Punktkreise können nur dann zu einander konjugiert ~~xxxdxm~~ sein, wenn sie zusammenfallen. Eine Inversion ist zu einem Punktkreis nur dann konjugiert, wenn sie eine Inzidenzlinie hat und diese den Punkt des Punktkreises enthält. Von zwei Inversionen, die zu einander konjugiert sind, gehört mindestens eine zu einer Kreislinie. Gehören beide zu Kreislinien, so schneiden sich diese unter rechten Winkeln.

Von allen (𝔶) - Inversionen oder Punktkreisen - die zu einem (𝔵) konjugiert sind, sagen wir, sie bilden ein Bündel, mögen sie zu Kreislinien (die dann auch ein Bündel bilden) gehören oder nicht. Von allen (𝔶) die zu zwei verschiedenen (𝔵) konjugiert sind, sagen wir, dass sie ein Büschel bilden. Diese Büschel gehören also paarweise zusammen, derart, dass die (𝔵) und die (𝔶), soweit sie Inversionen sind, mit einander vertauschbar sind, und dass die zugehörigen Kreise, soweit sie existieren, einander senkrecht schneiden. Es gibt zwei Arten solcher Paare "reziproker Büschel". Die einen sind identisch mit denen, die wir bei Gelegenheit der Involutionen gefunden hatten. Alle Inversionen des einen Büschels gehören in diesem Falle zu Kreisen, das andere enthält Inversionen beider Arten, und ausserdem zwei Punktkreise, die sie trennen, und auf den Kreislinien des ersten Büschels als dessen "Basispunkte" liegen. Solcher Paare gibt es ∞^4. Grenzfälle davon sind ∞^3 Paare, unter deren Inversionen keine ohne Inzidenzlinie vorkommen. Beide Büschel enthalten denselben Punktkreis, und alle Kreislinien eines jeden Büschels berühren einander im Punkt des Punktkreises.

vgl. I. S. 148

Der Einwand, dass man unmöglich alle Zahlen bilden kann, ist schon darum gegenstandslos, weil zu einer Begriffsbildung gar nicht gehört, dass man alles, was unter einen Begriff fällt, handgreiflich vor Augen hat. Ja, wir können das Wirkliche meistens überhaupt nicht übersehen. Die Bildung von Begriffen, wie chemisches Element, Vogel, Planet, Fixstern setzt nicht voraus, dass man alle Elemente, Vögel u.s.w. kennt. So ist es auch nicht nötig, dass man alle Dezimalbrüche, die es gibt, hinschreiben kann; ihre Existenz wird dadurch nicht aus der Welt geschafft, dass sie uns in ihrer Gesamtheit unzugänglich sind. Wer sagt: "Die Summe oder das Produkt zweier Zahlen von bestimmter Beschaffenheit ist nicht eine solche Zahl", hat die Gesamtheit dieser Zahlen im Sinn, und es ist dann Selbstbetrug, von ihr nicht reden zu wollen.

190 – 195

190 Ausserdem beweisen solche Einwände zuviel. Wir können schon die Gesamtheit der natürlichen Zahlen nicht "übersehen". Wir kennen z.B. die n^{te} Primzahl nicht, wenn n hinreichend gross ist. Es hat daher meines Erachtens auch keinen Sinn, zu verlangen, dass ein "legitimer" Dezimalbruch durch ein "Gesetz" (eine Rechnungsvorschrift) gegeben sein soll, demzufolge "man" seine n^{te} Stelle soll finden können [1]. Ein Gesetz haben wir für die Dezimalentwickelungen von $\sqrt{2}$, e, πI, wir können aber die Ziffer, die an der n^{ten} Stelle steht, bei grossen Werten von n so wenig angeben als die n^{te} Primzahl. Die Definition der irrationalen D e d e k i n d'schen Schnitte setzt nun deren Existenz voraus, die durch Angabe von Beispielen (es genügt ein einziges Beispiel!) bewiesen ist; dass man nur von denen reden soll, die man wirklich aufzeigen kann (wie in den Fällen von $\sqrt{2}$, e, πI) ist eine rein dogmatische Forderung.

Ich kann mich also H ö l d e r nicht anschliessen, der in die Legitimität solcher Begriffe wie Gesamtheit der

Neue Seite

zu erhärten müssen glaubt, durch ~~im~~ das ja schliesslich auch nichts bewiesen werden könnte [2]. Das Kontinuum I und alle daraus abgeleiteten Kontinuen sind mathematische Begriffe wie andere. Sie sind nichts als Worterklärungen, die durch die vorausgegangenen Entwickelungen logisch gerechtfertigt und zugleich hinreichend motiviert sind durch die Bedeutung, die ihre Gegenstände für die Wissenschaft haben. Die Gegenstände dieser Begriffe existieren,

---

1) O. H ö l d e r, Leipziger Berichte, 1926, S.245: "Zunächst ist daran zu erinnern, dass unendlich viele Fälle nur durch ein Gesetz definiert werden können".
2) H ö l d e r, 1924, S.357.

190 - 195

einerlei, ob wir uns zu ihrer Betrachtung entschliessen wollen oder nicht. Sie haben ganz dieselbe Art von Existenz wie etwa der allgemeine Begriff der rationalen Zahl, an dem Niemand Anstoss nimmt.

Geeignet, Verwirrung anzurichten, ist auch ein Unterschied, den man zwischen Aussagen hat machen wollen, in denen die Worte alle und irgendeiner vorkommen 1). Mir scheint der Satz: "Was von irgend einem Element einer (existierenden, also einwandfrei definierten) Menge gilt, gilt vom allem diesen Elementen, und umgekehrt" gar kein Satz (kein "Prinzip") der Logik zu sein, sondern einfach die Feststellung, dass dasselbe mit verschiedenen Worten ausgedrückt werden kann.

Ein Gegener des eigentlich-Unendlichen soll G a u s s gewesen sein. Es wird ein Satz zitiert aus dem Jahre 1831, der also lautet:

Hier folgt die 1-1 S. 151 abgedruckte Seite *

". . . so protestiere ich . . . gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse (Zahl) als einer vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich nur von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist".

Als einen terminologischen Missbrauch muss ich es betrachten, dass zahlreiche Autoren immer von dem Kontinuum reden, als ob man ihrer nicht mehrere zugleich betrachten könnte, und als ob es da keine Unterschiede gäbe. Dies ist veranlasst worden durch den wunderbaren Satz von G. C a n t o r, wonach alle Kontinuen ("Punktkontinuen") gegenseitig-eindeutig auf einander abgebildet werden können (dieselbe Mächtigkeit haben). Aber diese Abbildungen sind in der Regel nicht stetig, und sie sind es niemals bei verschiedener Dimensionenzahl. Sie zerstören gerade das, worauf es bei dem Kontinuumbegriff ankommt. Und selbst wenn sie

---

1) F r e g e, 1913, S.35. H a s s e und S c h o l z, 1928, S.43. S c h o l z, 1928, S.43.

190 - 195

stetig sind, gibt es noch Unterschiede. In der projektiven Geometrie lässt sich eine irreduzibele Kurve zweiter Ordnung punktweise und stetig auf das Kontinuum IV beziehen, und hat sie einen reellen Zug, so lässt sich dieser ebenso auf das Kontinuum II beziehen. Aber darum sind doch die Kurve und ihr reeller Zug nicht identisch mit dem einen oder anderen dieser Kontinuen.

Meistens richten ja solche Nachlässigkeiten des Ausdrucks in dem Zusammenhang, in dem sie stehen, keinen Schaden an, aber Nachlässigkeiten sind sie doch wohl.

Auf die Sätze C a n t o r's, wonach die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, die Menge der (eigentlichen) Zahlen aber nicht, bin ich hier nicht eingegangen; dieser Sachverhalt ist allgemein bekannt, und er wird weiter hier nicht benutzt.

203

Ferner stellt die Theorie der Gruppe (Γ_6, H_6) den einfachsten Fall einer ganzen Reihe unter einander verwandter Theorien dar, die sich nach mehreren Richtungen hin in's Unendliche erstrecken, und zu den wichtigsten der Geometrie überhaupt gehören; wie aus den Bemerkungen am Schluss des vorigen Abschnittes hervorgeht. Zu diesen Theorien gehört auch die projektive Geometrie im komplexen Gebiet, und zwar bei unbestimmter Dimensionenzahl[1].

1) C. S e g r e, Un nuovo campo di ricerche geometriche, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, v.XXV, 1889; und J. H. C o o l i d g e, The Geometry of the Complex Domain, 1924. Siehe auch des Verfassers Geometrie der Dynamen, 1903, die methodisch verwandte Untersuchungen über reelle Figuren des "gewöhnlichen Raumes" enthält.

Sehr verbreitet scheint dieser Gedanke auch jetzt noch nicht zu sein. So besitzen wir noch kein Lehrbuch, das vom Zahlbegriff aus die Nicht-Euklidische Geometrie systematisch entwickelt [1].

---

1) Oder vielmehr die besser zu unterscheidenden Arten von Geometrie, die herkömmlicher Weise mit dem genannten Sammelnamen bezeichnet werden. Es sind das die sphärische und die elliptische Geometrie, die pseudosphärische und hyperbolische Geometrie. Alle diese Disziplinen können, nach einem von F. K l e i n (1872) ausgesprochenen Grundsatz, sachgemäss durch gewisse Gruppen birationaler Transformationen definiert werden; und zwar die sphärische und pseudosphärische Geometrie durch Untergruppen der Gruppe der konformen Transformationen (im Falle von nur zwei Dimensionen durch Untergruppen der M ö b i u s'schen Gruppe der Kreisverwandtschaften, vgl. S.00), die elliptische und hyperbolische Geometrie durch Untergruppen der Kollineationsgruppe (bei n + 1 homogenen Veränderlichen).
Diese Begriffsbildungen haben,

---

1) Un r
dell

1924

209

neue Gebilde hinzu, zu deren Betrachtung die Geometrie "im Reellen" nur sehr mittelbar Veranlassung gibt. So lässt sich alles, was im Haupttexte über nullteilige und einteilige Kreise gesagt worden ist, auf eine unbestimmte Dimensionenzahl z n übertragen. Diesen Fortschritt verdankt man dem italienischen Mathematiker C. S e g r e [1]. Damit hängt noch ~~nicht~~ vieles zusammen, von dem hier nicht die Rede sein kann.

Und schliesslich kommen noch alle die Gegenstände hinzu, von denen zu Schluss des vorigen Abschnittes die Rede gewesen ist. In allen diesen Fällen hat man es mit geschichteten Gruppen zu tun, deren Hauptschicht einfach ist, mit alleiniger Ausnahme

---

1) Un nuovo campo di ricerche geometriche, Atti della R. Accademia delle Science di Torino, V. XXV, 1889.
J. L. C o o l i d g e, The Geometry of the Complex Domain 1924.

Zunächst die, dass die Dimensionenzahl 3 nur in Bezug auf ihren Zusammenhang mit der physischen Welt einen Vorrang von anderen Dimensionenzahlen hat.

Um des genannten Umstandes willen wird die Geometrie in gewissen Räumen von drei Dimensionen immer eine Vorzugsstellung bewahren. Es ist aber grundsätzlich wichtig, im Klaren darüber zu sein, dass dieser Vorrang einer einzelnen Dimensionenzahl nicht mit Mitteln der Mathematik motiviert werden kann [1].

Eine weitere Folgerung ist, dass die auch in der neuesten Literatur noch vielfach bemerkenswerte Abneigung gegen "das Imaginäre" als ungerechtfertigt zu betrachten ist.

Bleiben wir der Kürze halber bei dem angeführten Beispiel, in dem der"Punkt" definiert ist durch vier Verhältnisgrössen

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 ,$$

so erhalten wir, für den zu betrachtenden "Raum" die Dimensionenzahl 3, wenn wir mit dem Zeichen x_k den Begriff reeller Zahlen verbinden, und die Dimensionenzahl 6, wenn wir darunter gewöhnliche komplexe Zahlen verstehen. Es zeigt sich nun zunächst, dass die Begriffe Punkt, Gerade, Ebene, sich für die projektive Geometrie im komplexen Gebiet geradeso, d.h. durch Formeln gleicher Struktur, definieren lassen, wie im Reellen. Und auch die Transformationsgleichungen

$$x_k' = c_{k0} x_0 + c_{k1} x_1 + c_{k2} x_2 + c_{k3} x_3$$

(k = 0, 1, 2, 3), durch die die "projektiven" Eigenschaften geometrischer Figuren definiert werden, haben für reelle wie komplexe Veränderliche die gleiche Form. Die Folge hiervon ist - wie

---

1) Ein idealistischer Philosoph, P. N a t o r p, hat einen verunglückten Versuch gemacht, das Gegenteil darzutun.

210 - 221

bekannt - dass zahllose Sätze der gewöhnlichen projektiven Geometrie sich ohne weiteres auf das komplexe Gebiet ausdehnen lassen: Wir haben hier wie dort in logischer Hinsicht gleiche Strukturen. Natürlich müssen dann auch die Definitionen und Beweise so angelegt werden, dass sie bei Übergang vom komplexen Gebiet ihre Struktur behalten: Ein Grundsatz, gegen den vielfältig verstossen wird.

Wichtiger noch als dieser methodische Gesichtspunkt ist wohl ein anderer.

Sobald man das Gebiet des rational-konstruierbaren verlässt, erweist sich ein grosser Teil der Geometrie im komplexen Gebiet als sehr viel einfacher als das Entsprechende im Reellen.

Dies gilt insbesondere von allem dem, was auf dem Fundamentalsatz der Algebra beruht: Nur im komplexen Gebiet gilt die einfache Formulierung des (verallgemeinerten) B é z i n t'schen Lehrsatzes. Zum Beispiel haben im Reellen zwei verschiedene irreduzibele reelle Kurven 2.Ordnung bei üblicher Zählung der Multiplizitäten keinen Punkt oder zwei oder vier Punkte mit einander gemein. Im Ganzen (im komplexen Gebiet) haben sie aber immer vier Punkte gemein. Es ergibt sich wieder ein methodischer Gesichtspunkt: Zuerst Sätze aus der Geometrie des komplexen Gebietes abzuleiten und dann erst zu den (oft sehr viel unzugänglicheren) Besonderheiten überzugehen, die sich bei den spezielleren reellen Figuren zeigen.

Natürlich aber ist die Geometrie im komplexen Gebiet weit reicher, entsprechend der höheren Dimensionenzahl. Der italienische Mathematiker S e g r e hat zuerst die Bedeutung der neuen Fragestellungen erkannt, die sich hieraus ergeben 1). Hiervon aber

1) C. S e g r e, Un nuovo campo di ricerche geometriche. Atti della Reale Accademia della Scienze di Torino, Bd.25, 1889. J.L.C o o l i d g e, The Geometry of the Complex Domain, 1924.

210 - 222

lassen sich Anwendungen machen, die auch in den Gesichtskreis solcher Geometer fallen, die durchaus bei dem "Rellen" stehen bleiben wollen. Im Grunde gehört ~~xxhxx~~ sogar schon die Geometrie der M ö b i u s'schen Kreisverwandtschaften hierher (S.00), die ihrem Inhalte nach mit der Geometrie im komplexen Gebiet einer Geraden zusammenfällt, und sich nur einer anderen Sprache bedient. Ebenso lassen sich alle Lehrsätze der ebenen projektiven Geometrie im komplexen Gebiet reell deuten im gewöhnlichen Raume, wiederum dem einer projektiven Geometrie (nun der gewöhnlichen von drei Dimensionen), und zwar lückenlos und auf ganz einfache Art [1]. An Stelle der komplexen Punkte und der Geraden der ebenen Geometrie treten dabei Segmente ("erster" und "zweiter Schicht") von reellen geraden Linien, wie sie etwa von einer Kugelfläche abgeschnitten werden können, und (doppelt gezählt) die reellen Punkte dieser Kugelfläche selbst. Ebenso lässt sich ferner auch die projektive Geometrie im (sechsdimensionalen) komplexen Gebiet des gewöhnlichen Raumes deuten. An Stelle der genannten Segmente von Geraden treten dann Lagen eines starren Körpers, Sorten, im reellen Gebiet eines hyperbolischen Raumes (wiederum des Inneren etwa einer Kugelfläche).

Diese Gedanken liegen des Verfassers Buch Geometrie der Dynamen zu Grunde(1903), und ebenso einem Aufsatz Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik (Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1913). Nur werden in diesen Schriften in der Hauptsache nicht die im Texte angedeuteten Lehrsätze und ihre unmittelbaren Folgerungen abgehandelt, sondern Grenzfälle von ihnen, die dem Gedankenkreis der Euklidischen Geometrie angehören oder sich ihm anschliessen, übrigens aber weniger einfach sind.

---

1) Siehe Aufsätze Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie, im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd.XI, 1902, besonders Lehrsatz III, und Fortsetzung davon, Bd.XV, 1906. Die Beweise, die übrigens keineswegs schwierig sind, sind in diesen Arbeiten unterdrückt.

Alles dieses, und noch vieles andere, muss denen entgehen, die vom "Imaginären" in der Geometrie nichts wissen wollen. Dahin gehört vor allem der berühmte Satz von S. L i e, wonach zwischen der projektiven Geometrie des "gewöhnlichen" Raumes und der Kugelgeometrie ein gegenseitiger eindeutiger Zusammenhang besteht.

L i e selbst hatte diesen Satz unrichtig abgefasst, und ebenso auch F. K l e i n. (Siehe darüber die Kritik im "Jahresbericht", Bd.25, 1916). Wegen des wirklichen Sachverhalts, der übrigens ganz einfach ist, siehe Math. Annalen, Bände 86 - 91, 1922 - 1924, besonders Lehrsatz XXXI, mit Erläuterungen (Bd.91, S.111), ferner Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1926. Der letzte Aufsatz enthält eine sehr vereinfachte Behandlung der algebraischen Seite des Gegenstandes.

Verzichtet man auch in diesem Falle auf eine systematische Betrachtung imaginärer Figuren, so bleibt eine vage Analogie übrig, die eine ganz ungenügende Einsicht in den wirklichen Sachverhalt gibt. Schliesslich wird, in Bezug auf Geometrie, noch ein letzter Hauptpunkt anzumerken sein.

Geometrische Schriften, besonders ältere Werke, die sich auf die erwähnte "Geometrie der Lage" beziehen, wird angefüllt mit Lehrsätzen qualitativer Art. Z. B. wird eine Kurve z.Ordnung "erzeugt" durch zwei projektiv auf einander bezogene Büschel gerader Linien. Daraus erhält man, ohne jede Rechnung, den berühmten Satz von P a s c a l und anderes. Von Zahlenwerten ist in solchen Werken gar nicht die Rede. Sie treten aber von selbst auf, und werden aus keinem anderen Grunde bei Seite gelassen als dem, dass sie der "synthetischen" (konstruktiven) Behandlung schwer zugänglich sind. Man kapriziert sich auf eine bestimmte Methode, will ausserdem in Worten bequem darstellbare Sätze haben, und schiebt alles weg, was die Methode nicht leicht oder gar nicht liefern will.

Zum Beispiel bestimmen schon vier reelle auf einer Geraden gelegene Punkte einer geraden Linie, die in eine bestimmte

210-222

Reihenfolge gesetzt sind, eine Zahl, ihr Doppelverhältnis. Dieses kann irgend einen Wert haben, z.B. $\frac{17}{5}$ oder auch π. Ist dieser Wert eine rationale Zahl, so lässt er sich durch rational-ausführbare Konstruktionen ermitteln, aber fast immer nur auf eine äusserst verwickelte Art, während die analytische Methode ihn ganz unmittelbar liefert.

K. C h r . v. S t a u d t (1798 - 1867), der Schöpfer der "Geometrie der Lage", den man mit Recht einen modernen Euklid genannt hat, hat diese Schwierigkeit durch scharfsinnige Überlegungen überwunden. Aber gerade das, was der konstruktiven Methode ihre besondere Schönheit und, in einfacheren Dingen, auch Überlegenheit verleiht, musste dabei verloren gehen. So hat denn dieser hervorragende deutsche Mathematiker, einer der wenigen Schüler von G a u s s, keine sonderlich bemerkenswerte Nachfolge gefunden, und im Ausland ist er fast unbekannt geblieben 1). Auch die Schwierigkeiten, die das Imaginäre gerade der synthetischen Methode bieten musste, hat v. S t a u d t überwunden.

Es versteht sich wohl, dass hier nicht von vielen Einzelheiten des Rede sein kann. Ich möchte nur hervorheben;

In Worten bequem ausdrückbare Sätze der Geometrie bedeuten, so wertvoll, ja unentbehrlich sie vielfach sind, doch immer nur mehr oder minder subjektiv-umgrenzte Ausschnitte aus dem ungemein viel reicheren Tatbestand von Algebra und Analysis. Gegen eine ausschliessliche Verwendung des begrifflichen Denkens, im Gegensatz zum rechnenden Verfahren, ist ausserdem einzuwenden, dass es dem ersten an wirksamen Kontrollen gebricht: Solche Kontrollen erscheinen als sehr nötig, angesichts der vielen Fehler, von denen die geometrische Literatur voll ist.

Dass persönliche Neigungen oder eigentlich Abneigung gegen das vermeintlich langweilige Rechnen bei der Bevorzugung eines begrifflichen, durch "Anschauung" unterstützten Denkens eine grosse Rolle spielen, kann durch historische Beispiele erwiesen werden. Ich denke hier besonders an J a c o b S t e i n e r, der Autodidakt war und keine genügende Schulung in Algebra und Analysis besass. Seinem Genie gelang, unter anderem, jene wunderbare, seitdem vielfach untersuchte Lösung des M a l f a t t i'schen Problems, die seinen Namen trägt, und übrigens auch heute

---

1) Siehe jedoch die schöne Würdigung der Leistung v. S t a u d t's von C. J u e l in den Verhandlungen des fünften Kongresses der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors (1922), 1923. Vgl. auch M. N o e t h e r, Zur Erinnerung an K. C h r. v. S t a u d t, 1901.

Reihenfolge gesetzt sind, eine Zahl, ihr Doppelverhältnis. Dieses kann irgend einen dort haben, z.B. -1 oder auch π. Ist dieser weit eine rationale Zahl, so lässt er sich durch rational-auflösbare Konstruktionen ermitteln, aber fast immer nur auf eine Annäherung verwickelte Art, während die analytische Methode ihn ganz unmittelbar liefert.

K. G h r. v. S t a u d t (1798 – 1867), der Schöpfer der "Geometrie der Lage", den man mit Recht einen modernen Euklid genannt hat, hat diese Schwierigkeit durch konstruktive Überlegungen überwunden. Aber gerade das, was der konstruktiven Methode ihre besondere Schönheit und, in einfacheren Dingen, auch Übersichtlichkeit verleiht, musste dabei verloren gehen. So hat denn die ihr hervorragende deutsche Mathematiker, einer der wenigen Schüler von G a u s s, keine sonderlich bemerkenswerte Nachfolge gefunden, und im Ausland ist er fast unbekannt geblieben [1]). Auch die Schwierigkeiten, die das Imaginäre gerade der synthetischen Methode bieten musste, hat v. S t a u d t überwunden.

Es versteht sich wohl, dass hier nicht von vielen Einzelheiten die Rede sein kann. Ich möchte nur hervorheben:

In Worten besitzen ausdrucksvolle Sätze der Geometrie bedeutende, so wertvoll, ja unentbehrlich sie vielfach sind, doch immer nur mehr oder minder endlektiv-umgrenzte Ausschnitte aus dem unermeßlich reicheren Tatbestand von Algebra und Analysis. Gegen eine ausschließliche Verwendung des begrifflichen Denkens, im Gegensatz zum rechnenden Verfahren, ist ausserdem einzuwenden, dass an dem ersten an wirksamen Kontrollen kaum gebricht; solche Kontrollen erscheinen als sehr nötig, angesichts der vielen Fehler, von denen die geometrische Literatur voll ist.

Dazu persönliche Neigungen oder eigentlich Abneigung gegen den vermeintlich langweiligen Rechnen bei der Bevorzugung eines begrifflichen, durch "Anschauung" unterstützten Denkens eine grosse Rolle spielen, kann durch historische Beispiele erwiesen werden. Ich denke hier besonders an J a c o b S t e i n e r, der Autodidakt war und keine genügende Schulung in Algebra und Analysis besass. Seinem Genie gelang, unter anderem, jene wunderbare, vielfach vielfach unterschätzte Lösung des M a l f a t t i' schen Problems, die seinen Namen trägt, und übrigens auch Neuta-

---

1) Siehe jedoch die rühmende Würdigung der Leistung v. S t a u d t's von C. B e r n e s i n den Verhandlungen des Fünften Kongresses der Skandinavischen Mathematiker in Helsingfors (1922), 1923. Vgl. auch K. D o e h l e m a n n, Zur Erinnerung an K. G h r. v. S t a u d t, 1901.

210 – 222

noch in algebraischer Hinsicht nicht genügend durchdacht ist [1]. Die Unentbehrlichkeit rechnender Kontrollen wird ebenfalls durch das Beispiel S t e i n e r's und v[illegible]ler anderer bewiesen, die Fehler hätten vermeiden können, wenn ihnen die Methoden der Algebra geläufiger gewesen wären.

Ein Beispiel für die Unentbehrlichkeit der algebraischen Betrachtungsweise bildet die Unterscheidung, die wir durch die Worte Links und Rechts und damit zusammenhängende Worte zum Ausdruck bringen. Diese Unterscheidung existiert in der projektiven Geometrie nur im reellen Gebiete, und zwar nur in Räumen von 1, 3, 5 ... Dimensionen. Es handelt sich dabei ohne allen Zweifel um einen wichtigen Tatsachenkomplex. Dieser fehlt

---

1) Das M a l f a t t i'sche Problem hat, nach Aufhebung einer ungerechtfertigten Beschränkung, 32 Lösungen, die durch die G a l o i s'sche Gruppe des Problems einfach-transitiv vertauscht werden. Diese Gruppe ist holomorph zu der des Appolonischen Problems.

nur als Mittel zu anderen Zwecken eingeführt und, man kann beinahe sagen, systematisch misshandelt wird.

Einer meiner früherer Schüler, Herr F r a n z B o s c h, hat, übrigens von sich aus, diesen Gedanken an der ihm als einem Schulmann nahe liegenden Dreiecksgeometrie erläutert. Es darf hier wohl auf seine Arbeit verwiesen werden, wiewohl sie noch nicht erschienen ist.

Betrachten wir jetzt nochmals die projektive Geometrie, unter Beschränkung auf Reelles und, der Kürze halber, auf zwei Dimensionen. Die einfachsten Figuren sind dann Punkte

$$x_0 : x_1 : x_2$$

und Geraden

$$u_0 : u_1 : u_2 ,$$

beide gegeben durch Tripel reeller Zahlen, die als Verhältniszahlen aufzufassen sind.

$$(ux) = u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = 0$$

ist die bekannte Bedingung der vereinigten Lage eines Punktes und einer Geraden.

Alle Punkte und alle Geraden bilden dann, wie wir sagen, je ein <u>projektives Kontinuum</u>, und diese beiden zusammengehörigen Kontinuen sind das Substrat der ebenen projektiven Geometrie - alle Figuren, mit denen diese Disziplin es zu tun hat, setzen sich aus ihnen zusammen.

Dies darf nun nicht so verstanden werden, als ob der <u>ge</u>samte Inhalt der projektiven Geometrie den Begriff Kontinuum nötig hätte. Wir können uns ja darauf beschränken, nur Punkte und Geraden mit rationalen (oder was hier auf dasselbe hinauskommt ganzzahligen) Koordinaten zu betrachten, und entsprechend auch in den Transformationsgleichungen, durch die die Aequivalenz (Kollinearität) verschiedener Figuren definiert wird, nur ebensolche Koeffizienten zuzulassen. Die elementaren Konstruktionen: "Bestimmung der Verbindungsgeraden

230 - 234

Dieser wunderbare Satz A r o n h o l d's erscheint mir aus mehr als einem Grunde bemerkenswert: Die 7 Geraden können, mit gewissen Beschränkungen, willkürlich angenommen werden, und sie liefern dann mit den 21 übrigen das Doppeltangentensystem einer nicht spezialisierten Kurve vierter Ordnung [1]. Sodann stellt uns eben dieser Satz aber auch die Beschränkung lebhaft vor Augen, die unserem Konstruktionsbereich anhaftet. Gäbe es nämlich nichts als Ketten linearer Konstruktionen, (rational-ausführbare Konstruktionen), so dürften wir von Kurven vierter Ordnung nicht einmal reden. Dies ist, wie wir noch sehen werden, ein ganz wichtiger Gesichtspunkt. Und drittens hätte A r o n h o l d seinen Satz schwerlich finden können, wenn ihm die Theorie der Abel'schen Funktionen nicht geläufig gewesen wäre. Wir sehen also, an diesem Beispiel, wie wenig es dem Fortschritt dienlich ist, sich auf eine bestimmte Methodik oder einen einzelnen Operationsbereich zu kaprizieren und nicht nach links und rechts zu sehen.

Wie man nun von den linearen Konstruktionen zu anderen fortschreiten kann, will ich nicht an dem Beispiel der projektiven Geometrie, sondern an einem anderen auseinandersetzen, das so gut wie ganz unbekannt geblieben ist, wiewohl es nun schon seit mehr als dreissig Jahren in der Literatur vorliegt.

"In fernen Zeiten und längst entschwundenen Vergangenheiten", als Geometrie Landmessung nicht nur hiess, sondern auch war, waren die Hilfsmittel des Geometers ohne Zweifel ausschliesslich Lineal und Zirkel. Die Gerade und der Kreis, der von seinem

---

1) Hierüber scheint eine genügende Untersuchung noch nicht vorzuliegen. Jedenfalls dürfen keine drei der sieben Geraden durch einen Punkt gehen und keine sechs eine Kurve 2.Klasse berühren.

230–234

Mittelpunkt aus konstruiert wird, sind daher die wichtigsten Figuren der ebenen Geometrie noch bei E u k l i d, und sie haben das Interesse derer, die für Geometrie Verständnis hatten, gefesselt bis auf den heutigen Tag. Die berühmten Konstruktionen M a s c h e r o n i's, die, wie ganz neuerdings bekannt geworden ist, schon 125 Jahre früher ein dänischer Geometer M o h r gefunden hatte, bilden eine späte Nachlese [1].

Es fehlten nun den Alten, und auch noch in neurer Zeit solchen, die den antiken Gedankenkreis zu erweitern bestrebt waren, die modernen Begriffe, die wir durch die Worte Transformation und Gruppe bezeichnen, und es fehlen so ziemlich überall auch heute noch weitere Gedanken, die sich aus einer Anwendung der genannten Begriffsbildungen auf die Geometrie der Kreise ergeben.

Wir erinnern den Leser an das Kontinuum IV, in dem die reellen Punkte einer Ebene durch Zufügung eines "uneigentlichen Punktes" (unseres "Punktes" ∞) ergänzt sind, und an die zugehörigen Transformationen, die wir auch schon angegeben hatten, und die eine aus zwei Schichten Γ_6 und H_6 bestehende Gruppe bilden. Der Index 6 bezeichnet hier die Zahl der wesentlichen Parameter der beiden Schaaren von Transformationen (2. ∞^6 Transformationen), von denen die zu 6 gehörigen für sich schon eine Gruppe (invariante Untergruppe der Gruppe Γ_6, H_6), und zwar eine kontinuierliche Gruppe (ein einziges Kontinuum) bilden.

Die geschichtete (nach L i e "gemischte") Gruppe (Γ_6, H_6)

---

1) Geometria del campasso, 1797. G e o r g M o h r; Euclides Danicus, 1672. Mit einem Vorwort von J. H j e l m s l e v und einer deutschen Übersetzung von J. P å l, 1928.

Mittelpunkt aus konstruiert wird, sind daher die wichtigsten Figuren der ebenen Geometrie noch bei E u k l i d, und sie haben das Interesse derer, die für Geometrie Verständnis hatten, bewahrt bis auf den heutigen Tag. Die berühmten Konstruktionen M a s c h e r o n i's, die, wie ganz neuerdings bekannt geworden ist, schon 125 Jahre früher ein dänischer Geometer M o h r gefunden hatte, bilden eine späte Episode [1].

Es fehlten nun den Alten, und auch noch in neuerer Zeit solchen, die den antiken Gedankenkreis zu erweitern bestrebt waren, die modernen Begriffe, die wir durch die Worte Transformation und Gruppe ausdrücken, [illegible], und es fehlen so ziemlich überall auch heute noch weitere Gedanken, die sich aus einer Anwendung der genannten Begriffsbildungen auf die Geometrie der Kreise ergeben.

Wir erinnern den Leser an das Kontinuum IV, in dem die reellen Punkte einer Ebene durch Zufügung eines "ungeeigneten Punktes" (unseres "Punktes" ∞) ergänzt sind, und an die zugehörigen Transformationen, die wir auch schon angegeben hatten, und die eine aus zwei Gebieten Γ_6 und H_6 bestehende Gruppe bilden. Der Index 6 bezeichnet hier die Zahl der wesentlichen Parameter der beiden Scharen von Transformationen (2. ∞^6 Transformationen), von denen die zu 6 gehörigen für sich schon eine Gruppe (invariante Untergruppe der Gruppe Γ_6, H_6), und zwar eine kontinuierliche Gruppe (ein einziges Kontinuum) bilden.

Die gesuchte (nach L i e "gemischte") Gruppe (Γ_6, H_6)

---

1) Geometria del compasso, 1797. G e o r g M o h r: Euclides Danicus, 1672. Mit einem Vorwort von J. H j e l m s l e v und einer deutschen Übersetzung von J. P. A j, 1928.

230-234

hat nun die Eigenschaft Kreislinien und gerade Linien unter einander zu vertauschen (nicht aber auch schon die Geraden unter einander). Wir werden also, wenn wir unserem Gegenstand gerecht werden wollen, den Begriff Kreis anders fassen müssen als es in der Elementargeometrie herkömmlich ist:

230-234

Seite 00 angegeben worden. Zu dieser Gruppe (Γ_6 , H_6) gehört das Punktkontinuum IV; oder, nach Ausführung der Umkehrung einer stereographischen Projektion (s.00) das Kontinuum der reellen Punkte einer Kugel, etwa

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$ [1]

Der Inbegriff aller Geraden ist eine nicht invariante Figur, wohl aber ist es der Inbegriff aller Kreislinien, wenn wir die Geraden zu ihnen rechnen (sie also nicht lediglich als Grenzfälle von Kreisen, sondern als "Kreise" bezeichnen, die den Punkt ∞ enthalten): Auf der Kugel haben wir es, statt mit Kreisen nach elementarem Begriff und Geraden, nur mit Kreisen zu tun. Ferner ist der Mittelpunkt eines Kreises, der den Punkt ∞ nicht enthält, mit diesem Kreis nicht invariant verbunden. Wollen wir also mit invarianten Konstruktionen arbeiten (d.h. mit solchen, die von jeder M ö b i u s'schen Transformation mitgenommen werden), so werden wir den Zirkel nicht benutzen dürfen.

Erinnert sei noch an die bekannte Tatsache, dass die M ö b i u s'schen Transformationen die einzigen Punkttransformationen in der G a u s s'schen Ebene oder auf unserer Kugelfläche sind, denen, ohne Ausnahme, alle Winkel erhalten bleiben (Γ_6) oder umgekehrt werden (H_6).

Mit unserer Gruppe sind nun Konstruktionsbereiche invariant verbunden, deren engster (A) die Bestimmung des vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen verlangt (Siehe die Figur 3. Die drei gezeichneten Kreise schneiden sich unter rechten Winkeln).

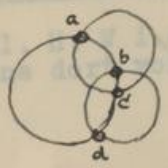


Fig. 3.

Mit dieser Konstruktion lassen sich bereits einige einfache Aufgaben lösen, und zwar in invarianter Form: "Man soll

[1] Vgl. [illegible] n e F. Klein, Vorlesungen über [illegible] (und auch die zugehörige Konstruktion).



Fig. 3.

230 – 234

wenn zwei Punktpaare a, a' und b, b' einer (M ö b i u s'schen) Involution gegeben sind, zu einem beliebigen weiteren Punkt c den zugeordneten c' finden". (Die folgende Figur 4 zeigt nur die Lage der drei Punktpaare, nicht auch die zugehörige Konstruktion).

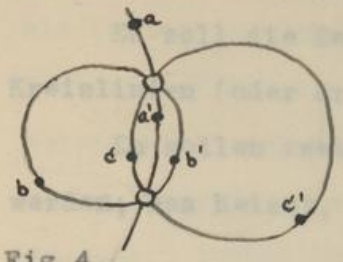


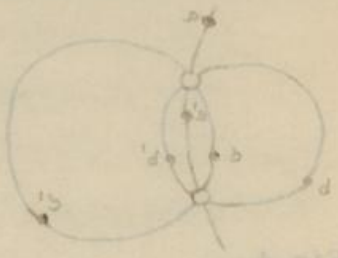
Fig.4.

Ferner: "Es seien zweimal drei Punkte a, b, c und a', b', c' gegeben. Man soll die Transformation der Gruppe finden, die a, b, c der Reihe nach in in a', b', c' überführt"[1].

Dies sind "<u>lineare" Konstruktionen</u>, das heisst, sie erfordern, bei algebraischer Behandlung, nur die Auflösung linearer Gleichungen. Verlangt man dagegen die beiden Doppelpunkte

---

1) Vgl. H. W i e n e r. Eine dort vorkommende Beschränkung der Aufgabe ist nebensächlich.


a'
b'
c'
a
b
c

261

auch nur Inversionen gegeben sein. Wir werden sagen, dass drei Inversionen demselben Büschel angehören, wenn sie mit zwei (verschiedenen) Inversionen vertauschbar sind. Gehören Kreislinien zu den Inversionen, so liegen diese in einem Büschel.

Es soll die Bedingung angegeben werden, unter der drei Kreislinien (oder drei Inversionen) einem Büschel angehören.

Es sollen zwei Büschel von Inversionen zum Schnitt gebracht werden; das heisst, es soll die

Auf das Formalisieren selbst setzt H. die grössten Hoffnungen.

"An Stelle der inhaltlichen mathematischen Wissenschaft, welche durch die gewöhnliche Sprache mitgeteilt wird, erhalten wir (unter ungeheuerlicher Beanspruchung des Wesens ≡ !) einen Bestand von Formeln mit mathematischen und logischen Zeichen, welche sich nach bestimmten Regeln aneinanderreihen." Das auf die Sache gerichtete Denken, auf dem noch jeder Fortschritt der Wissenschaft beruht hat, - auch im Rechnungswerk der Mathematik - soll, unter Ausschaltung eben dieses "eigentlichen" Denkens, durch durch ein mechanisches Verfahren ergänzt werden, das symbolische Verfahren des Logikkalküls, das sich bis jetzt als völlig unbrauchbar erwiesen hat [1]. Unter anderem werden die Behauptungen des Intuitionismus, "so bescheiden

Vgl. II. S. 69.

---

1) H i l b e r t's Mitarbeiter P. B e r n a y s sagt sogar (J. B. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd.31, 1922, S.16): "Wo Begriffe fehlen, da stellt ein Zeichen zu rechter Zeit sich ein. Dies ist das methodische Prinzip der Hilbert'schen Theorie." Man könnte glauben, nicht einen begeisterten Jünger, sondern einen Gegener Hilberts vor sich zu haben.

93 (Logische Untersuchungnn I, S.252).

Mit dem Gesagten dürfte die aufgestellte Theorie hinreichend begründet sein.

Eine Folgerung aus ihr ist, dass Mathematik, zum Unterschiede von den sogenannten Tatsachenwissenschaften, ohne Rücksicht auf irgend etwas anderes betrieben werden kann - wie es tatsächlich geschieht. Ob das unbedingt wünschenswert ist, ist natürlich eine ganz andere Frage. Die Gefahr der Einseitigkeit und scholastischen Verknöcherung ist für den Mathematiker besonders gross.

Es erheben sich nun noch eine Menge von Fragen, die durchdacht sein wollen und beantwortet werden müssen, wenn uns der ausgesprochene Gedanke wirklich vertraut werden soll. Besonders gilt das von der Geometrie.

Die Geometrie enthält viele Sätze qualitativer Art. Wie reimt sich das mit dem Gesagten zusammen? Sind nicht die arithmetischen Definitionen der verschiedenen Arten von Geometrie gekünstelte Gebilde? Wie kann man von der Zahlenlehre aus auf sie kommen? War nicht die Geometrie der Griechen ~~auch~~ eine

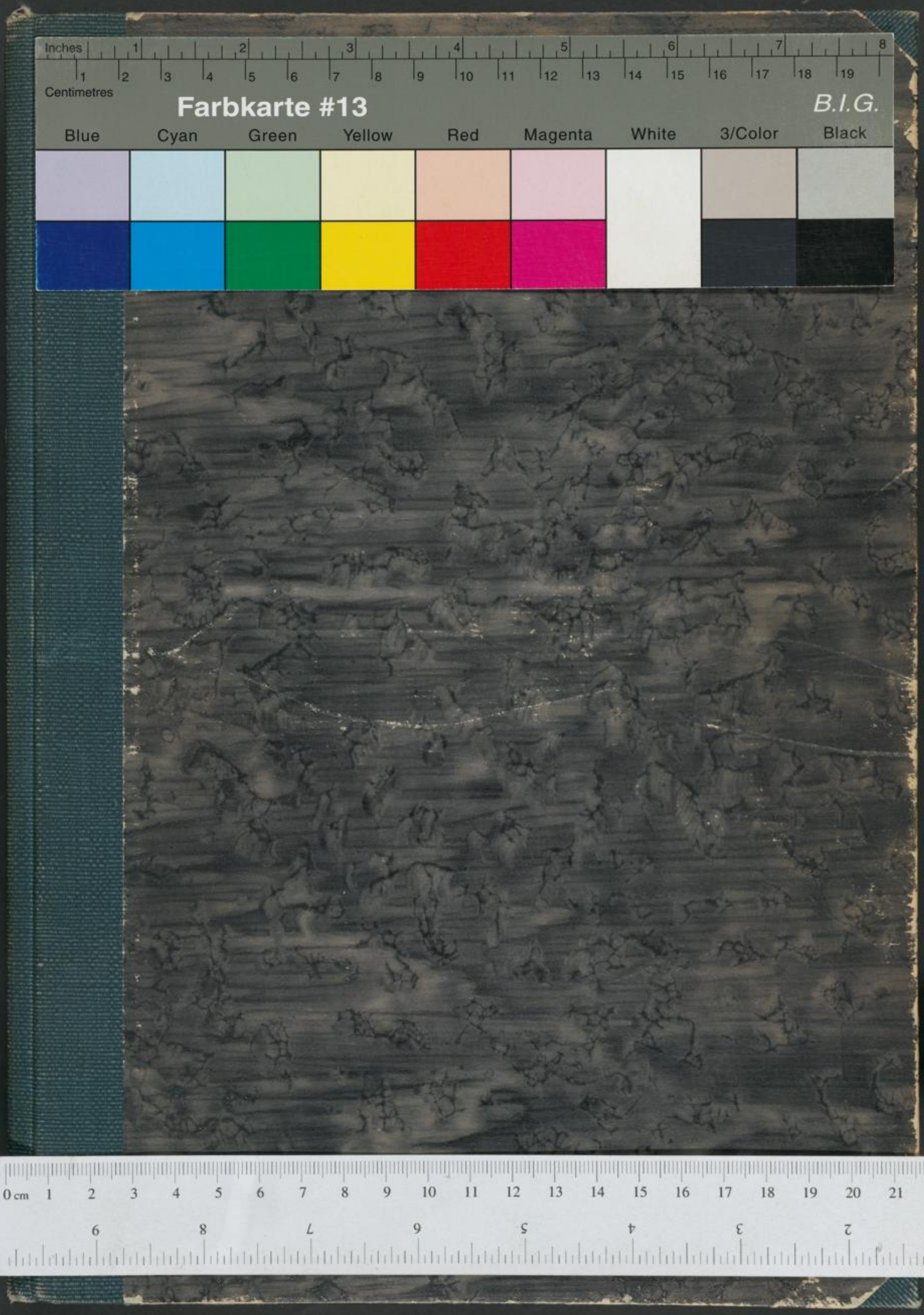
98

Und des zugehörigen Intuitionismus - auf Einzelheiten kommt es jetzt nicht mehr an.

In der Metaphysik von A p e l t (1857), einem Kommentator K a n t's, "F r i e s'scher Schule", ist zu lesen, die gesamte Philosophie sei in den drei Worten Gott, Freiheit, Unsterblichkeit beschlossen. Drei Scheinprobleme, hervorgerufen durch gänzliches Missverstehen der Aufgabe der Erkenntnistheorie. Und ein solches Scheinproblem, das einer verfehlten Einstellung entspringt, ist auch das "grosse Problem" B e c k e r s. Es ist unlösbar: Hat die Mathematik wirklich ihre ganze Existenz in menschlichem Denken, dann wird es auf keine Weise möglich sein, sich ohne Künsteleien und Denkfehler mit dem Vorkommen von Mathematischem in der Natur abzufinden. Ich erblicke also in diesem Ergebnis eine Bestätigung der in den Abschnitten I - V vorgetragenen Auffassung der Mathematik, wie ich mir sie nicht besser wünschen kann.

Handschr.
N.F.
712

E. Sonder
Philosophie
d. Mathem.


Inches
Centimetres
Farbkarte #13
B.I.G.
Blue
Cyan
Green
Yellow
Red
Magenta
White
3/Color
Black