I

Netto.

Ist $G(x,y)=0$ ein bestimmtes Gebilde, so giebt es stets rationale Functionen von x und y, die nur an einer einzigen Stelle ∞ werden. $= G_0(x)\cdot y^n + G_1(x) y^{n-1} + \dots + G_{n-1}(x)\cdot y + G_n(x)$.

Es sei $G(x,y) = Ax + By + \dots$ und dabei sei $B \neq 0$, so daß für $|x| < \delta$ zu jedem x ein einziges y, dessen absoluter Betrag $< \varepsilon$ ist, gehört. Dieses sei mit $y_x = g_1 x + g_2 x^2 + \dots$ bezeichnet, wo g_1 auch Null sein kann; die anderen zu demselben $|x| < \delta$ gehörigen Wurzeln seien $\overset{1}{y}_x, \overset{2}{y}_x, \dots \overset{n-1}{y}_x$. Sind nun z und z_0 zwei willkürliche Größen, so bilden wir

$$\bar G(x, z, z_0) = \frac{G(x,z) - G(x,z_0)}{z - z_0}$$
$$= G_0(x)\left(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \dots + z_0^{n-1}\right) + G_1(x)(\dots) + \dots$$
$$+ G_{n-2}(x)(z + z_0) + G_{n-1}(x)$$

wenn gesetzt wird

$$\bar G(x,y) = G_0(x)\cdot y^{n-1} + G_1(x) y^{n-1} + \dots + G_{n-2}(x) y + G_{n-1}(x).$$

Nun ist ersichtlich, daß

$$\bar G(x, y_x, \overset{\lambda}{y}_x) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots n-1)$$
$$\bar G(x, y_x, y_x) = \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} = G(x, y_x)_2$$

ist. Setzt man jetzt

$$\bar G(x, y, z_0) = G_0(x)\cdot z_0^{n-1} + \overset{1}{G}(x,z)\cdot z_0^{n-2} + \dots + \overset{n-1}{G}(x,z),$$

so folgt, daß alle Coefficienten der Potenzen von z_0,

$$\overset{1}{G}(x,z) = G_0(x)\cdot z + G_1(x),$$
$$\overset{2}{G}(x,z) = G_0(x)z^2 + G_1(x)z + G_2(x),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$\overset{n-1}{G}(x,z) = G_0(x)z^{n-1} + G_1(x)z^{n-2} + \dots + G_{n-1}(x),$$

für $z = y$ endlich bleibend. Ist y selbst für endliche x ~~einem~~ endlichen Werth, so ist es unmittelbar ersichtlich; ist $y=\infty$ so setzen wir in

$$G(x,y,z_0) = \frac{G(x,z_0)-G(x,y)}{z_0-y} = \frac{G(x,z_0)}{z_0-y} = G_0(x)z_0^{n-1} + \overset{1}{G}(x,y)z_0^{n-2} + \dots + \overset{n-1}{G}(x,y)$$

für z_0 n verschiedene Constanten $c_1, c_2, \dots c_n$ ein, so erhalten wir ein System linearer Gleichungen und finden

daraus $G_0(x), \overset{1}{G}(x)\dots$ als lineare Funct. von $G(x,c_1)\dots G(x,c_n)$ u. daraus

$$\overset{\lambda}{G}(x,y) = C_{\lambda 1}\frac{G(x,c_1)}{c_1-y} + \dots + C_{\lambda n}\frac{G(x,c_n)}{c_n-y}.$$

Wird nun hier für ein endliches x y unendlich, so reducirt sich der Ausdruck auf Null.

Ferner wird, da $\overset{\lambda}{G}$ in x vom Grade m in x ist,

$$\frac{\overset{\lambda}{G}(x,y)}{x^m}$$

für unendlich große x endlich. Es sei nun $y_x^{*\nu}$ nach Potenzen von x entwickelt

$$y_x^{*\nu} = \left(y_x^{*\nu}\right)_\mu + x^\mu\left[y_x^{*\nu}\right]_\mu,$$

wobei der erste Summand das Aggregat aller Glieder ist, deren Exponent $<\mu$ ist. Wir bezeichnen nun mit $R_\mu(x,y)$ folgende rationale Function

$$G(x,y,y_x) = G_0(x)\,y_x^{n-1} + \overset{1}{G}(x,y)\cdot y_x^{n-2} + \overset{2}{G}(x,y)\cdot y_x^{n-3} + \dots$$
$$= \left\{G_0(x)(y_x^{n-1})_\mu + G_0(x)\cdot x^{\mu}[y_x^{n-1}]_\mu\right\} + \left\{\overset{1}{G}(x,y)(y_x^{n-2})_\mu + \overset{1}{G}(x,y)[y_x^{n-2}]\cdot x^{\mu}\right\} + \dots$$

$$x^{-\mu}G(x,y,y_x) = x^{-\mu}\left\{G_0(x)\cdot(y_x^{n-1})_\mu + \overset{1}{G}(x,y)\cdot(y_x^{n-2})_\mu + \overset{2}{G}(x,y)\cdot(y_x^{n-3})_\mu + \dots\right\}$$
$$+ \left\{G_0(x)[y_x^{n-1}]_\mu + G_1(x)[y_x^{n-2}]_\mu + \dots\right\}$$

$$R_\mu(x,y) = x^{-\mu}G(x,y,y_x) - \left\{G_0(x)[\hat{y}_x^{n-1}]_\mu - \overset{1}{G}(x,y)[\hat{y}_x^{n-2}]_\mu - \dots\right\}$$
$$= x^{-\mu}\left\{G_0(x)(\hat{y}_x^{n-1})_\mu + \overset{1}{G}(x,y)(\hat{y}_x^{n-2})_\mu + \dots\right\}$$

Wenn man für y setzt y_x, so läßt sich der Ausdruck nach Potenzen von x entwickeln; die Entwicklung beginnt mit $x^{-\mu}G(xy)_2$ und zwar entspringen aus diesem Summanden allein negative Potenzen von x, so daß für
$$R_\mu(x,y_x) = Bx^{-\mu} + B'x^{-\mu+1} + \dots + B^{(\mu-1)}x^{-1} + \mathfrak{P}(x)$$
sich ergibt, da $[G(xy)_2]_{0,0} = B$ ist.
Es wird also $R_\mu(x,y_x)$ für $x=0$, $y_x=0$ ~~verschwinden~~ ∞ werden; andererseits aber $R_\mu(x,\hat{y}_x)$ für $x=0$, $y=\hat{y}_x$ nicht unendlich werden, da der $G^{\mu}(x,\hat{y}_x,y_x)$ identisch verschwindet. Es kann also in der Endlichkeit $R(x,y)$ nur an der Stelle $0,0$ unendlich werden. Eine Summe von derartigen Functionen kann nun so eingerichtet werden, daß sie auch im Unendlichen endlich bleibt.
$$k_1R_1(xy) + k_2R_2(xy) + \dots + k_lR_l(xy)$$
$$= G_0(x)\Sigma x^{-\mu}(\hat{y}_x^{n-1})_\mu k_\mu + \overset{1}{G}(x,y)\Sigma x^{-\mu}(\hat{y}_x^{n-2})_\mu + \dots$$
$$= G_0(x)H(x) + \overset{1}{G}(x,y)H_1(x) + \dots + \overset{n-1}{G}(x,y)H_{n-1}(x)$$
wird endlich für $x=\infty$ wenn in $H, H_1, \dots H_{n-1}$ alle diejenigen Glieder wegfallen, deren Exponenten $< m$ sind, denn, wie wir oben sahen, bleibt $\overset{\lambda}{G}(x,y):x^m$ endlich.
Wir erhalten dadurch $(m-1)(n-1)$ Bedingungsgleichungen. Diese sind erfüllbar sobald $l > (m-1)(n-1)$ ist.

Subtrahiren wir endlich die mit $(G_0(x)H(x))$ zu bezeichnenden Glieder der positiven Potenzen, so ist

$$R(xy) = k_1 R_1(x,y) + \dots \; k_l R_l(x,y)$$
$$- (G_0(x)H(x))$$

eine derartige Function, welche überhaupt nur an einer Stelle $0,0$ von der $l$ten Ordnung ∞ wird.
Bei dieser Function wurde aber eine specielle Stelle gewählt und bei dieser durfte $0,0$ keine Doppelstelle sein. Diese Beschränkungen können leicht beseitigt werden.

Sei $G(x,y)$ beliebig und a,b eine beliebige Stelle, wobei, wenn es dort mehrere Elemente giebt, gesagt werden muß, welchem von ihnen a,b angehören soll. Für $x-a=u$, $y-b=v$ geht $G(xy)$ in $G(u,v)$ über. Im allgemeinen wird $G(u,v)$ schon mit Gliedern erster Dimension beginnen und daher der zweiten Bedingung genügen, jedenfalls giebt es nur eine endliche Zahl von Stellen, für welche dies nicht eintritt. Für diese nun transformirt man

$$u=(g+\alpha v_1)u_1\,, \quad v=(h+\beta v_1)u_1$$

und erhält $G(u,v) = u_1^{\,r}\, G_1(u_1,v_1)$.
Hat G_1 noch nicht die verlangte Gestalt, so gehen wir in derselben Weise fort, und es ist gezeigt,

daß man so zu einer regulären Function gelangt. Sämmtliche Werthsysteme können dabei durch

$$x-a = f_1(u,v) \quad , y-b = f_2(u,v)$$

erlangt werden, wobei f_1 und f_2 ganze Functionen sind. Zugleich kann man u, v rational durch x, y ausdrücken. Wenn in a, b das Gebilde nur ein Element hat, so giebt es nur eine Transformation, wenn mehrere so auch mehrere, aber unter letzteren nur eine, welche die betreffenden unendlich kleinen Werthsysteme in der Nähe von $0,0$ giebt. Da nun beide Gebilde sich eindeutig entsprechen, so wird $R(u,v)$ in $R_1(x,y)$ übergehen, welche aber nur in a, b für das betreffende Element unendlich wird.

Es möge noch bemerkt werden, daß das angegebene Verfahren weder alle derartige Function R liefern soll, noch auch geeignet ist, diejenigen zu geben, welche in a, b von niedrigster Ordnung unendlich werden.

Mit Hülfe der oben aufgestellten Functionen ist es möglich die zu Grunde gelegte Gleichung $G(x,y) = 0$ durch eine andere $G(u,v) = 0$ ihr äquivalente zu ersetzen, derart, daß zu endlichen Werthen von u nur endliche Werthe von v gehören. Setzen wir nämlich

$$u = R(x,y) \quad , \quad w = x + ky$$

wo R vom Grade p sein möge und k so gewählt ist, daß die Gleichung $G(w-ky,y)=0$ nicht zerfällt. Erhält man nun durch Elimination

$$\bar{G}(u,w) = \bar{G}_0(u)\,w^p + \bar{G}_1(u)\,w^{p-1} + \dots = 0$$

so könnte für u gleich einer Wurzel von $\bar{G}_0 = 0$, w unendlich groß werden. Setzen wir aber

$$w = \frac{v}{\bar{G}_0(u)},$$

so ergiebt sich

$$G(u,v) = \left(v^p + \bar{G}_1(u)\,\bar{G}_0(u)\cdot v^{p-1} + \dots\right) : \bar{G}_0(u)^{p-1} = 0.$$

Ist der erste Factor Null, so ist sicher bei endlichem u auch v endlich; ist $G_0 = \infty$, so kann dies nur für $u = \infty$, $w = 0$ geschehen und auch dann bleibt v sicher endlich. Es ist also durch

$$u = R(x,y), \quad v = \bar{G}_0(u)(x+ky) = \bar{R}(x,y)$$

wobei auch umgekehrt x u. y rationale Functionen von u u. v sind, das Geforderte geleistet.

Das Functionenpaar an der Stelle a,b wird hier

$$u = R(x_t, y_t) = c_0\,t^{-p} + \dots$$

also

$$t = \mathfrak{P}\left(\left(\frac{c_0}{u}\right)^{\frac{1}{p}}\right),$$

denn R ist von der Ordnung p und wird nur in $t=0$, unendlich, folglich muß es dort von der p ten Ordnung unendlich werden. Zu jedem Werthe u können unendlich viele Werthe x_t, y_t gehören, ausgenommen zu dem Werthe $u = \infty$, der diesem aber nur $x = a$, $y = b$ entspricht. Wenn

erhält
$$v = \bar{R}(x_1, y_1) = c_0' t^{-q} + \dots = \mathfrak{P}_1\left(\left(\frac{c_0}{u}\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$= c_0'\left(\frac{c_0}{u}\right)^{-\frac{q}{p}} + \dots$$

Da man nun zu einem unendlich großen u p verschiedene Werthe von t und daher von v erhält, so hat das Gebilde im Unendlichen nur ein Element. Die so transformirte Gleichung wollen wir als Normal-Gleichung ansehen.

Nachdem nun die Existenz von Functionen nachgewiesen ist, welche an einer einzigen Stelle unendlich werden, folgt unmittelbar die Existenz einer Function, welche an einer gegebenen Stelle a, b von möglichst niedriger Ordnung α unendlich wird. Dies sei die Function u_α. Existirt noch eine zweite derartige $\bar{u}_\alpha$, so folgt aus
$$u_\alpha = g_\alpha t^{-\alpha} + g_{\alpha 1} t^{-\alpha+1} + \dots \quad , \quad \bar{u}_\alpha = \bar{g}_\alpha t^{-\alpha} + \bar{g}_{\alpha 1} t^{-\alpha+1}$$
$$\bar{g}_\alpha u_\alpha - g_\alpha \bar{u}_\alpha = (\bar{g}_\alpha g_{\alpha 1} - g_\alpha \bar{g}_{\alpha 1}) t^{-\alpha+1} + \dots + \mathfrak{P}(t);$$
es muß daher $\bar{g}_\alpha g_{\alpha 1} = g_\alpha \bar{g}_{\alpha 1}$ sein, d. h.
$$\bar{u}_\alpha = l u_\alpha + \mathfrak{P}(t).$$
Außer den so erhaltenen giebt es noch unendlich viele andere Functionen, die in höherer Ordnung ∞ werden z. B. u_α^2, .. Aus diesen wird u_β so gewählt, daß β möglichst klein ist, dann findet sich aber so wie oben
$$\bar{u}_\beta = k u_\beta + l u_\alpha + \mathfrak{P}(t).$$
In gleicher Weise fortgehend, können wir eine Folge von

Zahlen $\alpha < \beta < \gamma < \delta, \dots$
finden, derart, daß jede unter ihnen eine bestimmte Function
$u_\alpha, u_\beta, u_\gamma, u_\delta, \dots$
entspricht. Wir sahen oben, daß von einer bestimmten Grenze ab, alle ganzen Zahlen vorhanden sind. Es fehlt also in der obigen Reihe nur eine endliche Anzahl von Zahlen; diese Anzahl ist für die Function $G(x,y)$ charakteristisch. Sie wird mit „Rang der Function G" bezeichnet.

Wir kommen nun zur Aufstellung von Functionen, die an vorgeschriebenen Stellen von vorgeschriebener Ordnung 0 und ∞ werden. Dazu müssen wir einige neue, bleibende Einführungen machen.

Zuerst setzen wir ~~an~~ jetzt ab statt u u. v ξ u. η;
ξ_t, η_t bedeute ein Functionenpaar, welches ein beliebiges Element im Endlichen darstellt.
$\mathring{\xi}_t, \mathring{\eta}_t$ bedeute das eine Functionenpaar, welches das Element im Unendlichen darstellt; denn wir nehmen die zu Grunde gelegte Gleichung stets in der Normalform.
Wir betrachten nun die Function

$$\frac{F(\mathring{\xi}_t, \mathring{\eta}_t, \eta')}{(\xi' - \mathring{\xi}_t)\, F(\xi', \eta')_2} = \left(\frac{1}{\mathring{\xi}_t} + \frac{\xi'}{\mathring{\xi}_t^{2}} + \dots \right) \frac{F(\mathring{\xi}_t, \mathring{\eta}_t, \eta')}{F(\xi', \eta')_2}$$

wo $F(\xi, \eta, \eta')$ nur im Unendlichen unendlich wird und

$$\frac{F(\xi,\eta)-F(\xi,\eta')}{\eta-\eta'}$$

die Form hat ist ~~$\frac{F(\xi,\eta')}{\eta-\eta'}$~~, so dass $F(\xi\eta\eta') = F_2(\xi'\eta')$ ist.
In dieser steht F eine ganze Function von ξ, η vor, in welche η' nur als Parameter aufgenommen ist. F_2 ist die Ableitung von $F_{(\xi,\eta)}$ nach η'; die Entwicklung rechts in der ersten Formel gilt für alle t, die unterhalb einer bestimmten Grenze liegen.
$F(\xi_t\eta_t\eta')$ enthält nur eine endliche Zahl negativer Potenzen von t, da ja

$$\xi_t = c_0 t^{-p} + \dots \qquad , \eta_t = c_0' t^{-q} + \dots$$

ist; der erste Factor enthält nur positive Potenzen und also der ganze Ausdruck nur eine endliche Zahl von negativen Potenzen. Setzen wir nun die Entwicklung

$$= \sum_\lambda \frac{D(\xi',\eta')_\lambda}{F(\xi',\eta')_2} t^\lambda$$

so können wir von unserer Function Glieder derart abziehen, dass bei der Entwicklung im Unendlichen gewisse Potenzen verschwinden. Bezeichnet man nämlich unsere Function u_α mit $\frac{1}{g_\alpha}$ multiplicirt jetzt durch $(\xi',\eta')_\alpha$, ähnlich $u_\beta \frac{1}{g_\beta}$ mit $(\xi',\eta')_\beta$ u. s. w. so werden in

$$\frac{F(\xi_t,\eta_t,\eta')}{(\xi'-\xi_t)\,F(\xi'\eta')_2} - \sum_{\lambda=\alpha,\dots} \frac{D(\xi',\eta')_\lambda}{F(\xi',\eta')_2}(\xi_t,\eta_t)_\lambda$$

die Potenzen $t^{-\alpha}, t^{-\beta}, \dots$ für die Entwicklung im Unendlichen fehlen, wobei freilich $u_\beta, u_\gamma, \dots$ so eingerichtet sein müssen, dass in ihnen die α; α und β; … Potenzen nicht mehr vorkommen. Hiernach finden wir nun für die unendliche Function

$$\frac{F(\xi,\eta,\eta')}{(\xi'-\xi)\,F(\xi',\eta')_2} - \sum_{\lambda=\alpha\dots} \frac{D(\xi',\eta')_\lambda}{F(\xi',\eta')_2}(\xi,\eta)_\lambda$$

Folgendes: Für alle endlichen Werthe bleibt sie endlich, ausgenommen für ξ',η', wofür sie unendlich von der ersten Ordnung wird, falls ξ',η' kein singulärer Punkt ist; der Coefficient von $(\xi'-\xi)^{-1}$ ist 1. Im Unendlichen fehlen bei der Entwicklung von t die $\alpha,\beta,\gamma,..$ Potenzen. Um nun eine völlig bestimmte Function zu erhalten, subtrahiren wir noch das Glied mit t^0, welches bei der Entwicklung im Unendlichen vorkommt, also die Grösse $\frac{\mathfrak{D}(\xi',\eta')}{F(\xi',\eta')_2}$ und setzen für den entstehenden Ausdruck ein

$$H(\xi,\eta,\xi',\eta') = \frac{F(\xi,\eta,\eta')}{F(\xi',\eta')_2(\xi'-\xi)} - \sum \frac{\mathfrak{D}(\xi'\eta')_\alpha}{F(\xi',\eta')_2}(\xi,\eta)_\alpha$$
$$- \frac{\mathfrak{D}(\xi'\eta')}{F(\xi'\eta')_2}.$$

$\xi'\eta'$ ist der Beschränkung unterworfen, kein singulärer Punkt zu sein. Im Unendlichen sei

$$H(\xi_\varepsilon,\eta_\varepsilon,\xi',\eta') = H(\xi'\eta')_{k_1}t^{-k_1}+\dots+H(\xi'\eta')_{k_\varepsilon}t^{-k_\varepsilon}$$
$$+\,t\,\mathfrak{P}(t)$$

wo die $\alpha,\beta,..$ in der Reihe der $k_0,k_1,..$ fehlen.

Jetzt ist die Function vollständig bestimmt; denn gäbe es noch eine andere derartige, so würde die Differenz beider im Endlichen gar nicht unendlich; im Unendlichen fehlen die Glieder mit $t^{-\alpha},t^{-\beta},..$ bei der Entwicklung; folglich wäre es eine Constante, u. diese muss Null sein, da in der Entwicklung die Constante beseitigt ist. Daraus folgt: jede rationale Function von ξ, η die im Endlichen nur in $\xi'\eta'$ von der ersten Ordnung ∞ wird, so daß die Entwicklung mit $1.(\xi'-\xi)^{-1}$ derselben beginnt, unterscheidet sich von $H(\xi, \eta, \xi', \eta')$ nur durch einen Ausdruck

$$c_0 + c_\alpha u_\alpha + c_\beta u_\beta + \dots$$

Die H-Function kann übrigens auch von der Beschränkung befreit werden, daß ξ', η' keine singuläre Stelle sein darf. Wenn nämlich $\frac{\partial F}{\partial \eta'}$ für $\xi'\eta'$ verschwindet, so wird H nicht mehr an dieser Stelle unendlich; verschwindet aber $\frac{\partial^2 F}{\partial \eta'^2}$ ebenda nicht mehr, so wird $\frac{2F(\xi, \eta')}{(\eta-\eta')^2}$ von der ersten Ordnung unendlich und beginnt mit $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)_{\xi'\eta'} (\eta-\eta')^{-1}$ so daß

$$\frac{2F(\xi, \eta')}{(\eta-\eta')^2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\right)_{\xi'\eta'}} \quad \text{für} \quad \frac{F(\xi, \eta')}{(\eta-\eta')\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{\xi'\eta'}}$$

gesetzt werden muß. Offenbar kann man in gleicher Weise fortfahren, wenn auch die zweite Ableitung von F nach η verschwinden sollte, und so stets zum Ziele gelangen.

Mag nun ξ_τ, η_τ ein beliebiger nicht singulärer oder singulärer Punkt sein, dessen Coordinaten durch die Größe τ ausgedrückt sind; ξ_t, η_t derselbe in anderer Darstellung; ξ_ι, η_ι irgend ein anderes Element. Dann haben wir folgende Fundamentalformeln zu beweisen:

$$\frac{d\xi_\tau}{d\tau} H(\xi_t, \eta_t, \xi_\tau, \eta_\tau) = \frac{1}{\tau - t} + P(t,\tau);$$

$$\frac{\partial \xi_\tau}{\partial \tau} H(\xi_t', \eta_t', \xi_\tau, \eta_\tau) = P_1(t,\tau).$$

wo P und P_1 Potenzreihen bedeuten die auch negative Potenzen in endlicher Anzahl enthalten dürfen.

Sei nun 1) ξ_t endlich für $t=0$

$$\xi_t = \alpha + t^\lambda, \quad \xi_\tau = \alpha + \tau^\lambda,$$

dann wird

$$H(\xi_t \eta_t, \xi_\tau \eta_\tau)(\xi_\tau - \xi_t) = f(t,\tau)$$

für $t=\tau$ nicht verschwinden und deshalb ist f nach Potenzen von t und τ entwickelbar. Es ergibt sich

$$f(\tau,\tau) = 1, \quad f(\varepsilon\tau,\tau) = 0$$

wenn ε eine primitive λte Wurzel der Einheit bedeutet, da dann zwar $\xi_t = \xi_\tau$ ist, die η jedoch, weil zu verschiedenen τ gehörig verschieden sind. Nun zerlegen wir

$$H(\xi_t \eta_t, \xi_\tau \eta_\tau) \frac{d\xi_\tau}{d\tau} = \frac{f(t,\tau)}{\tau^\lambda - t^\lambda} \cdot \lambda\tau^{\lambda-1}$$

in Partialbrüche.

$$\frac{\lambda\tau^{\lambda-1}}{\tau^\lambda - t^\lambda} = \frac{d}{d\tau}\log(t^\lambda - \tau^\lambda) = \frac{1}{\tau - t} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon\tau - t} + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2\tau - t} + \cdots$$

$$\frac{f(t,\tau)}{\tau^\lambda - t^\lambda}\lambda\tau^{\lambda-1} = \frac{f(t,\tau)}{\tau - t} + \frac{\varepsilon f(t,\tau)}{\varepsilon\tau - t} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\tau - t} + \frac{f(t,\tau) - f(t,t)}{\tau - t} + \frac{\varepsilon(f(t,\tau) - f(\varepsilon\tau,\tau))}{\varepsilon\tau - t} + \cdots$$

$$= \frac{1}{\tau - t} + P(t,\tau)$$

Ist zweitens ξ_t das unendlich ferne Element, also

$$\xi_t = t^{-p}, \quad \xi_\tau = \tau^{-p}$$

so wird

$$\frac{d\xi}{d\tau}\cdot\frac{1}{(\xi_\tau-\xi_t)} = \frac{d}{d\tau}\log(\tau^{-p}-t^{-p})$$
$$= -p\tau^{-1} + \frac{d}{d\tau}\log(\tau^{p}-t^{p})$$

und in derselben Weise wie oben ergiebt sich auch dieser Fall.

Für die zweite Formel giebt es drei Fälle, in denen sie evident ist, zunächst, wenn ξ'_t, η'_t das unendlich ferne Element darstellt; dann sind, weil es nur ein solches Element giebt ξ'_t, η'_t beide unendlich gross, während ξ_t, η_t endlich sind. Deshalb kann man entwickeln

$$\frac{1}{\xi'_t-\xi_t} = \frac{1}{\xi'_t} + \frac{\xi_t}{\xi'^2_t} + \frac{\xi^2_t}{\xi'^3_t}+\dots$$

wo nun die einzelnen Glieder nach Potenzen von t und τ zu entwickeln sind. Genau so ist es zu machen, wenn ξ_t, η_t das unendlich ferne Element ist, während ξ'_t, η'_t im Endlichen bleibt. Drittens ist die Entwicklung klar wenn die ξ sich für $t=0, \tau=0$ verschiedenen endlichen Grenzen nähern, denn dann folgt aus

$$\xi_\tau = \alpha + \dots, \quad \xi'_t = \alpha' + \dots$$

$$\frac{1}{\xi'_t-\xi_\tau} = \frac{1}{(\alpha'-\alpha)+\dots} = \mathfrak{P}(\tau, t)$$

Da nun nicht beide Elemente im Unendlichen liegen können, so bleibt ~~nur~~ noch der Beweis für den Fall

$$\xi'_t = \alpha + t^{\alpha}, \quad \xi_\tau = \alpha + \tau^{\alpha}$$

übrig. Seien $t_1, t_2, \dots t_\lambda$ die verschiedenen Lösungen der Gleichung

$$\tau^{\lambda} - t^{a} = 0$$

oder $\tau^{\lambda} - t^{a} = (\tau - t_1)(\tau - t_2)\,..\,(\tau - t_\lambda)$,

so sind die t_1, t_2.. sämmtlich von ~~einander~~ verschieden, da sonst $\tau^{\lambda} - t^{a}$ mit der Ableitung $\lambda\tau^{\lambda-1}$ einen gemeinsamen Factor haben müsste.

Wir haben nun wieder wie oben zu betrachten

$$f(t,\tau)\frac{d}{d\tau}\log(\tau^{\lambda} - t^{a}) = f(t,\tau)\left(\frac{1}{\tau - t_1} + \dots + \frac{1}{\tau - t_\lambda}\right)$$

Nun ist aber

$$f(t,t_1) = 0, \;\dots\; f(t,t_\lambda) = 0$$

da die beiden Werthe ξ_τ, ξ_{t_1} einander gleich werden, während die η ungleich sind; wir können also wieder

$$\frac{f(t,\tau) - f(t,t_\lambda)}{\tau - t_\lambda} \text{ statt } \frac{f(t,\tau)}{\tau - t_\lambda}$$

schreiben, so dass dieser Bruch nach Potenzen von τ und t_λ entwickelt werden kann. Der Gesammtresultat ist in $t_1, t_2, .. t_\lambda$ symmetrisch u. daher durch die Coefficienten der Gleichung $\tau^{\lambda} - t^{a} = 0$ d. h. durch t^{a} auszudrücken. Die beiden Formeln sind dadurch in ihrer ganzen Ausdehnung bewiesen.

Wir untersuchen nun die Natur der Potenzreihen P und P_1 in Bezug auf die negativen Potenzen von t oder τ welche darin vorkommen können.

Es wird sich herausstellen:

„Die beiden Potenzreihen $P(t,\tau)$ und $P_1(t,\tau)$ enthalten nur dann negativen Potenzen von t, wenn $\xi_t\ \eta_t$ mit dem unendlich fernen Element $\xi_t^0\ \eta_t^0$ übereinstimmen und in diesem Falle kommen nur die Potenzen vor, deren Exponenten

Zum Beweise bezeichnen wir

$$(a)\quad H(\xi_t, \eta_t; \xi', \eta') = \sum_\lambda H^{(\lambda)}(\xi_0, \eta_0; \xi', \eta')\, t^\lambda$$

Sehen wir nun den Definitions-Ausdruck für H an; in ihm ist $F(\xi, \eta, \eta')$ eine ganze rationale Function von ξ u. η, also für jedes endliche Functionenpaar $\xi_t\ \eta_t$ unmittelbar nach positiven Potenzen von t zu entwickeln. Ebenso ist $(\xi', \eta')_\xi$ eine rationale F. von ξ, η, die für endliche ξ, η endlich ist und daher auch für ein im Endlichen liegendes Paar ξ_t, η_t nach positiven Potenzen von t entwickelbar ist. Die Entwicklung (a) ist daher möglich, wenn $\frac{1}{\xi'-\xi}$ nach steigenden Potenzen von t entwickelt werden kann; d. h. es muß $|\xi| < |\xi'|$ sein.

H ist ferner eine rationale Function von $\xi'\ \eta'$ u. zwar eine ganze Function, dividirt durch die Ableitung von F nach η'. Wenn wir daher die Coefficienten auf der rechten Seite von (a) nach Potenzen von τ entwickeln und mit $\frac{d\xi_\tau}{d\tau}$ multipliciren, indem wir statt $\xi'\ \eta'$, $\xi_\tau\ \eta_\tau$ einführen, so werden wir unter der jetzt in $|\tau| < |t|$ umzuwandelnden Bedingung die Entwicklung $\frac{1}{\tau-t} + \mathfrak{P}(\tau, t)$ erhalten. Diese Entwicklung gilt aber, ohne daß zwischen τ u. t irgend eine

Beziehung festgesetzt wäre. Wenn $|\tau|<|t|$ genommen wird, kann in der obigen Entwicklung $\frac{1}{\tau-t}$ nach positiven Potenzen von t entwickelt werden. Wir haben nun zwei Potenzreihen für H in τ u. t, die für genügend kleine τ u. t unter der Voraussetzung $|\tau|<|t|$ übereinstimmen. Daraus folgt, daß sie gliedweise übereinstimmen. Nun kommen aber in der aus (α) hergeleiteten Entwicklung nur positive Potenzen vor, folglich ist dies überhaupt der Fall. Für endliche ξ_t, η_t enthält also $P(t,\tau)$ nur positive Potenzen.

Aus (α) leiten wir jetzt gleichfalls die zweite Entwicklung ab, falls $\xi_t\ \eta_t$ im Endlichen liegen. Da

$$\xi = \alpha + t^{\lambda}, \quad \xi' = \alpha' + \tau^{\lambda'};$$

wenn α' von α verschieden ist, so wird

$$\frac{1}{\xi'-\xi} = \frac{1}{(\alpha'-\alpha)+(\tau^{\lambda'}-t^{\lambda})} = \frac{1}{\alpha'-\alpha} + \frac{t^{\lambda}-\tau^{\lambda'}}{(\alpha'-\alpha)^2} + \dots$$

so daß (α) allgemein gilt für kleine Werthe von t u. τ ohne daß man über deren Größe eine Beziehung festzusetzen braucht. Es folgt dann daß in der zweiten Fundamentalformel P keine negativen Pot. enthält. Ist $\alpha'=\alpha$ so ist $\frac{1}{\xi'-\xi} = \frac{1}{\tau^{\lambda'}-t^{\lambda}}$ nach positiven Pot. von t zu entwickeln, wenn $|\tau^{\lambda'}| > |t^{\lambda}|$ ist. Für das Schlußresultat ist aber, wie oben gezeigt wurde, diese Bedingung überflüssig, so daß auch in diesem Falle P nur positive Pot. enthält.

Für endliche $\xi_t \eta_t$ ist nach der Fall $\xi_t \eta_t$ zu betrachten. Aber $\frac{1}{\mathring{\xi}_\tau - \xi_t}$ lässt sich stets nach positiven Pott. von ξ_t entwickeln, so dass auch (a) nur positive Potenzen

Wir kommen nun zu der Annahme $\mathring{\xi}_t, \mathring{\eta}_t$ und zeigen zuerst die erste Entwicklung. Wir setzen

$$\mathring{\xi}_t = t^{-p}, \quad \mathring{\xi}_\tau = \tau^{-p}$$

$$(6) \quad H(\mathring{\xi}_t \mathring{\eta}_t, \xi' \eta') = \sum_\alpha{}' H(\xi' \eta')_\alpha \, t^{-k_\alpha} + \sum_\lambda H^{(\lambda)}(\xi' \eta') \, t^\lambda$$

Wenn überhaupt eine Entwicklung der linken Seite von (6) nach Potenzen von t möglich ist, so kann dieselbe nur in Gestalt der rechten Seite auftreten; denn wir hatten ja H so definiert, dass bei der Entwicklung im Unendlichen von negativen Potenzen nur die k_α auftreten. Die Entwicklung ist aber möglich, wenn $\frac{1}{\xi' - \mathring{\xi}_t}$ sich nach steigenden Pott. von t entwickeln lässt, d. h. wenn $\mathring{\xi}_t > \xi'$. Wir müssen daher setzen

$$\tau > t, \quad \tau^{-p} < t^{-p}, \quad |\mathring{\xi}_t| > |\mathring{\xi}_\tau|$$

Unter dieser Voraussetzung gilt die Entwicklung (6). Unter derselben Voraussetzung kann in der ersten Fundamentalformel $\frac{1}{\tau - t}$ nach pos. Pott. von t entwickelt werden. Beide Entwicklungen müssen übereinstimmen, folglich wird P diejenigen negativen Pott. von t enthalten, die in der Entwicklung (6) vorkommen.

Ist ferner ξ' ein endliches Element, so ist ohne alle Voraussetzungen $\frac{1}{-\mathring{\xi}_t + \xi'_\tau}$ nach fallenden Pott. von $\mathring{\xi}_\tau$ oder nach steigenden Pott. von t zu entwickeln u. nach der oben befolgten Schlussweise abzuleiten, dass P_1^* nur solche negativen Pott.

enthalten kann, die zu den $k_1, k_2 \dots k_e$ gehören.
Hiermit ist der obige Satz völlig bewiesen, und es handelt sich jetzt um die Untersuchung der vorkommenden negativen Pot. von τ.
Die schliesslichen Resultate werden sein:

$$(1)\quad H(\xi_t\eta_t, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\eta_\tau} = \frac{1}{\tau-t} + \mathfrak{P}(t,\tau)$$

$$(2)\quad H(\xi'_t\eta'_t, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\eta_\tau} = \mathfrak{P}_1(t,\tau)$$

$$(3)\quad H(\mathring{\xi}_t\mathring{\eta}_t, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\eta_\tau} = \sum_\alpha \left(H(\xi_\tau\eta_\tau)_\alpha \frac{d\xi_\tau}{d\tau}\right) t^{-k_\alpha} + \mathfrak{P}_2(t,\tau)$$

$$(4)\quad H(\xi_t\eta_t, \mathring{\xi}_\tau\mathring{\eta}_\tau)\frac{d\mathring{\xi}_\tau}{d\eta_\tau} = -\tau^{-1} + \mathfrak{P}_3(t,\tau)$$

$$(5)\quad H(\mathring{\xi}_t\mathring{\eta}_t, \mathring{\xi}_\tau\mathring{\eta}_\tau)\frac{d\mathring{\xi}_\tau}{d\eta_\tau} = \frac{1}{\tau-t} - \tau^{-1} + \sum_\alpha \left(H(\mathring{\xi}_\tau\mathring{\eta}_\tau)_\alpha \frac{d\xi_\tau}{d\tau}\right) t^{-k_\alpha} + \mathfrak{P}_4(t,\tau)$$

wobei die H in (3) u. (5) nur positive Potenzen von t u. τ geben.
Sei $F(t,\tau)$ eine Pot. Reihe, die auch neg. Pot. in endlicher Anzahl enthält.

$$\frac{1}{F(t,\tau)} = \frac{1}{F_0(t)\cdot\tau^\alpha + F_1(t)\tau^{\alpha+1} + \dots}$$

wo α jede beliebige ganze Zahl sein kann. Wenn $F_0(t)$ für $t=0$ nicht verschwindet, so wird für kleine t u. τ das erste Glied $>$ als die übrigen zusammen. wir setzen

$$\frac{1}{\tau^\alpha u - \tau^\alpha v} = \frac{\tau^{-\alpha}}{u-v} = \frac{\tau^{-\alpha}}{u} + \frac{v\tau^{-\alpha}}{u^2} + \dots$$

v enthält nur positive Pot. von τ, u enthält überhaupt nur Pot. von t. Es kommen also neg. Pot. von τ nur in endlicher Anzahl vor.

Die F_0, F_1, .. enthalten auch negat. Pot. von t, für $t=0$ können sie daher möglicherweise ∞ werden. Aber im Convergenzbereich von $F(t,\tau)$ kann man zwei Grenzen t_0, t_1 annehmen, die man der Null beliebig nahe bringen kann, so daß für $|t_0| < |t| < |t_1|$ $F_0(t)$ weder 0 noch ∞ u. F_1, F_2, .. nicht ∞ werden. Man kann dann zwischen t_0 u. t_1 die Pot. von $\frac{1}{u}$ u. v nach t entwickeln u. erhält eine Entw. nach τ u. t, die innerhalb der angegebenen Grenzen convergiert. Eine ähnliche Entwickl. kann man mit $\frac{1}{F(t,\tau)}$ anstellen, indem man nach steigenden Pot. von t entwickelt. Diese beiden Entwickl., von denen die eine nach τ die andere nach t steigt, werden nicht dieselben sein; sie werden auch verschiedene Grenzen der Gültigkeit haben. Ein Beispiel ist ja $\frac{1}{\tau - t}$ selbst.

Nimmt man aber jetzt $\frac{G(t,\tau)}{F(t,\tau)}$, so wird im allgemeinen eine ebensolche Entwicklung statt finden. Nun kann es aber vorkommen, daß G durch F theilbar ist, d. h. daß der Quotient sich in eine Reihe mit demselben Gültigkeitsbereich verwandeln läßt. Wir denken uns nach die neg. Pot. von dem Bruch gestellt, so daß dieser ein Bruch von zwei gewöhnlichen Potenzreihen wird, multiplicirt mit zwei negativen Pot. von t u. τ, wenn man

$t=0, \tau=0$ ausschließt, so haben diese keinen Einfluß auf die Conv.

Wenn nun G durch F dividirbar ist, so ist es gleichgültig, ob man die Entwickl. auf die eine oder die andere Art macht. Mag $G:F = H(t,\tau)$ für alle t,τ innerhalb eines gewissen Conv.bez. sein, ausgenommen vielleicht $t=0, \tau=0$, wenn zufällig die F dafür unendlich wird. Ferner soll $G:F = \overline{H}(t,\tau)$ für alle t,τ innerhalb $t_0, t_1; 0, \tau_1$ sein, wo die Grenzen im Conv.bez. liegen. Dann stimmen beide Entwicklungen völlig überein. Denn für einen τ innerhalb dieser Grenzen stimmen sie; nun ist τ beliebig klein, daher müssen die Coeff. bekanntlich übereinstimmen; geht man von 0 selbst aus, so ist der Beweis ganz elementar, sonst durch bestimmte Integr. zu führen.

Wenn man also nur weiß, daß $G:F$ so darstellbar ist, so ist es gleichgültig, wie man die Entwicklung macht; es müssen nur H u. $\overline{H}$ übereinstimmen für $t_0, t_1, 0, \tau_0$.

Wir hatten nun die Entwicklung:

$$H(\xi_t \eta_t, \xi'\eta') = \sum_{\lambda=0,1..} H^{(-\lambda-1)}(\xi_0 \eta_0, \xi'\eta')\, t^{-\lambda-1} + \sum H^{\lambda}(\xi_0 \eta_0, \xi'\eta')\, t^{\lambda}.$$

Wir haben gesehen, daß neg. Pot. nur vorkommen, wenn $\xi_0 \eta_0$ die unendlich ferne Stelle darstellt, u. zwar können nur die Pole $-k_1, -k_2, \ldots$ war. Ferner war H so gewählt, daß die Potenz t^0 fehlt, wenn $\xi_0\eta_0$ im Rand liegt. Wir folgern auch

$$H(\xi\eta, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\tau} = -\sum_\mu H(\xi\eta, \xi_0\eta_0)_{-\mu-1}\tau^{-\mu-1}$$
$$-\sum_\mu H(\xi\eta, \xi_0\eta_0)_\mu \tau^\mu$$

Nun handelt es sich um die negativen Pot. in

$$H(\xi_t\eta_t, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\tau} + \frac{1}{t-\tau} = P(t,\tau)$$

Es ist nun gleichgültig, wie wir entwickeln, ob nach steigenden Pot. von t oder τ; beide Entwickl. müssen ident. sein. Also

$$P(t,\tau) = \sum_\lambda H^{(-\lambda-1)}(\xi_0\eta_0, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\tau}t^{-\lambda-1}$$
$$+\sum_\lambda\left(H^{(\lambda)}(\xi_0\eta_0, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\tau} - \tau^{-\lambda-1}\right)t^\lambda$$
$$= -\sum_\mu H(\xi_t\eta_t, \xi_0\eta_0)_{-\mu-1}\tau^{-\mu-1}$$
$$-\sum_\mu\left(H(\xi_t\eta_t, \xi_0\eta_0)_\mu - t^{-\mu-1}\right)\tau^\mu$$

Hier bedeuten $\xi_t\eta_t$ u. $\xi_\tau\eta_\tau$ dasselbe Element u. $\xi_0\eta_0$ sind die Werthe, in die diese für $t=0$ resp. $\tau=0$ übergehen. Ferner war stets die Entwicklung als Pot. Reihe von t u. τ möglich

$$P_1(t,\tau) = H(\xi'_t\eta'_t, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\tau}.$$

Es ist wieder einerlei, wie wir entwickeln, also

$$P_1(t,\tau) = \sum_\lambda H^{(-\lambda-1)}(\xi'_0\eta'_0, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\tau}t^{-\lambda-1}$$
$$+\sum_\lambda H^{(\lambda)}(\xi'_0\eta'_0, \xi_\tau\eta_\tau)\frac{d\xi_\tau}{d\tau}t^\lambda$$

II) $$= -\sum_\mu f H(\xi'_t \eta'_t, \xi_0 \eta_0)_{-\mu-1}\, t^{-\mu-1}$$
$$-\sum_\mu H(\xi'_t \eta'_t, \xi_0 \eta_0)_\mu\, t^\mu$$

Wir bestimmen zunächst die $\mathfrak{F}$. $H(\xi\eta, \xi_t\eta_t)_{-\mu-1}$ als $\mathfrak{F}$ von ξ u. η betrachtet, während $\xi_t \eta_t$ fest sein sollen.

Wenn $\xi_0\eta_0$ endlich ist, so kommen in I) auf der linken Seite keine neg. Pot. vor, folglich dürfen rechts in keinem Coeff. neg. Pot. vorkommen, mithin auch nicht in $H(\xi_t\eta_t, \xi_0\eta_0)_{-\mu-1}$. Ebenso ist aus II) zu schließen, daß wenn $\xi'\eta'$ im Endlichen liegt, keine neg. Pot. in $H(\xi'_t\eta'_t, \xi_0\eta_0)_{-\mu-1}$ vorkommen. Also wird $H(\xi\eta, \xi_t\eta_t)_{-\mu-1}$ im Endlich überhaupt nicht ∞. $\xi_0\eta_0$ sind hier const. Param.

Lassen wir $\xi'_t\eta'_t$ nun ∞ sein, so kommen in II links nur neg. Pot. t^{-k} vor, also auch rechts in jedem Coeff.; $H_{\mu-1}$ enthält dies. also, d. h. sie muß eine Const. sein. Nun aber fehlt, wenn für $\xi_t\eta_t$, $\xi_t\mathring{\eta}_t$ gesetzt wird, in II) links das Glied t^0, folglich ist

$$H(\xi\eta, \xi_0\eta_0)_{-\mu-1} = 0$$

wenn $\xi_0\eta_0$ im Endl. liegt.

Es möge nun $\bar{\xi}_0\bar{\eta}_0$ das unendl. entfernte Element sein. Nehmen wir $\xi_t\eta_t$ im Endl., so ist II zu benutzen, sonst I). Da in II) links die neg. Pot. fortfallen, folgt $H(\xi'_t\eta'_t, \bar{\xi}_0\bar{\eta}_0)_{-\mu-1}$ enthält keine neg. Pot. In I) kommen nur die t^{-k} vor, also ist wieder

$$H(\xi'_t\eta'_t, \bar{\xi}_0\bar{\eta}_0) = Cst.$$

In (I) betrachten wir die Glieder mit t^0. Da nun aber wieder $H^0(\bar\xi_0\bar\eta_0, \bar\xi\bar\eta)=0$ ist, so steht links nur $-\tau^{-1}$; daraus folgt, daß rechts von den mit $\tau^{-\mu-1}$ multiplicirten Coeff. nur der für $\mu=0$ nicht 0 ist, sondern den Werth -1 hat. Somit folgt

$$H(\xi\eta, \xi_0\eta_0)_{-\mu-1} = 0 \quad \text{für jedes } \mu$$

$$-H(\xi\eta, \bar\xi_0\bar\eta_0)_{-\mu-1} = \begin{cases}-1 & \mu=0\\ 0 & \mu>0\end{cases}$$

Daraus folgen aber unmittelbar die obigen Formeln.

Es ist nun zweckmäßig, H in eine Func. von x und y umzuändern; man erhält dann gewissermaßen die allgemeine F. H. die bisherige Bezeichnung mit $\mathcal{H}$. Sind nun ξ,η u. $\xi'\eta'$ rat. F. von x, y resp. x', y' so wird

$$H(\xi\eta, \xi'\eta')\,d\xi' = \mathcal{H}(x,y,x'y')\,dx'$$

$$d\xi' = \frac{\partial\xi'}{\partial x'}dx' + \frac{\partial\xi'}{\partial y'}\frac{dy'}{dx'}dx'$$

$$\frac{dy'}{dx'} = -\frac{G(x'y')_1}{G(x'y')_2}.$$

Da auch $x\,y$ rat. F. von $\xi\eta$ sind, so entspricht jedem $\xi_t\eta_t$ ein bestimmtes $x_t y_t$ und die Fundamentalformeln lauten

$$\mathcal{H}(x_t y_t, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{dt} = \frac{1}{\tau - t} + \mathfrak{P}(t,\tau)$$

$$\mathcal{H}(x'_t y'_t, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{dt} = \mathfrak{P}_1(t,\tau).$$

Aus $\bar{H}(\xi\eta, \xi'\eta')d\xi' = H(xy, x'y')dx'$
folgt, wenn wir unsere alte Bezeichnungsweise für die Entwickl. nach Pot. von t festhalten

$$\sum_\lambda \bar{H}^{(\lambda)}(\xi_0\eta_0, \xi'\eta')d\xi' t^\lambda = \sum_\lambda H^{(\lambda)}(x_0y_0, x'y')dx' t^\lambda$$

so daß wir als Definition aufstellen

$$H^{(\lambda)}(x_0y_0, x'y')dx' = \bar{H}^{(\lambda)}(\xi_0\eta_0, \xi'\eta')d\xi'$$

Wenn man also zu einem andern äquivalenten oder conformen Gebilde x, y übergeht, so erhält man für H^λ nicht unmittelbare Subst., sondern es tritt das Differential dazu. Übrigens ist die Entwicklungsweise stets genau dieselbe; es ist immer $H^{(\lambda)}$ der Coeff. von t^λ in der Entwickl. von H nach Pot. von t.

Bilden wir dagegen die Entwickl. von $H\,dx_\tau$ nach τ, so ist $\sum_\mu \bar{H}(\xi\eta, \xi_0\eta_0)_\mu \tau^\mu = \sum_\mu H(xy, x_0y_0)_\mu \tau^\mu$.

Hier also erhalten wir direct durch Subst.

$$\bar{H}(\xi\eta, \xi_0\eta_0)_\mu = H(xy, x_0y_0)_\mu$$

Unsere neuen Formeln werden nun folgende sein:

$$A\begin{cases} H(x_t y_t, x_\tau y_\tau)\dfrac{dx_\tau}{d\tau} = \dfrac{1}{\tau - t} + \mathfrak{P}(t,\tau) \\ H(x'_t y'_t, x_\tau y_\tau)\dfrac{dx_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}_1(t,\tau) \\ H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x_\tau y_\tau)\dfrac{dx_\tau}{d\tau} = \sum_\mu H(x_\tau y_\tau)_\mu \dfrac{dx_\tau}{d\tau} t^{-k_\mu} + \mathfrak{P}_2(t,\tau) \end{cases}$$

$$B\begin{cases} H(\bar{x}_t \bar{y}_t, \bar{x}_\tau y_\tau)\dfrac{dx_\tau}{dt} = \dfrac{1}{\tau-t} - \tau^{-1} + \sum_\mu H(\bar{x}_\tau y_\tau)_\mu \dfrac{dx_\tau}{dt} t^{-k_\mu} + \mathfrak{P}_3(t,\tau) \\ H(x'_t y'_t, \bar{x}_\tau \bar{y}_\tau)\dfrac{dx_\tau}{dt} = -\tau^{-1} + \mathfrak{P}_4(t,\tau) \end{cases}$$

Dabei ist in A_3 u. B

$$H(x_\tau y_\tau)_\alpha = H^{(-k_\alpha)}(\bar{x}_0 \bar{y}_0, x_\tau y_\tau)$$
$$H(\bar{x}_\tau \bar{y}_\tau)_\alpha = H^{(-k_\alpha)}(\bar{x}_0 \bar{y}_0, \bar{x}_\tau \bar{y}_\tau).$$

Mit $\frac{dx_\tau}{d\tau}$ multipl. geben sie nur pos. Pot. von τ. $\bar{x}, \bar{y}$ ist die Stelle, welche dem im Unendl. liegenden $\xi^0 \eta^0$ entspricht; sie kann auch im Endl. liegen.

Wir wenden nun wieder den Grundsatz an: Wenn eine I von t u. τ überhaupt durch eine pot. Reihe von t u. τ darstellbar ist, so ist es gleichgültig ob wir sie erst nach t oder nach τ entwickeln.

Wir ordnen A_1 nach Pot. von τ. Für $\mu > -1$ ist der Fall von τ^μ, wenn wir $\frac{1}{\tau - t}$ auf die linke Seite bringen

$$-H(x_t y_t, x_0 y_0)_\mu + t^{-\mu-1} = \mathfrak{P}(t)$$

Die I $H(x_t y_t, x_0 y_0)_\mu$ wird also an der Stelle $t=0$ von der $\mu+1$ten Ordnung ∞. Aus A_2 u. A_3 erhalten wir für $\mu > -1$

$$H(x_t' y_t', x_0 y_0)_\mu = \mathfrak{P}_1(t)$$
$$H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x_0 y_0)_\mu = \sum_\alpha \left[H(x_\tau y_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^\mu} t^{-k_\alpha} + \mathfrak{P}_2(t)$$

An der Stelle $\bar{x}_0 \bar{y}_0$ enthält also $H(x_t y_t, x_0 y_0)_\mu$ nur die negativen Pot. k_α.

Aus B erhält man in derselben Weise für $\mu > -1$

$$H(\bar{x}_t \bar{y}_t, \bar{x}_0 \bar{y}_0)_\mu = t^{-\mu-1} + \sum_\alpha \left[H(x_\tau y_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^\mu} t^{-k_\alpha} + \mathfrak{P}_3(t)$$
$$H(x_t' y_t', \bar{x}_0 y_0)_\mu = \mathfrak{P}_4(t).$$

Die I $H(x_\tau y_\tau)_\alpha$ hat die wesentliche Eigenschaft, dass in der Entwickel. von $H(x_\tau y_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau}$ keine neg. Pot. vorkommen.

denn sonst wären in A_3 neg. Pot. von τ mit Factoren von möglich. Dies ist aber niemals der Fall, denn die linke Seite können wir entwickeln in

$$-\sum_\mu H(\bar{x}_\tau \bar{y}_\tau, x_0 y_0)_\mu \tau^\mu,$$

wobei wir gesehen haben, dass für neg. μ der Coeff. 0, also ist

$$H(x_\tau y_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}_0(\tau)$$

Wir betrachten nun denselben Ausdruck, wo aber $x_\tau y_\tau$ ausgezeichnete Stelle ist. Z. B. giebt die linke Seite, nach steigenden Pot. von τ entwickelt $-\sum_\mu H(\bar{x}_\tau \bar{y}_\tau, x_0 y_0)\tau^\mu$. Hier aber war

$$-H(\bar{x}_\tau \bar{y}_\tau, x_0 y_0)_\mu = \begin{matrix} -1 & \mu = -1 \\ 0 & \mu < -1 \end{matrix}$$

unstetig kann also nur $-\tau^{-1}$ vorkommen; dieses Glied steht aber schon da, also kommen auch hier keine neg. Pot. von τ vor, d. h.

$$H(x_\tau \bar{y}_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}(\tau)$$

Die Existenz der Funct. H, deren Ansatz wir gleich betrachten wollen, unterscheidet unsere algebr. Gleich. von denen, wo sich x u. y durch eine Variable u. rat. ausdrücken lassen.

Angenommen nun, wir betrachteten ein Element $x_0 y_0$, wo die Entwickl. mit einer pos. Pot. von τ anfängt u. zwar soll das Glied τ vorkommen. Dann ist $\frac{dx_\tau}{d\tau} = c\tau + \cdots$

also $H(x_\tau y_\tau)_\alpha$ selbst wird nicht ∞. Ist $x_\tau = \alpha + \tau^\lambda \ldots$ $\frac{dx_\tau}{d\tau} = \lambda\tau^{\lambda-1}$ so kann H_α höchstens von der Ordn. $\lambda-1$ ∞ werden. Ist $x_\tau = \infty$ also $x_\tau = \tau^{-\lambda}$, so wird H_α Null mindestens von der $\lambda+1$ten Ord.

Sei ϱ die endliche Anzahl der Zahlen $k_1, k_2, \ldots$, so können zwischen den ϱ zu ihnen gehörigen $\mathfrak{I}$ keine linearen Relationen bestehen. Betrachten wir nämlich die Gleichungen $\mathfrak{I}$. Würden, u. setzen zunächst $\mu = k_\alpha - 1$, so ist $H(x_\tau y_\tau, x_0 y_0)$ eine rat. F. von $x_\tau y_\tau$, welche nur an der Stelle $x_0 y_0$ ∞ wird u. zwar nur neg. Pot. t^{-k} enthält. Sie ist also eine Konst.; folglich dürfen wieder keine neg. Pot. vorkommen, d. h.

$$\left[H(x_\tau y_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{k_\alpha - 1}} = -1$$

$$\left[H(x_\tau y_\tau)_\beta \frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{k_\alpha-1}} = 0 \qquad k_\beta \neq k_\alpha$$

Wenn man für μ eine solche Zahl wählt, daß $\mu+1$ in der Reihe der Zahlen k fehlt, so kann $H(x_\tau y_\tau, x_0 y_0)_\mu$ nicht = einer Konst. sein, so daß es eine F. ist die an der ausgezeichneten Stelle $x_0 y_0$ von der $\mu+1$ten Ordn. ∞ wird.

Jedenfalls müssen wieder die t^{-k} Pot. verschwinden, für welche $k > \mu+1$ ist, so daß

$$\left[H(x_\tau y_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{\mu-1}} = 0,$$

wenn μ nicht zur Reihe der k gehört und $k_\alpha > \mu$ ist.

Wir betrachten nun die Entwickl. der linken Seite an der ausgezeichneten Stelle der Gleichung

$$\frac{dx}{d\tau}\left(c_1 H(x_\tau y_\tau)_1 + c_2 H(x_\tau y_\tau)_2 + \ldots + c_\varrho H(x_\tau y_\tau)_\varrho + c_{\varrho+1}\right) = 0$$

Wenn wir nun beweisen können, daß jede F. $H(x_\tau y_\tau)_\mu$ sich durch ein linearen Aggregat unserer c. Ih auszudrücken läßt, stellt sie mit $\frac{dx_\tau}{dt}$ multipl. nie unendl. wird, so ist gezeigt, daß die Zahl c unabhängig von der gewählten ausgezeichneten Stelle ist. Der Beweis dafür ist unmittelbar ersichtlich.

c ist so auf doppelte Weise erklärt; wir können aber noch eine dritte Erklärung hinzufügen. Es sei die Aufgabe gestellt eine I zu bilden F, die an den Stellen $x_1 y_1, x_2 y_2$ ∞ von der Ordnung $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ wird. Wenn dieselbe überhaupt existirt, so muß sie durch das Aggregat

$$I = C + c_1 H(xy, x_1 y_1)_{\alpha_1 - 1} + c_2 H(xy, x_2 y_2)_{\alpha_2 - 1} + \ldots$$
$$+ c_1' H(xy, x_1 y_1)_{\alpha_1 - 2} + c_2' H(xy, x_2 y_2)_{\alpha_2 - 2} + \ldots$$
$$+ \text{-------------}$$

darstellbar sein, da F-I nur in Unendl ∞ werden könnte u. hier die Ent. t^{-k} enthält; also ist $F - I = \text{Const}$ u. zwar $= 0$ wenn C richtig bestimmt ist. An der Stelle $\bar{x}\bar{y}$ wird also I nicht mehr ∞, d. h. die negativen Ent. fallen von selbst heraus, es bestehen c Gleich. zwischen den $c, c' \ldots$

Beweis von $\Sigma\left[R(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0$ (erster Heft S. 45. 46)
Setzt man statt R ein, R.H so folgt
$$\Sigma\left[R(x_t y_t)\, H(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0$$

Da es mehrere H. I. giebt, so bekommen wir aus dieser Formel eine Reihe von Relationen für die Coeff. der negativen Potenzen von $R(x,y)$ an den Stellen, wo R ∞ ist.
Um einzusehen, dass die Zahl ϱ eine ganz bestimmte ist, haben wir zu zeigen, dass jedes H. I. sich linear durch unsere ϱ H_α ausdrücken lässt. Wir beweisen gleich einen allgemeinen Satz.

Die obige Formel für die voll. I. kann man zur Partialbruchzerlegung benützen. Wir wenden den Satz auf $\frac{Fz}{z-x}$ an. Nun ist

$$\left[\frac{F(z)}{z-x}\right]_{x^{-1}} = F(x)$$

so dass

$$\sum_\lambda \left[\frac{F(a_\lambda+t)}{a_\lambda - x + t}\right]_{t^{-1}} + F(x) = \left[\frac{F(z)}{z-x}\right]_{z^{-1}}$$

$$F(x) = \sum_\lambda \left[\frac{F(a_\lambda+t)}{x-a_\lambda-t}\right]_{t^{-1}} + \left[\frac{F(z)}{z-x}\right]_{z^{-1}}$$

Dies giebt eine Regel, wie man die Partialbruchzerl. einer voll. I. $F(x)$ wirklich machen kann.
Eine I. die ganz ähnliche Eigenschaften wie $\frac{1}{z-x}$ hat, ist unser H. I.

Wir wenden den Satz auf $H(xy, x'y')\, R(x'y') \frac{dx'}{d\tau}$ an.
Hier kommen zuerst die Stellen in Betracht, für die $H \frac{dx'}{d\tau}$ ∞ wird. Dies geschieht an der ausgezeichneten Stelle u. für $x'y'$. Sei xy ein nicht singul. Werth, so dass die Ableit. $G_2 \neq 0$ ist. $x' = x+\tau$, $y' = y + \mathfrak{P}(\tau)$.

$$H(xy, x'y') \frac{dx'}{d\tau} = \frac{1}{x'-x} + \mathfrak{P}(x'-x)$$

Also an dieser Stelle ist

$$\left[H(xy, x'y')R(x'y')\frac{dx'}{dt}\right]_{t^{-1}} = R(xy)$$

Nun kommen noch diejenigen Stellen in Betracht, wo R ∞ wird. Für alle diese haben wir die Entwicklungscoeff zu bilden u zu addiren. Möglicherweise kann auch noch die ausgez. Stelle dazutreten. Nun war

$$H(xy, x_t\, y_t)\frac{dx_t}{dt} = -t^{-1} + \mathfrak{P}(t,\tau)$$

Wenn also $R(x_t\, y_t)$ nicht unendl wird, so ist dieser Coeff statt eine Const; enthält dag $R(x_t\, y_t)$ neg Pot von t, so wird ein wirklicher Teil von x, y in Betracht gezogen; dann aber war dieses Glied bereits unter den übrigen enthalten. Wird R ∞ für die ausgez Stelle so ist also

$$-\Sigma_t\left[R(x_t\, y_t)H(xy, x_t\, y_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = R(xy)$$

wo links über alle Stellen zu summiren ist für die R ∞ wird. Wird R dagegen für die ausgez Stelle nicht, so ist noch eine Const hinzuzufügen. Wir können also allgemein schreiben

$$\Sigma_t\left[R(x_t\, y_t)\left(H(x_0 y_0, x_t\, y_t) - H(xy, x_t\, y_t)\right)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}$$

$$= R(xy) - R(x_0\, y_0),$$

wo $x_0\, y_0$ eine beliebig gewählte Stelle ist.

Die F. R ist also herzustellen, wenn man die Stellen u die Art ihres ∞ Werdens derselben kennt u außerdem noch den Werth für ein bestimmtes Paar $x_0\, y_0$.

Nach unserem Satze ist nun, bei Einführung von H statt R.

$$0 = \Sigma\left[H(x_t y_t)\, H(x_t y_t, x'y') \frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}$$

Da $H(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}$ der Annahme nach keine neg. Pot. enthalten soll, so sind nur neg. Pot. vorhanden wenn solche im andern Factor vorkommen d. h. nur für $x'y'$ oder $\bar{x}\,\bar{y}$.

$x'y'$ ist zunächst ein ganz unbestimmtes Werthepaar. Wir können daher annehmen, daß die Werthe von y die zu x' gehören, von einander verschieden sind

$$x_t = x' + t \;, \quad y = y' + \mathfrak{P}(t) \qquad x', y' \text{ sei endlich}$$

$H(x_t y_t)$ soll für $x'y'$ endlich bleiben. Dann ist, da $H(x_t y_t, x'y') = -\frac{1}{t} + \mathfrak{P}(t)$ ist

$$0 = -H(x'y') + \left[H(\bar{x}_t \bar{y}_t)\, H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x'y')\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}}$$

Nun war ($\frac{dx_t}{dt}$ kann $= 1$ gesetzt werden)

$$H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x'y') = \sum_\alpha H(x'y')_\alpha\, t^{-k_\alpha} + \mathfrak{P}(t)$$

also für die Bezeichnung

$$\left[H(\bar{x}_t \bar{y}_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{k_\alpha - 1}} = C_\alpha$$

erhält man

$$H(xy) = \sum C_\alpha H(x'y')_\alpha$$

Damit ist nicht allein der Beweis geliefert, daß jedes H, welches mit $\frac{dx_t}{dt}$ multipl. nie ∞ wird, durch unsere I H_α sich linear ausdrücken läßt, sondern der Ausdruck ist auch wirklich angegeben.

Die ausgeschlossenen F bilden nur eine scheinbare Ausnahme, denn wenn die Gl. für alle andern gilt, so muß sie-

Wir wollen nun eine J herstellen, die vorgegebenen f in bestimmter Weise ∞ wird u. zwar zunächst eine solche, die an r Stellen $x_1 y_1, \dots x_r y_r$ von erster Ordn. unendl. wird, wobei die Stellen nicht singulär sein sollen. Wir finden

$$R(xy) - R(x_0 y_0) = \sum_\lambda \left[\left(H(xy\, x_t^\lambda y_t^\lambda) - H(x_0, x_t^{(\lambda)})\right) R(x_t^{(\lambda)}) \frac{dx_t}{dt}\right]_t$$

$$x_t^\lambda = x_\lambda + t \,, \quad y_t^\lambda = y_\lambda + \bar{f}(t).$$

Nun ist nach der Voraussetzung

$$R(x_t^{(\lambda)}) = C_\lambda t^{-1} + \dots$$

also

$$R(xy) - R(x_0 y_0) = \sum_\lambda C_\lambda \left(H(x_0\, x_\lambda) - H(x\, x_\lambda)\right)$$

oder

$$R(xy) = C_0 - \sum_\lambda C_\lambda H(x, x_\lambda)$$

Es müssen aber noch gewisse Beding. erfüllt sein, damit diese J allen Forderungen genügt; denn bisher wird die rechte Seite auch an der ausgezeichneten Stelle ∞. Damit dies nicht der Fall sei muss

$$\sum_{\lambda=1}^{r} C_\lambda H(x_\lambda)_\infty = 0$$

Wenn wir $r = p$ nehmen, wird eine solche J im allgemeinen nicht existieren, denn aus den p homogenen linearen Gl. ergeben sich alle $= 0$ ausgenommen wenn

$$\left| H(x_\lambda)_\mu \right| = 0 \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots p)$$

diese Determ. ist aber nicht identisch Null, denn zerlegen wir nach der ersten Horizontalreihe, so folgt

$$\sum_{\lambda=1}^{p} A_\lambda H(x_\varrho)_\lambda = 0$$

d. h. es bestünde eine lineare Beziehung zwischen den H_λ.

Wären dagegen die A sämmtlich Null, so könnte man für jedes einzelne, welches je als Unbestimmte auftritt, dieselben Schlüsse machen u. s. w. Die Aufgabe ist also im allgem. nur für $\varrho+1$ oder mehr Werthepaare lösbar. Zugleich erhellt aus letzterem, dass ϱ für alle und darauf unverändert bleibt. Wir nennen diese G „vom Range ϱ".

Wir behandeln nun die allgemeine Aufgabe. $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, … seien die Stellen an denen die F. unendl. werden soll. Ist die Ordnungszahl >1, so ist jedes Paar so oft zu setzen, als die Ordnungszahl es angiebt. Wenn dieselbe Stelle zu verschiedenen Elementen gehören soll, so ist das Paar so oft zu nehmen, u. als verschieden von dem in anderen Elementen anzusehen.

Existirt die F. $R(xy)$ wirklich, so muß sie in der Form erscheinen

$$R(xy) = C_0 - \sum_\lambda \left[H(x, x_t^{(\lambda)})\, R(x_t^{(\lambda)}) \frac{dx_t^{(\lambda)}}{dt} \right]_{t^{-1}}$$

$R(x_t^{(\lambda)})$ wird für $x_t^{(\lambda)} y_t^{(\lambda)}$ in gegebener Weise ∞; es möge

$$R(x_t^{(\lambda)}) = R_{\lambda 0}\, t^{-m_\lambda} + R_{\lambda 1}\, t^{-m_\lambda+1} + \dots R_{\lambda, m-1}\, t^{-1} + \dots$$

sein. Nun haben wir bezeichnet

$$-H(x_t, x_t^{(\lambda)}) \frac{dx_t^\lambda}{dt} = \sum H(x, x_\lambda)_\mu\, t^\mu$$

so dass wir erhalten

$$R(xy) = \sum_{\lambda=1 \dots n} \sum_{\mu=0 \dots m_\lambda-1} R_{\lambda, m_\lambda-\mu-1}\, H(x, x_\lambda)_\mu + C_0$$

wenn n die Anzahl der Stellen ist, jede einmal gezählt.
Wir schreiben diese Formel abgekürzt

$$R(xy) = C_0 + \sum_\lambda C_\lambda \bar{H}(x, x_\lambda).$$

Diese F. wird aber außer für die angegebenen, auch noch für die ausgezeichnete Stelle ∞; soll dies beseitigt werden, so müssen in der Entwickl. der Umgebung die Pot. t^{-1} verschwinden. Dies gilt auch dann noch, wenn die ausgez. Stelle in der Reihe $x_1 y_1 ..$ vorkommt. Denn wir hatten

$$H(\bar{x}_\tau, \bar{x})_\mu = t^{-\mu-1} + \sum_{\alpha=1}^{\rho} \left[H(\bar{x}_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau} \right]_{\tau^\mu} \cdot t^{-k_\alpha}$$

Da $\bar{x}\bar{y}$ unter die Stellen $x_1 y_1$ gehören soll, so muß $t^{-\mu-1}$ wirklich vorkommen; an dieser Stelle soll R aber in vorgeschriebener Weise ∞ werden, also werden auch jetzt die t^{-k} Pot. im allgemeinen wegfallen müssen. Dies giebt die Bedingungsgl.

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=0}^{m_\lambda} R_{\lambda, m_\lambda-\mu-1} \left[H(x_\tau^{(\lambda)})_\alpha \frac{dx_\tau^{(\lambda)}}{d\tau} \right]_{\tau^\mu} = 0 \quad (\alpha = 1, 2 .. \rho)$$

oder abgekürzt

$$\sum_\lambda C_\lambda \bar{H}(x_\lambda)_\alpha = 0$$

Dies sind die Bedingungen, damit die Aufgabe überhaupt lösbar sei; ist $r > \rho$ so sind dieselben erfüllbar u. es bleiben $r-\rho+1$ Coeff. willkürlich. Davon kann man $r-\rho$ benutzen, um die F. an $r-\rho$ Stellen verschwinden zu lassen; dies giebt $r-\rho$ homogene lineare Gleichungen für die $r-\rho+1$ Coeff. Ein multiplikativer Const. bleibt noch willkürlich. Wenn also $r>\rho$ ist, so ist die F bestimmt durch die Stellen, an denen sie ∞ wird, durch $r-\rho$ Stellen, an denen sie 0 wird u. durch den Werth an einer andern Stelle. Von den $2r$ Stellen, an denen die F ∞ oder 0 wird, sind also nur $2r-\rho$ willkürlich.

Zur Vervollständigung des algebr. Theiles müssen nun noch 3 Aufgaben zu lösen. Erstens die Bestimmung von ρ bei gegebener Gleichung; zweitens die Bestimmung der Gleichungen für gegebenes ρ; drittens die Aufstellung der $H\,F$ einer Gl.

Hat man noch eine zu ρ gehörige Gl gefunden, so sind alle andern durch rat. Transf. aus ihr ableitbar. Man wird daher nur eine möglichst einfache Gl für ρ aufsuchen. Riemann suchte diejenige, welche in x resp. y den niedrigsten Grad hätte, Klebsch die von niedrigster Dimension, Weierstrass wird die suchen, welche die geringste Constzahl enthält.

Wir gehen zur ersten Aufgabe, der Bestimmung von ρ über. Man hat die Aufgabe noch nicht allgemein gelöst; die richtigen Formeln sind da, aber bewiesen hat man sie nur unter Einschränkungen, die wir fallen lassen werden.

Unsere ursprüngliche F. $H(\xi\eta)$ war eine ganze F. dividirt durch $G(\xi\eta)_2$; wir multipl. mit $d\xi$ u. transform. in $H(xy)dx$. Aus diesem Gange ist aber nicht ersichtlich ob die neue F. von derselben Gestalt ist. Wir wollen dies jetzt beweisen. Dass dabei G_2 bevorzugt erscheint, schadet nichts, da ja

$$dG = G_1 dx + G_2 dy = 0 \quad \text{also} \quad G_2 : dx = - G_1 : dy$$

ist. Jedenfalls setzen wir

$$G(xy)_2 H(xy) = R_0(x) + R_1(x) y + \dots + R_{n-1}(x) \cdot y^{n-1},$$

wo die R ration. F. sind. Um zu zeigen, dass sie ganz seien, setzen wir

$$R_0(x) + R_1(x) z + \dots + R_{n-1}(x) z^{n-1} = R(x,z)$$

Nun gilt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{R(xz)}{G(xz)} = \sum_\nu \frac{R(x,y^\nu)}{(z-y^\nu)G(x,y^\nu)_2}$$

oder

$$R(x,z) = \sum_\nu \frac{G(x,z) H(x,y^\nu)}{(z-y^\nu)}.$$

Es ist aber

$$\frac{G(x,z) - G(x,z_0)}{z-z_0} = G(x,z,z_0)$$

eine ganze F. von x, z, z_0. Ziehen wir daher in der vorigen Gl. von $G(xz)$ ab $G(xy^\nu) = 0$ so wird

$$R(xz) = \sum_\nu G(x,z,y^\nu) H(x,y^\nu)$$

$$= \sum_\nu \{ G_0(x) H(xy^\nu) + G'(x,y^\nu) H(xy^\nu) z + \dots \}$$

wenn wir nach Potenzen von z ordnen. Da die Summe in den $y_1 \dots y^n$ symmetrisch ist, wird jeder Coeff. eine rat. F. von x werden. Diese Coeff. werden nun aber ganze F. von

x, wegen der Eigenthümlichkeit von H, daß $H(x)\,dx$ nie [illegible] enthält. Denn, wie leicht zu sehen können wir dieses Kriterium durch das andere ersetzen, daß $\lim_{x=x_0}(x-x_0)H(x_0 y)=0$ für jedes endliche x_0, $\lim_{x=\infty} x\,H(xy)=0$ wenn x im Unend. liegt. Daher werden die obigen Summen $\sum_\nu G_\nu(x)\,H(x_\nu y_\nu)$, wo die G für kein endliches x ∞ werden mit $x-x_0$ multipl. sich der Grenze 0 nähern, d. h. da sie rat. sind, sind sie ganz. Dadurch ist der Beweis geführt, daß

$$H(xy)=\frac{F(xy)}{G(xy)_2}.$$

Nun wollen wir der Gl. eine solche Form geben, daß für ein unendl. großes x sämmtliche zugehörigen y endlich u. von einander verschieden sind. Die vorgelegte Gl. sei

$$G_0(x)\cdot y^n+G_1(x)\cdot y^{n-1}+\dots\ =0,$$

und sei in x vom Grade m. Wenn $x=\infty$, müssen wir durch x^m dividiren

$$\bar G_0\left(\frac{1}{x}\right)y^n+\bar G_1\left(\frac{1}{x}\right)y^{n-1}+\dots=0.$$

Wenn $\bar G_0$ nicht für $x=\infty$ verschwindet, so gehören n endliche Wurzeln y dazu. Es muß also G_0 vom Grade m sein, was sich stets durch die Transform. $x'=\alpha+\frac{\beta}{x-a}$ erreichen läßt. Wählt man ferner a so daß $x=a$ lauter verschiedene Werthe y hat, so findet dies auch bei $x'=\infty$ statt. Nun lassen sich sämmtliche y für ∞ großes x in der Gestalt entwickeln $y=b+b'x^{-1}+b''x^{-2}+\dots$
Nun muß $x\,H(xy)$ für sämmtliche y sich der Null nähern

Ferner kann man $H(xy)$ für $\infty^{\text{ω}}\, x$ nach ganzen Pot von x entwickeln; folglich ist

$$H(xy) = kx^{-2} + k_1 x^{-3} + \dots$$

d.h. H wird für $\infty^{\text{ω}}\, x$ unendl klein von der zweiten Ordn.
Jedes H I stellt sich dar durch

$$H(x) = \sum_{\alpha=1}^{\rho} c_\alpha H(x)_\alpha$$

Seien $g_1 k_1, \dots g_e k_e$ die Werthepaare für die H ∞ wird; die g sind dabei sämtlich endlich. Die Umgebung von $g_\nu k_\nu$ werde durch $x_t^\nu = g_\nu + t^{s_\nu}$, $y_t^\nu - k_\nu = \mathfrak{P}(t)$ dargestellt. Sollte $k_\nu = \infty$ sein, ersetzen wir $y_t^\nu - k_\nu$ durch $1 : y_t$. Nun wird nicht ∞

$$H(x_t^\nu)\, t^{s_\nu - 1} = k_\nu + k_\nu' t + \dots$$

$$H(x_t^\nu) = k_\nu t^{1-s_\nu} + k_\nu' t^{2-s_\nu} + \dots$$

so daß die wirkliche Ordn des Unendlich Werdens

$$s_\nu' \equiv s_\nu - 1$$

Daraus folgt, daß $s_\nu > 1$ sein muß, da ja H wirklich ∞ werden soll. Also ist g_ν einer der Werthe x, für die mehrere, s_ν, zugehörige Werthe von y gleich werden. Man findet also die g, wenn man für y die Discriminantenbildung gleich 0 setzt. Die g haben dann aber ferner die Eigenthümlichkeit, daß in der Entwickl von y durch x gebrochene Pot von x vorkommen. Dadurch sind sie völlig charakterisirt. Der Grad von H stimmt nun mit der Anzahl überein, wie oft H ∞ wird, also ist

$$q = \sum s'_\nu \leqq \sum (s_\nu - 1).$$

Wir beweisen nun, daß q nicht $< \rho + 2n - 2$ sein kann. $H(x)$ kann zunächst für $\rho - 1$ ganz beliebig gewählte Werthe zu Null gemacht werden.

Bedeuten nun $c_1, c_2 \dots c_\rho$ willkürliche Werthe, so können die Gleichungen

$$\sum_\alpha c'_\alpha H(x_\beta y_\beta)_\alpha = c_\beta$$

befriedigt werden, wenn

$$|H(x_\beta)_\alpha| \neq 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots \rho)$$

ist. Diese Bedingung stimmt aber mit der früheren dafür, daß keine H Fun nur ρ Stellen ∞ wird, überein. Wählen wir also die $x_\beta y_\beta$ so daß kein H für sie ∞ wird u. daß jener Bedingung genügt wird, so kann man die Gl befriedigen. Übrigens mögen die $x_\beta y_\beta$ nicht zu den g, h gehören. Wir wählen nun ρ Systeme der c_β so, daß immer eins derselben $= 1$ ist, die übrigen $= 0$ sind. Dann setzen wir

$$\bar{H}(x_\beta y_\beta) = \sum_\alpha c'_\alpha H(x_\beta y_\beta)_\alpha$$

u. erhalten so ρ F. $\bar{H}(xy)_1, \bar{H}(xy)_2 \dots \bar{H}(xy)_\rho$ von denen jede an $\rho - 1$ der Stellen $x_1 y_1 \dots x_\rho y_\rho$ verschwindet, nämlich

$$\bar{H}(x_\gamma y_\gamma)_\beta = \begin{cases} 0 & \gamma \gtrless \beta \\ 1 & \gamma = \beta \end{cases}$$

Daraus folgt, daß diese neuen $\bar{H}$ F. von einander unabhängig sind. Denn wäre

$$l_1 \bar{H}_1 + \dots + l_\rho \bar{H}_\rho = 0$$

so müßten für $xy = x_1 y_1$ $\bar{H}_2, \dots \bar{H}_\rho$ verschwinden, $\bar{H}_1$ aber nicht, so daß $l_1 = 0$ wäre, u. s. w. Folglich können wir

jede H $\mathfrak{J}$ durch die neuen $\bar{H}$ linear ausdrücken.
Nun würde aber für $x_c' y_c'$, $\bar{H}$ von der s_ν'ten Ordn. ∞, also müssen hierfür alle H von gleicher Ordnung ∞ sein, da diese $\mathfrak{J}$ nur durch cyclische Vertauschungen der Zahlen $1, \ldots c$ in einander übergehen. Man kann also die $x_1 y_1 \ldots x_c y_c$ so wählen, daß alle übrigen Bedingungen erfüllt werden, u. daß wirklich jedes $\bar{H}$ gerade von der Ordnung s_ν' an allen Stellen $g_\nu h_\nu$ ∞ wird. Wir betrachten nun $H(xy) : \bar{H}(xy)$. Der Nenner verschwindet für $x_1 y_1, \ldots x_c y_c$ mit der zugehörigen Ord. Zahl 1, im allgemeinen u. ferner für $(\infty b_1), \ldots (\infty b_n)$ mit der Ord. Zahl 2, also für $c+2n-1$ Stellen mindestens.
Für die Werthe, für die der Zähler ∞ wird, wird der Bruch nicht ∞, da ja $\bar{H}$ von derselben Ord. unendl. wird. Im Unendl. wird der Bruch aber auch nicht ∞; denn die Entwickl. des Zählers beginnt mindestens mit x^{-2}; die allgemein H $\mathfrak{J}$ wird für willkürliche c mit irgend einer neg. Pot. anfangen etwa mit $x^{-\lambda}$, $\lambda \geqq 2$. Nun können wir $x_1 y_1$ immer so wählen, daß $\bar{H}_1$ mit derselben Potenz anfängt. Denn es würde ja eine gewisse Relation zwischen den c nothwendig sein, damit der Coeff. von $x^{-\lambda}$ verschwindet. Die c hängen aber von der Wahl der $x_1 y_1 \ldots x_c y_c$ ab, welche wir also so annehmen können, daß $x^{-\lambda}$ nicht fortfällt.
Unser Quotient wird also nur ∞ an den Stellen, an denen der Nenner verschwindet u. die im Endlichen liegen. Wir haben zunächst $c-1$ solcher Stellen; aber der Nenner

muß noch an andern Stellen verschwinden, da ja keine F existirt, die nur an $p-1$ beliebig gewählten Stellen ∞ wird. Wir zeigen, daß noch $p-1$ hinzukommen. Gesetzt es seien p'. Wenn nun $p' < p-1$, so könnte man die C so bestimmen, daß $H(x)$ an diesen p' Stellen auch 0 wird, so daß der Quotient an weniger als p Stellen ∞ würde. Es ändert nichts, wenn einige der p' Stellen zu $x_1 y_1, \ldots x_p y_p$ gehören. Der Nenner muß also mindestens an noch $p-1$ Stellen 0 werden. er verschwindet also an mindestens $2p+2n-2$ Stellen, d. h. der Grad von $\bar{H}$ oder von H, die beide übereinstimmen,

$$\Sigma(s_\nu - 1) \geqq 2p + 2n - 2.$$

Wir beweisen nun, daß das Gleichheitszeichen gilt. Wir können $H(x)$ noch auf andere Art bilden. Wir bestimmen nämlich eine F H die an jeder der Stellen $g_\nu t_\nu$ ∞ wird, u. zwar von der Ordnung $s_\nu - 1$. Dies ist möglich, da denn die Zahl der Nennerstellen $\geqq 2p+2n-2 > p$ ist.

$$K_0 + K_1 H(x, g_1)_0 + \cdots + K_{s_1-1} H(x, g_1)_{s_1-2}$$
$$+ K'_1 H(x, g_2)_0 + \cdots + K'_{s_2-1} H(x\, g_2)_{s_2-2}$$
$$+ \cdots\cdots$$

Es ist nun noch die Bedingung zu erfüllen, daß dieser Ausdruck nicht an den ausgezeichneten Stellen ∞ wird. Wir wählen diese so, daß sie nicht mit einem g_k zusammenfällt. Dies giebt p Bedingungen für die Coeff., damit die t^{-k} fortfallen. Es bleiben nun noch $1 + \Sigma(s_\nu - 1) - p$ willkürliche Const. Unser Ausdruck hat an den Stellen g_k schon die Eigenschaft der H. F. Wir betrachten sie im Unendl.; dort muß seine Entwickl. mit x^{-2} anfangen. Wenn wir also für y jene Reihenentwickl. $b + b'x^{-1}$ .. einsetzen, so müssen die zwei ersten Glieder verschwinden. Es gilt dies für alle n Wertepaare, so daß noch $2n$ Beding. dazu kommen. Von diesen ist aber eine die Folge der andern; denn wenn F eine rat. F. von x u. y ist, so war ja

$$\Sigma_t \left[F(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = 0$$

Unser obiger Ausdruck hat nun im Endl. bereits die Eigenschaften einer H. F.; es kommen also endliche $x_t y_t$ nicht mehr in Betracht, $x_t = t^{-1}$, $\frac{dx_t}{dt} = -x_t^2$; folglich wird

$$\Sigma_t \left[H(xy)\,x^2\right]_{\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}} = 0;$$

oder

$$\Sigma_t \left[H(xy)\right]_{x^{-1}} = 0$$

Wenn daher dieser Entwickl. Coeff. bereits für $n-1$ Werte 0 ist, muß er für den letzten gleichfalls statt finden. In obigem Ausdruck für H bleiben also

$$\Sigma (s_r - 1) - \varrho - 2n + 2$$

willkürl. Const. Er muß aber ϱ enthalten, damit er eine allgemeine H. F. wird, also darf die Anzahl jener willkürlichen Const. höchstens ϱ sein, d. h.

$$\Sigma (s_r - 1) - \varrho - 2n + 2 \leq \varrho.$$

Vergleicht man diese Formel mit der früheren, so folgt

$$\sum(\lambda_i - 1) = 2p + 2n - 2.$$

Es soll dies an einigen Beispielen erläutert werden. Die Stellen $\mathfrak{z}_1 k_1$ sind dadurch charakterisirt, dass die Entwickl. der Umgebung mit t^{λ_1} beginnt, wo $\lambda_1 > 1$ ist. Solche Stellen sollen „wesentlich singuläre" heissen; wenn aber zu einem x mehrere y gehören, ohne dass y nach x entwickelt, gebrochene Pot. enthält, die Stelle unwesentlich singulär ist. Angenommen nun, dass die sämmtlichen Reihen die nach Pot. von $x-a$ fortschreitend alle n Werthe geben, die Anzahl g haben, so ist für diese Stelle

$$\sum(\lambda_i - 1) = n - g.$$

Sei nämlich

$$y_1 = \mathfrak{P}(x-a)^{\frac{1}{\lambda_1}} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \dots = n$$
$$y_2 = \mathfrak{P}(x-a)^{\frac{1}{\lambda_2}} \qquad (\lambda_1 - 1) + (\lambda_2 - 1) + \dots = n - g$$
$$\dots\dots$$

und dehnen wir dies auf alle singulären Werthe aus, so

$$\sum(\lambda_i - 1) = \sum(n - g)$$

Dies können wir wie folgt ausdrücken: Jede der g Reihen stellt ein Element des Gebildes dar

$$x - a = t^{\lambda_1} \qquad x - a = t^{\lambda_2}$$
$$y_1 = \mathfrak{P}(t) \qquad y_2 = \mathfrak{P}(t)$$

Von den zugehörigen y werden für $x = a$ mehrere gleich.

Sobald x unend wenig von a verschieden ist, so werden n verschiedene Werthe y zugehören. Wenn wir also $x-a=\delta$ ein beliebig kleine Größe setzen, so erhalten wir n verschiedene Werthsysteme. Wenn a kein singulärer Werth ist, gehören diese n verschiedenen Elementen an; hier g solche. Indem wir jeden singulären Werth $n-g$ mal zählen können wir sagen, daß δ mit ρ durch die Gl verbunden sei

$$\rho = \tfrac{1}{2}\delta - (n-1)$$

Hierbei haben wir die besondere Gl Form vorausgesetzt, daß wir durch eine gewisse lineare Transf $x-a = \beta:(x'-\alpha)$ erhalten haben; y blieb unverändert. Dadurch kann natürlich die Zahl der singul Werthe nicht verändert werden, so daß es gleichgültig ist, ob wir diese Form haben oder nicht. Ist nämlich $x-a = t^{\alpha_1}$ u setzt man $x-a = \beta:(x'-\alpha')$ so entspricht $x=a$ ein ∞ großes x' also $x' = \beta t^{-\alpha_1}$ oder y schreitet fort nach Pot von $\left(\frac{1}{x'}\right)^{\alpha_1}$. Der entsprechende singuläre P $x'=\infty$ hat also dasselbe α_1 u ρ.

Wenn also $x=\infty$ ein wesentl sing P ist, so ist er dadurch charakterisirt, daß in der Entwickl nach $\frac{1}{x}$ [illegible] vorkommen.

Wir geben jetzt einige Andeutungen, wie man ρ in besonderen Fällen ermittelt. Da die vorgelegte Gl so beschaffen, daß sie sich in eine Gl transf läßt, in welcher die eine der Var nur bis zum zweiten

Zal. steigt. Es ist dies der Fall, wenn sich nicht eine vollst. quadratische Gleichung bilden läßt.

$$g_0 y^2 + g_1 y + g_2 = 0;$$

die g sollen keinen gemeinsamen Theiler haben.

$$y = \frac{-g_1 + \sqrt{g_1^2 - 4 g_0 g_2}}{2 g_0} = \frac{-g_1 + R_1 \sqrt{R}}{2 g_0}$$

wobei R_1^2 den quadratischen Theiler des Radicanden bezeichnet. Nun führen wir für y ein $\sqrt{R}$, also

$y' = \sqrt{R}$, dann erhält man eine Gl der Form

$$y = \sqrt{R}$$

wo R keinen quadratischen Theiler hat. Es sei

$$R = C(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_{2n-1})$$

Setzt man $\frac{1}{x-a_0} = \xi$, $x = a_0 + \frac{1}{\xi}$

$$x - a_r = \frac{(a_0 - a_r)\xi + 1}{\xi}$$

$$R = \frac{c_1}{\xi^{2n}}\left(1+(a_1-a_0)\xi\right)\cdots\left(1+(a_{2n-1}-a_0)\xi\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{R}}{\xi^n} = \frac{\eta}{\xi^n}$$

so erhält man für $\eta = \sqrt{R(\xi)}$

eine Gl in der unter der Wurzel eine ungerade Form erscheint. In dieser Form können wir uns immer gedacht, wir also d. Gl annehmen u. setzen

$$R(\xi) = 4\xi^{2n-1} + c_1 \xi^{2n-2} + \dots$$

Bei dieser Gl Form giebt es im Unendl nur ein Element. Denn man hat dort $\eta = 2\xi^{n-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{c_1}{4}\xi^{-1} \dots\right)^{\frac{1}{2}}$

Man erhält durch diese eine Darstellung beider Werthe von y. Man könnte c_1 auch $=0$ setzen, doch ist dies unnöthig. Singuläre Werthe können offenbar nur ∞ u. die a sein. Für $\xi=\infty$ ist $\xi = t^{-2}$, $\eta = f(t)$, $\nu_r = 2$. Ebenso ist $\nu_r = 2$ für alle a so daß $\sum(\nu_r - 1) = 2r$ u. da $n = 2$ ist,

$$p = r-1.$$

Für den allgemeineren Fall $y^n = Rx$ findet man

$$2p = (\lambda-1)(n-1) - \sum{}'(r-1)$$

Es soll nun noch eine zweite Methode der Berechnung von p folgen.
Sei eine beliebige Gl. in x u. y vorgelegt, deren höchste Dimension die $n$te sei. Wir können sie leicht so umändern, daß die n Punkte ∞ in verschiedenen Richtungen liegen. Das ist der Fall wenn in

$$G(x,y) = (x,y)_n + (x,y)_{n-1} + \dots$$

$$(x,y)_n = c(y-c_1x)(y-c_2x)\dots(y-c_nx)$$

die $c_1 \dots c_n$ sämmtlich verschieden sind. Diese Form der Gl ist nun stets erreichbar. Substituiren wir

$$x = \frac{\xi}{1+\alpha\xi+\beta\eta}, \quad y = \frac{\eta}{1+\alpha\xi+\beta\eta}$$

so erhalten wir

$$(\xi,\eta)_n + (1+\alpha\xi+\beta\eta)(\xi,\eta)_{n-1} + \dots$$

hierbei sind die Glieder $n$ter Dimension

$$(\xi,\eta)_n + (\alpha\xi+\beta\eta)(\xi,\eta)_{n-1} + \dots + (\alpha\xi+\beta\eta)^n(\xi,\eta)_0$$

Dies. $\mathfrak{F}$ kann aber für beliebige α u. β nicht gleich Irrele-vanz haben. Denn ξ η werden ∞ wenn $1-\alpha x-\beta y=0$ ist, also wenn diese Gl gleichzeitig mit der vorgelegten in x,y besteht. Stellen wir beide Gl geometrisch dar, so werden ξ η unendl für die Durchschnittspkte der Geraden $1-\alpha x-\beta y=0$ mit der Curve $G(xy)=0$. Wir brauchen also α u. β nur so zu wählen, daß alle diese Schnittpunkte von einander verschieden sind, d.h. keine Tangente der Curve durch die Gerade gegeben ist. Wir machen nun die beschränkende Voraussetzung, daß die die Gl repräsentirende Curve entweder gar keine Singularitäten hat, oder nur solche gewöhnlicher Art. Findet an der Stelle a,b eine gewöhnliche Singularität statt, so dürfen, wenn man nach $x-a$, $y-b$ ordnet, im allgemeinen nur die Glieder erster Dimension verschwinden u. die beiden in den Gliedern zweiter Dimension enthaltenen Linearfactoren müssen verschieden sein.

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 = c_0(g_1 v - h_1 u)(g_2 v - h_2 u)$$

Um nun alle Verhältnisse zu erhalten, machen wir folgende Ersatz.

$$u = (g_1 + \alpha v_1)u_1, \quad v = (h_1 + \beta v_1)u_1, \quad g_1\beta - h_1\alpha = 1$$

$$u_1 = \beta u - \alpha v, \quad v_1 u_1 = -h_1 u + g_1 v.$$

Die Gl für $u_1 v_1$ lautete dann

$$c_0 v_1 (g_2 h_1 - h_2 g_1 + v_1) + u_1 (g_1 + \alpha_1 v_1, h_1 + \beta v_1)_3 + \dots = 0$$

Für kleine u_1 wird v_1 eine mit der ersten Potenz von u_1 anfangende Pot. Reihe von u_1, also wenn $t = u_1$ ist,

$x-a = g_1 t + \alpha t \cdot f(t)$ $\qquad y-b = h_1 t + \beta t f(t)$

Vertauscht man $g_1 h_1$ mit $g_2 h_2$ so erhält man einen zweiten Zweig. In unserem Falle hat die Curve in a, b einen gewöhnlichen Doppelpunkt, in dem zwei Curvenzweige sich schneiden.

Wenn wir nun für $x-a$, $y-b$ diese Ausdrücke in die Ableitungen von G einsetzen, so müssen wir für das Folgende wissen, mit welcher Pot. die Entwickl. anfängt.

$$G(x,y) = u_1^2 G_0(u_1 v_1)$$

$$(g_1 + \alpha v_1)\frac{\partial G}{\partial x} + (h_1 + \beta v_1)\frac{\partial G}{\partial y} = 2u_1 G + u_1^2 \frac{\partial G}{\partial u_1}$$

$$\alpha \frac{\partial G}{\partial x} + \beta \frac{\partial G}{\partial y} = u_1 \frac{\partial G}{\partial v_1}$$

Wir zeigen, daß die Entwickl. $u_1 \frac{\partial G}{\partial v_1}$ mit t anfängt. Setzt man $u_1 = t$, so ist dies zwar unmittelbar ersichtlich, doch leiten wir es aus einem allgemeinen Satze ab.

$$F(u, wu) = F_0(w)u^m + F_1(w)u^{m+1} + \dots$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial F(u, wu)}{\partial \cdot wu} u = F(u, wu)_2 \, u$$

$$F(u, wu)_2 = F_0'(w) u^{m-1} + \dots$$

w sei eine Pot. Reihe von u. Wenn für $u = 0$ $F_0' w$ nicht 0 wird, so fängt die Entwickl. mit der $m-1$ten Pot. von u an. In unserem Falle haben wir

$$G(x-a, y-b) = G(u, v) = G_2(u_1, u_1 v_1) = u_1^2 G_1(u_1 v_1)$$

Nach u_1 entwickelt fängt die F mit u_1^2 an, so daß $m = 2$ ist. Der Coeff. von u_1^2 ist $c_0 v_1 (g_2 h_1 - g_1 h_2) + \dots$; $F_0'(v_1)$ verschwindet nicht für $v_1 = 0$. Also fängt die Entwicklung von

$$u_1 \frac{\partial G_1}{\partial v_1} = \alpha \frac{\partial G}{\partial x} + \beta \frac{\partial G}{\partial y}$$

wirklich mit t an.

Setzt man also für x u. y die beiden Pot. Reihen ein, so wird

$$\alpha \frac{\partial G}{\partial x} + \beta \frac{\partial G}{\partial y} = c_1 t + \dots \qquad c_1 \neq 0$$

Daraus schließen wir nun: Wir wollen eine F. H von der Gestalt

$$H(x) = \frac{E(xy)}{G'(xy)_2}$$

herstellen

$$G_2 H\, dx = E\, dx$$
$$G_1 H\, dx = -E\, dy \qquad 0 = G_1 dx + G_2 dy$$
$$(\alpha G_1 + \beta G_2) H\, dx = E(\beta dx - \alpha dy)$$
$$H\, dx = E(\beta dx - \alpha dy) : (\alpha G_1 + \beta G_2)$$

Nehmen wir nun irgend eine Stelle a, b die nicht zu den Doppelstellen gehört, so werden G_1 u. G_2 nicht beide 0 u. da α u. β willkürlich sind, der Nenner ist $\neq 0$; da E eine ganze F. von xy ist, so ist $H\,dx$ auf die Form $f(t)dt$ gebracht, wo f keine neg. Pot. von t enthält. Ist dagegen a, b eine gewöhnliche Doppelstelle, so beginnt, wie oben gezeigt, $\alpha G_1 + \beta G_2$ mit der Pot. t an; da aber $H\,dx$ keine neg. Pot. von t enthalten darf, so muß die Entwickl. von E mit einer pos. Pot. von t beginnen. Es muß also $E(a,b) = 0$ für alle Doppelstellen a, b sein. – Bisher haben wir aber nur im Endl. liegende Doppelstellen berücksichtigt. Für $x = \infty$ müßte $H \cdot x = 0$ sein. Daraus folgt, daß $E(xy)$ in y nicht von höherem als dem $n-3$ten Grade sein darf. Setzen wir nämlich $y = zx$ so wird

$$G(x, zx) = x^n\left((1,z)_n + \frac{1}{x}(1,z)_{n-1} + \dots\right)$$

der zweite Fact. wird für $y_1 \dots y_n$ nicht verschwinden.

$$G(x, y_1)_2 = x^{n-1}\left(f(1, c_1)_n + \dots\right)$$

die Entwickl. von $G(x y_1)_2$, $G(x, y_2)_2 \dots G(x y_n)_2$ fangen also genau mit x^{n-1} an. Nun muß aber

$$\left(\frac{x\, E(xy)}{x^{n-1}\left(f'(1,c)_n + \dots\right)}\right)_{x=\infty} = 0$$

sein, d. h. die Entw. von $E(xy)$ muß mit x^{n-3} oder einer noch niedrigeren Pot. anfangen. Daraus ist ersichtlich, daß $E(xy)$ in y höchstens vom $n-3$ ten Grade sein darf. Denn

$$E(xy) = E_0(x)\, y^{n-1} + E_1(x)\, y^{n-2} + \dots$$

$E_0, E_1 \dots$ seien bezüglich vom Grade $m_0, m_1, \dots$ Wir denken uns für y seine Reihenentw. $y = cx + \dots$ eingesetzt u. schreiben das Anfangsglied jedes Summanden hin

$$C_0 c^{n-1} x^{m_0+n-1} + C_1 c^{n-2} x^{m_1+n-2} + \dots$$

Aus diesen Gliedern wird das wirkliche Anfangsglied jedenfalls zusammengesetzt sein; denn ist m der größte Werth der Exponenten, so wird für einige der $y_1 \dots y_n$ nothwendig die Entwickl. mit x^m anfangen. Der Coeff. von x^m ist ja eine ganze F. von c, die höchstens vom $n-1$ ten Gr. ist; daher ist es nicht möglich, daß dieselbe für die n verschiedenen zu $y_1 \dots y_n$ gehörigen $c_1 \dots c_n$ verschwindet. Nun darf aber die Entwick. höchstens mit dem $n-3$ ten Grade anfangen, folglich muß

$$m_0 + n - 1 \leq n - 3, \quad m_2 + n - 3 \leq n - 3$$
$$m_1 + n - 2 \leq n - 3, \quad \dots\dots$$

also $E_0(x) = E_1(x) = 0$, $m_2 = 0$, $m_3 \leqq 1$, $m_4 \leqq 2, \ldots$
$E(xy)$ ist also in y wirklich höchstens vom Grade $n-3$. Hat also die Gl nur gewöhnliche Doppelstellen, so ist es, damit

$$\frac{E(xy)}{F'(xy)}$$

eine H I sei, erforderlich u hinreichend, daß E eine ganze F ist deren Grad höchstens $n-3$ ist, u daß E in allen Doppelstellen verschwindet. Nun enthält eine ganze F vom Grade $n-3$ $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ Konst. Wenn d die Zahl der Doppelp. ist, so finden d Relationen statt; denn die Bedingung $E(a,b)=0$ giebt d linearen Relat. Also ist die Zahl der unabh H I

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d.$$

Später soll gezeigt werden, daß diese Formel allgemein gilt, wenn man die Doppelp richtig zählt. Man kann übrigens jede Gl in eine solche verwandeln wie wir sie oben betrachtet haben.

Zu den gewöhnlichen Singularitäten der Curven rechnen auch die Spitzen. Rechnet man diese ein, so bleibt die Formel bestehen.

Die Gl hat in a, b eine gewöhnliche Spitze, wenn

$$G(x-a, y-b) = C(hu-gv)^2 + (u,v)_3 + \cdots$$

u $(hu-gv)$ kein Theiler von $(u,v)_3$ ist.

$$u = (g+\alpha v_1)\, u_1, \qquad v = (h+\beta v_1)\, u_1,$$

$$G(x,y) = u_1^2 \left(C v_1^2 + u_1 (g+\alpha v_1, h+\beta v_1)_3 + \cdots \right)$$

der Nenner noch verschwindet $(g+\alpha v_1, h+\beta v_1)_3$ nicht für $v_1 = 0$; daher lautet die Entwickl. von u nach Pot. von v_1

$u_1 = c_1 v_1^2 + \dots$ Wir setzen also $v_1 = t$, $u_1 = c_1 t^2 + \dots$

$u = g c_1 t^2 + \dots$, $v = h c_1 t^2 + \dots$ $\quad G(xy)_1 = 2C(hu-gv)k + (\alpha \bar{v})_2 + \dots$

$hu - gv = u_1 v_1 = c_1 t^3 + \dots$ $\quad G(xy)_1 = 2C c_1 h t^3 + \dots$

und ebenso $G(xy)_2 = 2C c_1 g t^3 + \dots$

Da g u. k nicht gleichzeitig 0 sind, so fängt also wenigstens die eine der Größen $\frac{dx}{G_2}, \frac{dy}{G_1}$ mit t^{-2} an.

Nun dürfte $\quad \frac{E(xy)dx}{G(xy)_2} = - \frac{E(xy)dy}{G(xy)_1}$

nirgend negat. Pot. von t enthalten, folglich muss E in der Umgebung von a, b entwickelt mindestens mit t^2 anfangen; es muss also $E(ab) = 0$ sein. Dies genügt aber vollkommen. Denn E ist eine ganze F. von u u. v; u u. v fangen aber beide mit t^2 an. Eine gewöhnl. Spitze liefert also auch nur eine einzige Beding. gl. u. zwar gerade dieselbe wie ein gewöhnl. Doppelp.

Dieselbe Untersuchung würde man nun, zunächst ohne Schwierigkeit für den Fall fortsetzen können, dass G mit $(xy)_\mu$ verschwindet u. alle linearen Fact. verschieden sind. Man würde finden, dass ein solcher Dopp. P. nach gewöhnl. Weise aus $\mu-1$ Dopp. entstanden gedacht werden muss. Ebenso geht es, wenn $(xy)_\mu$ mehrfache Wurzeln hat, die aber in den Ausdrücken höherer Dimens. $(xy)_{\mu+1}$ nicht vorkommen. Es ist aber schwer auf diesem Wege allgemein

Resultate erzählten Handelt es sich um einen speciellen Fall, so muß man in der angegebenen Weise verfahren, bis man entscheiden kann mit welcher Pot von t $\alpha G_2 + \beta G_1$ anfängt.

Wir kommen jetzt zur Bestimmung der F $H(x, x')$ indem die Gl ganz allgemein bleiben soll, u betrachten zunächst H nur als F von x', y'. Sei x, y ein nicht singuläres Werthepaar. Dann folgt aus

$$H(x, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + \mathfrak{P}(t, \tau),$$

daß für $x' = x, y' = y$ resp $x' = x, y' = \bar{y}$

$$(x' - x) H(x, x') = 1, \quad 0.$$

An allen andern Stellen enthält $H(x, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}$ keine neg Pot von τ, außer an der ausgez; hier ist

$$H(x, \bar{x}_\tau)\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} = -\tau^{-1} + \dots$$

Betrachtet man aber die Diffz zweier solcher H F

$$H(x, x') - H(x_0, x') = F(x' y')$$

so enthält dieselbe mit $\frac{dx_\tau}{d\tau}$ multiplic keine neg Pot von τ an der ausgez Stelle. $x_0 y_0$ ist natürlich kein sing. $F(x')$ besitzt die Eigenthümlichkeit; außer an x, y u $x_0 y_0$ wird $F(x')\frac{dx'}{d\tau}$ nie ∞; ferner ist

$$(x' - x) F(x') = 1, 0 \quad \text{für } x' = x, y' = y; \text{ resp } y' = \bar{y}$$

$$(x' - x_0) F(x') = -1, 0 \quad , \quad x' = x_0, y' = y_0; \text{ resp } y' = \bar{y}_0$$

so daß $\qquad (x' - x)(x' - x_0) F(x')$

weder an xy noch an $x_0 y_0$ noch ∞ wird.

Wir machen jetzt von der ersten Eigenschaft Gebrauch, um nachzuweisen, daß

$$G(x'y')_\nu\,(x'-x)(x'-x_0)\,F(x'y') = f(x'y')$$

eine ganze rationale Function von x' u. y' ist. Dazu bringen wir f auf die Form

$$f_0(x') + f_1(x')y' + \dots + f_{n-1}(x')y'^{\,n-1}.$$

Wir beweisen nun ähnlich wie oben, daß die Coeff. sämtlich ganze Functionen von x' sind. – Die F. $f(x'z)$ kann man darstellen, wenn man für x' ihre Werthe für n z Werthe kennt.

$$\frac{f(x',z)}{\varphi z} = \sum_\nu \frac{f(x',z_\nu)}{(z-z_\nu)\varphi'(z_\nu)}$$

$$\varphi(z) = G(x',z)\,,\quad z_\nu = \overset{\nu}{y}'$$

$$f(x'z) = \sum_\nu \frac{(x'-x)(x'-x_0)\,F(x',\overset{\nu}{y}')}{z-\overset{\nu}{y}'}\,G(x'z)$$

$$= \sum_\nu (x'-x)(x'-x_0)\,F(x',\overset{\nu}{y}')\,G(x',\overset{\nu}{y}',z)$$

die Coeff. von $z^{n-1}, z^{n-2}, \dots$ sind

$$\sum_\nu (x'-x)(x'-x_0)\;F(x',\overset{\nu}{y}')\,G_0(x')$$

$$\sum_\nu (x'-x)(x'-x_0)\;F(x'\overset{\nu}{y}')\,G_1(x',\overset{\nu}{y}')$$

$$\dots\dots$$

diese sind rat. F. weil sie symmetrisch in den n Wurzeln y sind; im Endl. können sie aber nie ∞ werden; denn $G_0, G_1 \dots$ sind im Endl. stets endl. Für $x'=x$, $x'=x_0$ bleibt wie oben gezeigt auch alles endlich. $F(x'\overset{\nu}{y}')$ kann sonst nur in singul. Stellen ∞ werden, aber so, daß $F(x'y')\frac{dx'}{dt}$ nicht ∞ wird, $x' = a + t^\lambda$; $F(x'y')$ darf nur mit $t^{-\lambda+1}$ anfangen, d. h. mit $(x'-a)^{-1+\frac{1}{\lambda}}$, also wird $(x'-a)\,F(x'y')$

für $x' = a$, 0 werden für alle y d. h. jene Coeff. werden auch für diese x Stelle nicht ∞; sie sind in endl. stets endl. also ggz. F.
$f(x'y')$ ist daher eine g. F. von x' u. y'.
Die für $F(x'y')$ aufgestellten Eigensch. übertragen wir auf
$f(x'y') = G(x'y')_2 (x'-x_0)$ $\quad f(x_0 y_0) = -G(x_0 y_0)_2 (x_0 - x)$; $f(x'y') = 0 = f(x_0 y_0)$
Nun besitzt $(x'-x_0) G(x'y', y) - (x'-x) G(x'y', y_0) = \bar{f}(x'y')$
dieselben Eigensch. Es ist offenbar eine g. F. von $x'y'$ u. nimmt für die $2n$ zu x u. x_0 gehörigen Werthepaare dieselben Werthe an wie f. Die Differenz $f(x'y') - \bar{f}(x'y') = \bar{g}(x'y')$
ist nun eine ggz. F., welche für jene $2n$ W. für 0 wird, daraus folgt, daß $\bar{g}(x'y')$ durch $(x'-x)$ u. $(x'-x_0)$ theilbar, d. h. daß jeder Coeff. durch $(x'-x)(x'-x_0)$ theilbar ist oder

$$\bar{g}(x'y') = (x'-x)(x'-x_0)\, g(x'y')$$

wo $g(x'y')$ wieder eine g. F. von x' u. y' ist. Denn $\bar{g}(x'y')$ läßt sich mit Hülfe der irreduc. Gl. auf den Grad $(n-1)$ in y erniedrigen, kann also für $x' = x$ u. ebenso für $x' = x_0$ nur so für alle n zugehör. W. y' verschwinden, wenn es die Coeff. thun. Die gesuchte F. $F(x'y')$ hat also die Gestalt

$$F(x',y') = \frac{G(x'y', y)}{(x'-x)\, G(x'y')_2} - \frac{G(x'y', y_0)}{(x'-x_0)\, G(x'y')_2} + \frac{g(x'y')}{G(x'y')_2}$$

Es kommt nun auf die Bestimmung der g. F. $g(x'y')$ an. Nach den oben entwickelten Eigensch. dürfen für kein W.-Paar in der Entw. von $F(x'y')\frac{dz}{dt}$ neg. Pot. von t vorkommen. An allen nicht sing. Stellen ist diese Beding. von selbst erfüllt. –

Wir beschränken uns jetzt wieder auf den Fall, daß die durch die Gl dargestellte Curve nur gewöhnl Singularitäten besitzt. Ist a, b eine doppelte, so fängt $\frac{dx}{G(x'y')_2}$ oder $\frac{dy'}{G(x'y')_1}$ mit t^{-1} an, es muß also der andere Factor in $F(x'y')dx$ mit t oder einer höheren Pot anfangen; dies giebt die Bedingung:

$$\frac{G(a,b,y)}{a-x} - \frac{G(a,b,y_0)}{a-x_0} + g(a,b) = 0.$$

Dieselbe Bed liefert eine gewöhnl Spitze. Hier fängt zwar $dx : G(x'y')_2$ mit t^2 an; aber dafür wird auch der andere Factor, wenn er überhaupt für $t=0$ verschw, mit t^2 anfangen.

Der Grad von g wird, wie wir jetzt zeigen, $n-3$ werden. Wir setzen unsere Gl so umgeformt, daß für große x die Entw lauten $y' = c_1 x' + f\left(\frac{1}{x'}\right)$, $x' = t^{-1}$

also $F(x'y')\,t^{-2} = F \cdot x'^2$ muß für die n Stellen endl sein, oder $x' F(x'y')$ muß verschwinden. Für die beiden ersten Glieder in $F(x'y')$ ist diese Bed bereits erfüllt. Denn es ist

$$G(x'y')_1 = C(y'-c_1x')\dots(y'-c_nx') + (x'y')_{n-1} + \dots$$

$$G(x'y')_2 = C(c_1-c_2)\dots(c_1-c_n)\,x'^{\,n-1} + \dots$$

$G(x'y'y)$ ist vom Gr $n-1$ u zwar ist der Coeff von $x'^{\,n-1}$ unabh von y, so daß er sich in der Summe der beiden ersten Glieder forthebt. Da nun außerdem noch der Factor $\frac{1}{x'-x}$ resp $\frac{1}{x'-x_0}$ vorkommt, so fängt die Entw der beiden ersten Glieder mit x'^{-2} oder niedrigeren Pot an. Also ist $x' \frac{g(x'y')}{G(x'y')_2} = 0$, folglich muß g mit $x'^{\,n-3}$ höchstens anfangen, für alle W y'. Daraus ist nun in derselben Weise wie für die E F abzuleiten, daß $g(x'y')$ höchstens vom Gr $n-3$ ist. – Umgekehrt ist jetzt auch allen Bed, denen $F(x'y')$ genügen muss, um die Diff zweier $H\,I$ zu sein, genügt. $g(xy)$ enthält $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Const; die Zahl der Doppel u. gewöhnl Spitzen sei d; dann bleiben

$\rho = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$ willk Const in $F(x'y')$. Dass mindestens so viele bleiben müssen, davon kann man sich auch unmittelbar überzeugen; denn ist $f(x'y')$ ein I $F(x'y')$ so genügt auch $f + H(x')$ allen Beding. Über diese ρ Const werden wir unten so verfügen, dass F an ρ vorgeschriebenen Stellen $x_1 y_1 \ldots x_\rho y_\rho$ Null wird, dass also die ρ Gl bestehen

$$f(x_\alpha y_\alpha) + H(x_\alpha y_\alpha) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots \rho).$$ Nun war $H(x'y') = c_1 H(x'y')_1 + \ldots + c_\rho H(x'y')_\rho$. Die $c_1 \ldots c_\rho$ bestimmen sich nun aus den ρ Gl.

Für die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Const in $g(x'y')$ haben wir d lineare Bed Gl. Durch Auflös derselben können wir also d Const durch die übrigen ρ ausdrücken; diese, welche ganz willkürl bleiben, seien $l_1, l_2 \ldots l_\rho$. Jede Const von $g(x'y')$ wird dabei die Gestalt annehmen

$$\Sigma k_i \left(\frac{G(a_i b_i, y)}{a_i - x} - \frac{G(a_i b_i, y_0)}{a_i - x_0} \right) + L_1 l_1 + \ldots + L_\rho l_\rho$$

wo die k_i u ebenso die L ganz bestimmte Gr sind, die sich aus den Coord der $a_i b_i$ in Form von Det zusammensetzen. Ordnet man $g(x'y')$ nach den $l_1, l_2, \ldots$ so wird

$$g(x'y') = g_0(x'y', xy) - g_0(x, x_0) + l_1 g^{(1)}(x'x') + l_2 g^{(2)}(x'y') + \ldots$$

dann ist ferner

$$F(x'y') = \frac{G(x'y';y)}{(x'-x)G(x'y')_2} - \frac{G(x'y';y_0)}{(x'-x_0)G(x'y')_2} + \frac{g_1(x',x)-g_1(x'x_0)}{G(x')_2} + \frac{E(x'y')}{G(x'y')_2}$$

$g_1(x'x) - g_1(x'x_0)$ ist eine $F\,g(x')$; denn der allgemeine Ausdruck für $g(x')$ geht ja in jene F über, wenn man die $b_1 .. b_\varrho = 0$ setzt. $E(x'y')$ enthält die $b_1 .. b_\varrho$ lin u homog. Für eine Doppstelle werden die Summen der drei ersten Posten, sowie $E(x'y')$ für sich singulär verschwinden; wenn wir daher $E(x')$ eine ganz beliebige F $n-3$ten Gr bedeuten lassen, so wird die durch eine Dopp Stelle gelieferte Bed $E(a,b)=0$.

Wir gehen aber lieber wieder auf die ursprüngl Form zurück:

$$F(x'y') = \frac{G(x'y';y)}{(x'-x)G(x'y')_2} - \frac{G(x'y';y_0)}{(x'-x_0)G(x'y')_2} + \frac{E(x'y')}{G(x'y')_2}$$

wo E eine F vom Gr $n-3$ der Beschaffenheit ist, dass

$$\frac{G(a,b;y)}{a-x} - \frac{G(a,b;y_0)}{a-x_0} + E(a,b) = 0$$

für alle Doppelstellen $(ab) = (a'b')(a''b'') .. (a^{(d)}b^{(d)})$

Um F völlig zu bestimmen, setzen wir fest, dass es an ϱ Stellen $x_1 y_1 .. x_\varrho y_\varrho$ verschwinden soll, also dass

$$\frac{G(x_\alpha y_\alpha;y)}{(x_\alpha - x)} - \frac{G(x_\alpha y_\alpha;y_0)}{(x_\alpha - x_0)} + E(x_\alpha y_\alpha) = 0. \quad (\alpha = 1,2..\varrho)$$

Alle Coeff in $E(x'y')$ sind bestimmt. Schreiben wir ab

$$E(xy) = \sum_{\lambda+\mu \leq n-2} E_{\lambda\mu}\, x^\lambda y^\mu.$$

Wir könnten nun die $E_{\lambda\mu}$ aus den Bedingung bestimmen, doch wollen wir unmittelbar das Resultat in det Form angeben.

Wir bezeichnen zur Abkürzung $x^{\lambda}y^{\mu}$ für die verschiedenen Werthe in irgend einer Anordnung mit $(x)_1, \ldots (x)_{\rho+d}$ u. so kann $f(xy, x'y')$ gleich einer Det. welche, nach den Gliedern der ersten Horizontalreihe geordnet die Gestalt

$$D_0 \frac{G(x'y'y)}{x'-x} + \sum_{\lambda=1}^{\rho+d} D_\lambda (x'y')_\lambda$$

hat, wo D_0 weder x', y' noch x, y enthält u. $\sum_{\lambda=1} D_\lambda (x'y')_\lambda$ eine ganze F. von $x'y'$ vom Grade $n-3$ ist. Wir setzen nämlich

$$\left|\begin{array}{cccc} \frac{G(x'y'y)}{x'-x} & (x')_1 & \cdots & (x')_{\rho+d} \\ \frac{G(x_1 y_1 y)}{x_1-x} & (x_1)_1 & \cdots & (x_1)_{\rho+d} \\ \cdots & & & \\ \frac{G(x_\rho y_\rho y)}{x_\rho-x} & (x_\rho)_1 & \cdots & (x_\rho)_{\rho+d} \\ \frac{G(a'b'y)}{a'-y} & (a')_1 & \cdots & (a')_{\rho+d} \\ \cdots & & & \\ \frac{G(a^{(d)}b^{(d)}y)}{a^{(d)}-y} & (a^{(d)})_1 & \cdots & (a^{(d)})_{\rho+d} \end{array}\right| = f(xy, x'y')$$

die F.

$$\frac{f(x_1 x') - f(x_0, x')}{D_0 G(x'y')_2}$$

hat nun die Gestalt von $F(x'y')$. Wir haben uns also nur noch zu überzeugen, ob sie an den erforderl. Stellen 0 wird. Aber die Det. verschwindet identisch für jeden der Punkte $x_1y_1 \ldots x_\rho y_\rho$ ebenso für die a, b, der ja x, y unbestimmt bleiben. Folglich

$$F(x'y') = \frac{f(x_1, x') - f(x_0, x')}{D_0 G(x'y')_2}$$

denn es war ja eine ganze F. von x', y' dadurch völlig bestimmt, daß sie an den Stellen $x'y'$ und x_0y_0 ∞ wird wie $\frac{1}{x'-x}$ u. $-\frac{1}{x-x_0}$, dagegen für irgend ein anderes Paar in der Entwickl von $F(x'y')\frac{dx}{dt}$ keine negat Pot von t vorkommen, u daß sie an ρ Stellen verschwindet $x_1y_1 \ldots x_\rho y_\rho$

Wir betrachten jetzt $F(x'y')$ als F von x u y.

$f(xy, x'y')$ wird ∞ für $x=x'$, $y=y'$ u zwar wie $\frac{1}{x-x'}$. Ferner wird $f(x,x')$ ∞ für $xy = x_1y_1 \ldots x_\rho y_\rho$ von der Ordnung 1.

Ferner könnte die Fct noch ∞ werden für $xy = a'b', \ldots$

Aber in Wirklichkeit wird $G(a'b',y) : (a'-x)$ hierfür nicht ∞ denn wenn x, y das F F ist, das die Umgebung von a', b' darstellt, so wird

$$G(a', b', y) = G(a'b')_2 + (y-b')\,P(y-b')$$

Nun ist $G(a'b')_2 = 0$ weil $a'b'$ ein Verzw.pkt ist; es sind nun 2 Fälle zu unterscheiden. Entweder ist $x = a' + gt$, $y = b' + ht$, so daß t im Zähler u Nenner sich forthebt, oder es ist $x = a' + gt^2 + \ldots$ $y = b' + ht^2 + \ldots$ wo dann auch für $t=0$ jener Quotient nicht ∞ wird. Allerdings könnte $g=0$ sein, aber dies macht keine Ausnahme; man muß dann noch weiter nach Pot von $x-a'$ u $y-b'$ entwickeln u $G(a'b'y)$ näher betrachten; aber wir werden dies gleich noch anders ausschließen.

$f(x, x')$ ist also eine F die an $\rho+1$ Stellen $x'y', x_1y_1 \ldots x_\rho y_\rho$ ∞ wird von der ersten Ordn. Nun könnte dies F noch für ∞ Werthe von x ∞ werden, doch ist dies nicht der Fall. Ordnet man die Fct nach der ersten Variabl R, so ist der Ausdruck auf einen gemeinsch Nenner $(x-x')(x-x_1)\ldots(x-x_\rho)$

zu bringen; der Zähler fängt, wenn man für y die Entw nach x setzt mit einer Pot von x an, die nicht $> \rho+d+1$ ist, so daß also die Det nicht ∞ wird. Doch kann man dies aus dieser Form nicht unmittelbar erkennen; wir gelangen auf andere Weise dazu.

Ist das wirklich der Fall, so haben wir hier eine Fun x, y die an $\rho+1$ willkürl gewählten Stellen von der ersten Ordn ∞ wird; wir müssen sie also auch mit Hülfe der F $H(x,x')$ erhalten, deren Existenz wir ja kennen. Wir versuchen nun wirklich aus der H F bilden u uns überzeugen, daß wir genau dieselbe F $f(x,x')$ erhalten. Wir denken uns eine F $H(x,x')$ mit der einzigen Einschränkung gebildet, daß wir die ausgezeich Stelle unterscheiden von $x'y'$, $x_1y_1 \dots x_\rho y_\rho$ müssen. Dann muß jene F die Gestalt haben:

$$c_0 + H(x,x') - c_1 H(x_1, x_1') - \dots - c_\rho H(x, x_\rho)$$

oder auch

$$H(x,x') - H(x_0,x') - \sum_\alpha c_\alpha \left(H(x,x_\alpha) - H(x_0,x_\alpha)\right)$$

die c sind so zu bestimmen, daß dieser Ausdruck an der ausgez St nicht mehr ∞ wird. Es muß also sein

$$H(x'y')_\beta - \sum c_\alpha H(x_\alpha)_\beta = 0. \qquad (\beta = 1, 2 \dots \rho).$$

die Det ist im allgem nicht Null, so daß wir für die c_α lin F der $H(x')_\beta$ erhalten, so daß also jedes c selbst eine F $\bar{H}(x'y')_\alpha$ ist. Dann ist unsere F

$$H(x,x') - H(x_0,x') - \sum_\alpha \left(H(x,x_\alpha) - H(x_0,x_\alpha)\right) \bar{H}(x')_\alpha$$

diese F ist mit $F(x'y')$ identisch. denn sie besitzt als F von $x'y'$ alle Eigenschaften die $F(x'y')$ vollständig bestimmen, denn sie wird ∞ an den Stellen xy u. $x_0 y_0$ wie $\frac{1}{x'-x}$ resp. $-\frac{1}{x'-x_0}$; für irgend ein anderes Paar kommen in der Entw. von der mit $\frac{dx'}{dt}$ multipl. F. keine neg. Pot. von t vor, da auch an den Verzw.punkten t^{-1} sich weghebt. Endlich verschw. die F. für $x_1 y_1 \ldots x_\rho y_\rho$ denn es ist

$$H(x')_\beta = \sum_0 \bar{H}(x')_\alpha H(x_\alpha)_\beta$$

also $\quad \bar{H}(x_\alpha)_\alpha = 1 \,, \quad \bar{H}(x_\alpha)_\beta = 0 \quad \beta \gtrless \alpha$, da jeg. L.

$$H(x')_1 \begin{vmatrix} H(x_1)_1 & \cdots & H(x_\rho)_1 \\ \cdots & & \cdots \\ H(x_1)_\rho & \cdots & H(x_\rho)_\rho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H(x')_1 & H(x_2)_1 & \cdots & H(x_\rho)_1 \\ \cdots & & & \\ H(x')_\rho & H(x_2)_\rho & \cdots & H(x_\rho)_\rho \end{vmatrix}$$

also $\bar{H}(x_1)_1 = 1$, $\bar{H}(x_\lambda)_1 = 0 \quad \lambda > 1$.

Nachdem so die Identität beider Bildungsweisen gezeigt ist, ist zugleich die obige Schwierigkeit beseitigt, daß $F(x'y')$ vielleicht an den Doppelpt. oder im Unendl. ∞ sein könnte. Die F. $F(x'y')$, die alg. F. von x, y wird ist u. von der ersten Ordn. ∞ wird an $\rho+1$ endlichen nicht sing. Pten $x'y'$, $x_1 y_1 \ldots x_\rho y_\rho$ ist die in früheren Sätzen gebrauchte $\bar{H}(x, x')$-F. Diese F. liefert dieselben F. die nur an einer St. ∞ werden.

Wir bezeichnen die gefundenen F. mit

$$\bar{H}(x, x') = H(x, x') - H(x_0, x') - \sum_\alpha \big(H(x, x_\alpha) - H(x_0, x_\alpha)\big) \bar{H}(x')_\alpha$$

Wir betrachten nun eine bel. St. $a_0 b_0$, die von dem ausgez. Pt., wie von $x_1 y_1 \ldots x_\rho y_\rho$ verschieden sein soll. $\bar{H}$ ist ganz unabh. von der ausgez. Stelle, da sie in der ersten Bildungsweise gar nicht u. daher in der zweiten nur scheinbar vorkommt. $x_1 y_1$ mögen die Umgeb. von $a_0 b_0$ darstellen.

$$-\bar{H}(x,x')\frac{dx_\tau}{d\tau} = \sum_\varrho H(x,a_0)_\varrho \tau^\varrho - H(x_0,x') + \sum_\alpha \left(H(x,x_\alpha) - H(x_0,x_\alpha)\right) \bar{H}(x_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

$H(x,a_0)_\varrho$ würde nur ∞ an der Stelle $a_0 b_0$ und an den ausgezeichneten St. Für $a_0 b_0$ kann $t^{-\varrho-1}$ vor; die anderen Glieder werden für $a_0 b_0$ nicht ∞. Die ausgezeichneten St. können nicht in Betracht kommen, da sie links nicht vorkommen. Wir setzen nun auch

$$\bar{H}(x,x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = -\sum_\varrho \bar{H}(x,a_0)_\varrho \tau^\varrho$$

dann ist $\quad \bar{H}(x_t,a_0)_\varrho = t^{-\varrho-1} + \mathfrak{P}(t)$.

An der St. $x_\alpha y_\alpha$ wird nicht nur $H(x,x_\alpha)$ ∞. Wir haben daher eine F. $\bar{H}(x_t,a_0)_\varrho$ die an der St. $a_0 b_0$ von der Ordnung ϱ ∞ wird und außerdem nur an den St. $x_1 y_1 \dots x_\varrho y_\varrho$ ∞ werden kann von der ersten Ordn. Statt $\bar{H}(x_\tau y_\tau, a_0 b_0)_\varrho$ setzen $\bar{H}(x)_\varrho$.

Sei nun $\quad \Phi(xy) = c_0 \bar{H}(x)_0 + c_1 \bar{H}(x)_1 + \dots + c_{r-1} \bar{H}(x)_{r-1}$

so wird Φ für $a_0 b_0$ ∞ gar; ferner für $x_1 y_1 \dots x_\varrho y_\varrho$. Durch Bestimmung der c lässt sich letzteres beseitigen. Sei

$$\left[\bar{H}(x_\tau y_\tau)_\lambda \frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^\varrho} = e_{\varrho,\lambda} \qquad (\lambda = 1,2,\dots \varrho)$$

so sind die Bed. $\quad 0 = c_0 e_{0\lambda} + c_1 e_{1\lambda} + \dots + c_{r-1} e_{r-1,\lambda}$.

Im allgemeinen sind diese Gl. nur erfüllbar, wenn $r \geqq \varrho+1$. Man untersucht: giebt es F. für $r < \varrho$ und findet für besondere Stellen auch hier vielleicht derartige.

Die Bildung von $\bar{H}(x,x')$ hat, wie ersichtlich, gar keine Schwierigkeiten, vermuthlich ist sie unmittelbar gemacht, wenn keine Doppelpunkte vorhanden sind. Aus ihr sind dann $\bar{H}(x_t,a_0)_\varrho$ abzuleiten, aus denen sich Φ linear zusammensetzt. Um dann aber die Coeff. $c_0 \dots c_r$ zu bestimmen, haben wir besondere F. $\bar{H}(x_\tau)$ benutzt, welche durch die Bed. charakterisirt sind

$\overline{H}(x_\alpha)_\beta = 1\,,\ \beta=\alpha\ ;\ =0\ \ \beta \gtrless \alpha.$

Von dieser Beschränkung werden wir uns jedoch gleich befreien u. zeigen, daß wir bel. ρ F. $\overline{H}(x_\tau)$ brauchen können.

Zunächst bemerken wir, daß die oben mit $f(x,x')$ bezeichnete Det. in Bezug auf $a'b', \ldots a^{(\alpha)} b^{(\alpha)}$ symm. ist. Nun werden die Coord. dieser Pkt. durch Auflös. einer Gl. gefunden, deren Grad $= \alpha$ ist. Da die Det. rat. u. sym. in den Wurzeln ist, so wird sie sich rat. durch die Coeff. jener Gl. ausdrücken, so erhält man alles rat. Dies kann man schon daraus schließen, daß es nur eine F. $f(x,x')$ giebt; denn wäre die Det. algebr. in den Coeff. jener Gl. so gäbe es mehrere F.

Wir geben $\overline{H}$ u. $\overline{H}_\rho$ u. noch eine andere Form, indem wir statt $x_0\, y_0$ dafür $a_0\, b_0$ setzen

$$\overline{H}(x,x') = H(x,x') - \sum_\alpha \overline{H}(x')_\alpha\, H(x,x_\alpha) + Ct$$

$$\overline{H}(x,a_0)_\mu = H(x,a_0)_\mu + \sum_\alpha \left[H(x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau_0} \cdot H(x,x_\alpha) + Ct.$$

Wir gehen nun zur Betrachtung unseres Systems von Bedgl. für die $c_0, \ldots c_r$ über. Aus ihnen u. mithin aus der Bildungsw. von $\Phi(xy)$ ist alles verschwunden, was sich auf die unbekannte F. $H(x,x')$ bezieht, die gebildet ist für eine nicht weiter bezeichnete ausgez. Stelle. Denn $\overline{H}(x)_0 \ldots \overline{H}(x)_\rho$ sind ganz unabh. von ihr, u. die Bedingl. sind von ihr unabh., weil die Coeff. c aus den F. $\overline{H}(x_\tau)_\alpha$ gebildet werden, welche letztere mit $H(x,x')$ in keinem Zusammenh. stehen, sondern dadurch völlig bestimmt sind:

$\overline{H}(x_\alpha)_\beta = 1,\ \beta=\alpha\ ;\ =0, \beta \gtrless \alpha.$

die Gl für die $c_0, \ldots c_{r-1}$ lauteten $c_0 e_{0\lambda} + c_1 e_{1\lambda} + \ldots + c_{r-1} e_{r-1,\lambda} = 0$; sie können unbed. erfüllt werden, wenn $r > \rho$, ohne dass alle c 0 werden. Aber daraus folgt noch nicht, dass notwendig eine F existirt, die an $a_0 b_0$ allein ∞ wird von der Ordn. r, denn es könnte c_{r-1} sich 0 ergeben auch wenn $r = \rho + 1$, so dass im letzteren Falle eine F existirt, die vom Grade ρ höchstens ist. Im allgemeinen, wenn wir $a_0 b_0$ nicht aus einer Reihe ganz specieller W[erte] wählen, wird eine F vom Grade ρ höchstens nicht möglich sein. Denn dazu muss $|e_{\lambda\mu}| = 0$, ($\lambda = 0, \ldots \rho-1$, $\mu = 1 \ldots \rho$). Die e hängen von $a_0 b_0$ ab; für specielle $a_0 b_0$ kann also die Gl befriedigt werden, diese finden wir indem eben jene Det als F von $a_0 b_0$ aufgefasst $= 0$ gesetzt wird.

Zur Bildung der Bed Gl für die c haben wir ein bestimmtes S[ystem] F $\bar{H}(x)_\alpha$ genommen. Aber jedes System von ρ F $H(x)$ ist eben so gut zu gebrauchen. Denn es seien ρ bel H F gegeben,

$$H(x)_\beta = \sum_\alpha c_{\alpha\beta} \bar{H}(x)_\alpha;$$

wir denken uns die e auch für die neuen F gebildet und mit E bezeichnet; dann ist $E_{\lambda\mu} = \sum_\alpha c_{\alpha\mu} e_{\lambda\alpha}$

Aus der Gl für die c folgt nun unmittelbar

$$\sum_0^{r-1} E_{\lambda\beta} c_\lambda = 0 \qquad \beta = 1, 2, \ldots \rho.$$

Für die E gelten also dieselben Gl u umgekehrt.

Handelt es sich nun darum alle F herzustellen, die nur an der Stelle $a_0 b_0$ ∞ werden, u namentlich diejenigen festzustellen, die fehlen, so hat man mit dieser Gl so zu verfahren, dass man $r = 1, 2, \ldots$ setzt u untersucht, ob die Bed erfüllbar sind; dadurch erhält man $k_1, k_2 ..$ Durch nächste brauchen wir aber nur, daß eine Lösung der Aufgabe al- gebr. möglich ist. Dann können wir auch die F $H(x,x')$ bilden, welche in $x'y'$ von der ersten Ordn. ∞ wird u. sonst nur noch an den ausgez. Stelle. Wir denken uns die Zahlen $k_1, k_2 ..$ ermittelt u. haben dann zu setzen $\bar{H}(x,x') = H(x,x') + \sum_k c_k \bar{H}(x,a_0)_k$. Wir brauchen dabei nur so die c_k zu bestimmen, daß die F an den Stellen $x_1y_1 .. x_\varrho y_\varrho$ nicht mehr ∞ wird. Dies giebt die Bedingg. $\sum c_k c_{k\alpha} = \bar{H}(x')_\alpha$. Da wir wissen, daß die gesuchte F exi- stiert, so ergeben sich daraus die c_k.

Für die meisten Zwecke reicht man mit $\bar{H}(x,x')$ aus, in der ϱ willkürl. Stellen vorhanden sind, namentlich um F zu be- stimmen, die in vorgeschriebenen Weise ∞ u. 0 werden.

Die Aufgabe: die einfachste Gl zu finden, durch die eine gegebene Gl ersetzt werden kann – hängt damit zusammen, diejenigen Gl vom Geschlecht ϱ zu bilden, aus denen alle derartigen abgeleitet werden können.

Wir behandelten die Fälle $\varrho = 1, 2, 3$. $\varrho = 5$ giebt schon weitläufige Rechnungen, es läßt sich aber erledigen u. es scheint, als ob die Methode allgemein durchführbar ist.

Wir gehen von der Bemerkung aus, daß es F von x u. y giebt, die nur an einer ausgez. St ∞ werden von der Ordnung ϱ oder einer niedrigeren. Bei $\varrho = 1$. Hier findet eine Ausnahme statt; die niedrigste vorkommende F ist von der Ord 2. Man sieht dies auch aus der Det., die jene Stelle giebt, wo eine Sp. der Ordn. existirt; dieselbe ist nämlich ≡ 1, kann also nicht 0 werden. Ausser 1 darf aber kein anderer Grad fehlen, also existiren an jeder Stelle F. 2, 3, .. Grades. Seien ξ_2, ξ_3 solche zwei F, der Ord 2 u 3. Man kann nun Const a, b.. so bestimmen, daß

$$\xi_3^2 - a\xi_2^3 - b\xi_2\xi_3 - c\xi_2^2 - d\xi_3 - e\xi_2 - f = 0$$

denn wir brauchen nur ξ_2 u ξ_3 an irgend einer Stelle nach Pot. von t zu entw. u a, b .. so zu bestimmen, daß die $t^{-6}, .. t^{-2}$ herausfallen. Da es nun keine F erster Ordnung giebt, so muß der Ausdruck eine Const sein. Die Gl ist

$$\xi_3^2 - (b\xi_2 + d)\xi_3 = a\xi_2^3 + c\xi_2^2 + e\xi_2 + f$$

Setzen wir $\xi_3 - \frac{1}{2}(b\xi_2 + d) = \eta$ so wird

$$\eta^2 = a\xi_2^3 + c'\xi_2^2 + e'\xi_2 + f'$$

d. h. es giebt eine Gl dieser Form, die alle Gebilde vom R 1 darstellt, da ja alle F $\xi_2, \xi_3, \dots$ sich rat durch η u ξ_2 ausdrücken. Denn wir können jede Gl vom Rg 1 durch die rat Transf $\xi_2 \xi_3$ in eine Gl zwischen ξ_2 u ξ_3 umformen. Wir setzen $\xi_2 = \alpha\xi + \beta$

u bestimmen α u β so daß $a\alpha^3 = 4$, $3a\alpha^2\beta + c'\alpha^2 = 0$.

Dann lautet die Gl $\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3$.

Man kann noch eine Const wegbringen. Setzen wir:

$$\eta = m\bar{\eta}, \quad \xi = n\bar{\xi} \quad \text{so wird}$$

$$\bar{\eta}^2 = \frac{4n^3}{m^2}\bar{\xi}^3 - g_2\frac{n}{m^2}\bar{\xi} - \frac{g_3}{m^2} \qquad g_2\frac{n}{m^2} = \frac{g_3}{m^2}, \; n = \frac{g_3}{g_2}$$

$$\bar{\eta}^2 = 4\bar{\xi}^3 - \bar{g}(\bar{\xi} + 1)$$

Dies hat nur den Nachtheil, daß der Fall $g_2 = 0$ ausgeschl. ist.

Sei nun $\rho = 2$.
Dann nun giebt es stets eine F vom Grade ρ.
Eine solche ersten Gr. fehlt, die zweiten Gr. wird im allgemeinen auch fehlen. Aber wir wählten die ... Stelle so, daß eine F zweiter Gr. besteht. Dann muß an dieser St. dafür nothwendig ein anderer Gr. fehlen. Wir wissen, daß von irg. einer St. ab alle vorkommen; käme außer 2 auch 3 vor, so könnten wir alle übrigen aus ihnen zusammensetzen, folglich fehlt 3. Würde man nun ξ_2 u. ξ_4 aufnehmen, so könnte man nicht nachweisen, daß die Gl. zwischen ihnen irred ist, u. man könnte auch wirklich nicht alle F aus ihnen zusammensetzen. Dies findet bei der Wahl von ξ_2 u. ξ_5 statt.

$$\xi_5^2 - a\xi_2^5 - b\xi_5\xi_2^2 - c\xi_2^4 - d\xi_5\xi_2 - e\xi_2^3 - f\xi_5 - g\xi_2^2 - h\xi_2 - i = 0$$

$$\left(\xi_5 - \tfrac{1}{2}[b\xi_2^2 + d\xi_2 + f]\right)^2 = R(\xi_2)$$

$$\eta^2 = 4\xi^5 + g_1\xi^3 + g_2\xi^2 + g_3\xi + g_4.$$

Ferner sei $\rho = 3$.
$\eta^2 = 4\xi^7 + \ldots$ wird hier nur ein sehr specieller Fall werden.
Es sind mehrere Fälle zu unterscheiden.
1) ξ_2 existirt nicht. Dann existirt sicher ξ_3. Weiter könnten
a) $\xi_3, \xi_5, \xi_6, \xi_7 \ldots$ vorkommen.
Wir nehmen die niedrigste F ξ_3 u. die nächste, deren Gr. relativ prim ist, ξ_5; ziehen wir ξ_7 zu Hülfe, so können wir alle F darstellen

$$\xi_5^2 = a\xi_3\xi_7 + b\xi_3^3 + c\xi_3\xi_5 + d\xi_7 + e\xi_3^2 + f\xi_5 + g\xi_3 + h$$

oder
$$\xi_5^2 = \alpha_1\xi_7 + \beta_1\xi_5 + \gamma_1$$
wo α, β, γ unbekannte F wie x_3 von vorgeschriebenem Gr sind. Ebenso läßt sich nun darstellen
$$\xi_5\xi_7 = \alpha_2\xi_7 + \beta_2\xi_5 + \gamma_2,$$
$$\xi_7^2 = \alpha_3\xi_7 + \beta_3\xi_5 + \gamma_3.$$
Die Gr der F α, β, γ sind höchstens
$$\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1, \gamma_1 = 3;\ \alpha_2 = 1, \beta_2 = 2, \gamma_2 = 4;\ \alpha_3 = 3, \beta_3 = 3, \gamma_3 = 4.$$
Wir haben hier mehrere F gebraucht u müssen also eliminieren. Dann bekommen wir Gl in ξ_3 u ξ_5; es kommt nun darauf an die α, β, γ zu bestimmen. Dazu bilden wir die Gl
$$\xi_5^2\xi_7 = \xi_5\xi_7 \cdot \xi_5 \quad ; \quad \xi_7^2\xi_5 = \xi_5\xi_7 \cdot \xi_7$$
dann erhalten wir Relationen unter den α, β, γ. Jeder Ausdr kann nämlich nur auf eine Weise in die Form $\alpha\xi_7 + \beta\xi_5 + \gamma$ gebracht werden. Denn ließe er sich auf zweifache Weise so darstellen, so würde die Diff identisch Null werden; dies ist aber nur möglich, wenn die einzelnen Coeff ident 0 sind. Wenn nämlich $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ den Gr der Coeff angeben, so haben, wenn man nach Pot von t entwickelt die Anfangsglieder den Grad $3\varepsilon+7, 3\varepsilon'+5, 3\varepsilon''$ können sich also nicht gegen einander heben. Bilden wir nun aus den 3 aufgestellten Gl in der angegebenen Art zwei neue Gl in denen auf beiden Seiten solche Ausdrücke stehen, so können wir die einzelnen Coeff einander gleich setzen. Die Rechnung wird dadurch vereinfacht, daß man $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ setzen darf. Denn die zw Gl heißt
$$(\xi_5 - \alpha_2)(\xi_7 - \beta_2) = \gamma_2 + \alpha_2\beta_2 ;$$

Wir brauchen also nur $\xi_5-\alpha_2$, $\xi_7-\beta_2$ statt ξ_5 resp ξ_7 einzuführen. Dann ist

$$\xi_5^2\xi_7 = \alpha_1(\alpha_3\xi_7+\beta_3\xi_5+\gamma_3)+\beta_1\gamma_2+\gamma_1\xi_7$$
$$= (\alpha_1\alpha_3+\gamma_1)\xi_7+\alpha_1\beta_3\xi_5+\alpha_1\gamma_3+\beta_1\gamma_2 = \gamma_2\xi_5$$

also $\alpha_1\alpha_3+\gamma_1=0 \qquad \alpha_1\beta_3-\gamma_2=0 \qquad \alpha_1\gamma_3+\beta_1\gamma_2=0$

oder $\gamma_1=-\alpha_1\alpha_3 \qquad \gamma_2=\alpha_1\beta_3 \qquad \gamma_3=-\beta_1\beta_3$.

Die zweite Gl giebt genau dieselben Relationen. $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3$ bleiben also, bis auf die obige Gr Bestimmung willkürlich.

Eliminiren wir jetzt ξ_7 aus den beiden ersten Gl, so wird

$$\xi_5^3 = \alpha_1\gamma_1+\beta_1\xi_5^2+\gamma_1\xi_5 \quad \text{oder}$$
$$\xi_5^3-\beta_1\xi_5^2-\gamma_1\xi_5-\alpha_1^2\beta_3=0$$

die Normalgl. dieser Form war vorher nicht bekannt.

Bisher hatten wir so geschlossen: Wenn es für $\rho=3$ eintritt, daß für irgend eine [illegible] ξ_3, ξ_5, ξ_7 existiren, so muß diese Gl bestehen; außerdem muß $\xi_7=\gamma_2 : \xi_5 = \alpha_1\beta_3 : \xi_5$ sein.

Wir zeigen nun, daß auch alle Bed erfüllt werden, die wir an eine Normalgl gestellt haben; vor allem aber, daß eine solche Gl auch wirklich vom Range $\rho=3$ ist, beziehungsweise [illegible] wir die Bed, unter der dies eintritt, ab. Wir zeigen daß ξ_5 nur ∞ wird, wenn ξ_3 ∞ ist, u daß es ein Verzweigungs[illegible] giebt. Es muß sein

$$\xi_3=c_0t^{-3}+\dots, \quad \xi_5=c_1t^{-5}+\dots, \quad \xi_7=c_2t^{-7}+\dots$$
$$\xi_3=\xi, \quad \xi_5=\eta; \qquad \eta=e_1\xi^{\frac{5}{3}}+e_2\xi^{\frac{4}{3}}+\dots$$

Wir untersuchen ob dies stattfindet.

$$\eta^3-(g\xi+h)\eta^2+(g_1\xi+h_1)(g_2\xi^2+k_2\xi+h_2)\eta-(g_1\xi+h_1)^2(g_3\xi^3+k_3\xi^2+k_3'\xi+l_3)=0$$

Damit man nun eine solche Entwickl. bekommt, muss man neu setzt $\eta = \eta_1 \xi^{\frac{5}{3}}$ u. $\xi^{-\frac{1}{3}} = u$ sein, $\eta_1 = \mathfrak{P}(u)$ wo $\mathfrak{P}$ mit einem const. Anfangsgl. beginnt. Die Gl. geht durch diese Subst. über in

$$0 = \eta_1^3 \xi^5 - (g_0 \xi + k_1)\eta_1^2 \xi^{\frac{10}{3}} + (g_0 \xi + k_2)(g_2 \xi + \dots)\eta_1 \xi^{\frac{5}{3}} - (g_0 \xi + \dots)^2 (g_3 \xi^3 + \dots)$$

$$\eta_1^3 - (g_0 \xi^{-\frac{2}{3}} + \dots)\eta_1^2 + (g_0 g_2 \xi^{-\frac{4}{3}} + \dots)\eta_1 - (g_0^2 g_3 + \dots) = 0$$

oder $\eta_1^3 + u f_1(u)\cdot \eta_1^2 + u f_2(u)\eta_1 - (g_0^2 g_3 + u f_3(u)) = 0.$

f_1, f_2, f_3 sind Pot.R. Wir suchen die Gl. unter der Voraussetzung sehr kleiner u zu lösen. Wir müssen erhalten:

$\eta_1 = k_0 + k_1 u + \dots$ wo $k_0 \neq 0$ ist. Setzen wir dies ein, so wird $k_0^3 = -g_0^2 g_3$; also darf weder g_0 noch $g_3 = 0$ sein. Ist dies umgekehrt der Fall, so erhalten wir wirklich für große ξ eine Pot.R. für η die nach $\xi^{\frac{1}{3}}$ fortschreitet u. mit $\xi^{\frac{5}{3}}$ beginnt, so dass also wirklich im Unendl. nur ein [illegible] ist. Ferner existiert eine F. ξ_3^{ξ} u. ebenso ξ_5; ξ u. η selbst sind ja solche. Nun müsste noch eine F. ξ_7^{ξ} existieren; sie erscheint in Bruchform, ξ_7^{ξ} könnte noch ∞ werden, wenn $\xi_5^{\xi} = 0$ ist. Dies ist aber nicht der Fall. Eliminieren wir nämlich ξ_5^{ξ} aus der zw. u. dritt. Gl. so erhalten wir $\xi_7^{\xi\,3} = \alpha_3 \xi_7^{\xi\,2} + \beta_3 \gamma_2 + \gamma_3 \xi_7$; da der Coeff. der höchsten Glieder 1 ist u. die übrigen Coeff. ganze F. von ξ_3^{ξ} sind, so wird ξ_7^{ξ} nur dann ∞, wenn ξ_3^{ξ} ∞ ist, also nur an der einen St. des unendl. fernen Elem. Außerdem ist noch $\xi_7^{\xi} = \gamma_2 : \xi_5^{\xi}$; ξ_7^{ξ} ist eine rat. F. von ξ_3^{ξ} u. ξ_5^{ξ}; es existiert also wirklich eine F. 7ten Gr., u. in der That fängt die Entw. mit $t^{-12} : t^{-5} = t^{-7}$ an.

Setzt man also $\eta^3 - \beta_1 \eta^2 + \alpha_1 \alpha_3 \eta - \alpha_1^2 \beta_3 = 0$

wo $\alpha_1 \beta_1 \alpha_3 \beta_3$ ggF. F. von ξ sind u. zwar von den Gr. 1, 2, 2, 3 so hat das, durch diese Gl definirte Gebilde nur ein ∞ fernen Pkt u. es gibt F vom 3, 5, 7 Gr, welche nur für diesen Pkt ∞ werden; die erste ist die F ξ; denn wenn man ξ u. η durch t ausdrückt, so muss man setzen $\xi = t^{-3}$, denn erst ist η durch t eindeutig aus zu drücken. Eine F vom Gr 5 ist η u. ξ_7 ist $\alpha_7\beta_3 : \xi_5$.

Wenn wir nun irg. eine andere F von einem höheren Gr als 7 herstellen wollen, so ist sie, da eine solche Zahl stets in der Form 3λ, $3\lambda+5$, $3\lambda+7$ ausdrückbar ist, herstellbar. Weiter lässt sich nachweisen, dass F vom Gr 1, 2, 4 fehlen: folglich ist wirklich $\rho = 3$.

Wir haben angenommen, dass die Gl irreducibel sei; das ist noch nachzuweisen; hier liegt es schon in der Form derselben. Da der Gr eine Primz ist, so wäre, wenn die Gl reducibel wäre, η selbst eine ganze F; aber im ∞ hat sie gebrochenen Fort. Dieser Irreducib. Beweis gilt auch für die folgenden Fälle. Um überhaupt den Vortheil dieser Normalform zu zeigen, denke man sich, dass man eine Gl hätte, so dass für grosse ξ

$\eta = P(\xi^{-\frac{1}{n}})$, wo n der Gr der Gl in η sei; ferner sei die Gl so beschaffen, dass wirklich alle n Fort R verschieden sind, dass die Zähler keinen gemeinsch Theiler mit n haben. Wenn nun die Gl reducibel wäre, so würde sie in 2 Gl $(\xi, \eta) =$ zerfallen. Setzen wir nun für η seine Entw ein, so muss, wenn ξ so gross genommen wird, dass die Reihe convergirt, der Prod 0, also einer der Fact 0 sein; es müssen alle Zweige der Fort R, die wir durch Einsetzen der Entw von η in eine Fact erhalten, 0 sein; der Punkt wechselt also für alle n solche R in denen je nur statt ξ die Form aus ξ u einer Einheits Multipl steht; dies ist aber nicht möglich, da der Pkt von niedrigerem Grade sein sollte. Also bei dieser Transf der Gl, wo das Gebilde im Unendl nur ein Blatt hat, steht die Form immer von selbst fest.

Wir betrachten nun die Gl, um die Zahl der wesentl Konst zu ermitteln. Wir dürfen ξ mit einer bel Konst multipl u eine Konst addieren; also dürfen wir $h_1=0$, $g_1=1$ voraussetzen.

$$\eta^3-(\alpha\xi+\beta)\eta^2+\xi(\gamma\xi^2+\delta\xi+\varepsilon)\eta-\xi^2(\zeta\xi^3+\vartheta\xi^2+\kappa\xi+\lambda)=0.$$

Wir können noch 3 Konst wegbringen, indem wir setzen

$\eta=a\eta'+b\xi+c$, wo dann η' wieder vom Gr 5 ist.

Die Gl enthält also 6 wes Konst.

Man kann auch die ursprüngliche allgemeine Form der Gl beibehalten, wenn man nur weiß, wie man Konst wegschaffen kann u die wes Konst zu zählen hat.

Wir zeigen daß diese Gl stets aus einer Gl 4ter Dimens in $\xi\eta$ entspringt. Wir transf: $\eta=\alpha_1\xi$

$\alpha_1\xi^3+\beta_1\xi+\alpha_3\xi-\beta_3=0$, die Gr der Koeff sind 1, 1, 2, 3.

Nehmen wir $\alpha_1=\xi$ so erhalten wir eine Gl 4 Dimens. Fassen wir das Gebilde als Kurve auf, so ist sie ganz charakter; sie hat im Unend eine Wendetang, denn $\xi\xi^3=0$ ergibt die Schnpkt Richt, so dass $\xi=0$ u $\xi=0$ dreimal gerechnet die Kurve im Unendl berühren. Es fallen also 3 Pkt mit der Tg zusammen.

Wenn man nun eine Curve 4ten Gr. hat, so braucht man nur eine solche Projection zu machen, bei der die Wendetang. in der unendl. weiten oder der Berühr. Pkt. in die Unendl. fällt. Jede Curve 4ten Gr., welche eine solche Wendetg. hat, gehört also zu $\rho = 3$. Doppelpt. darf sie nicht haben. Es wäre zu untersuchen ob jede Cur. 4ten Gr. ohne Doppelp. keinen Wendetg. hat, denn es wäre noch möglich, daß 4 Wp. zusammenfallen, so daß die Cur. eine Doppeltg. hätte. Jedenfalls ist der Satz, den man aufgestellt hat, daß man jede Gl. vom Range $\rho = 3$ in eine Gl. 4ten Gr. verwand. kann. Es giebt einen Fall, in dem dies nicht mögl. ist.

1.b)

$\xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_7$ kommen vor.

Es ist $\xi^{3\lambda}\xi^{4\mu}$ vom Gr. $3\lambda + 4\mu$ u. in dieser Form lassen sich alle Zahlen ≥ 6 darstellen. Dadurch wird die Vorsch. hier sehr einfach; denn es ist eine Darstellung durch nur zwei ξ hier möglich.

$$0 = \xi_4^3 - a\xi_3^4 - b\xi_4^2\xi_3 - c\xi_4\xi_3^2 - d\xi_3^3 - e\xi_4^2 - f\xi_3\xi_4 - g\xi_3^2 - h\xi_4 - k\xi_3 - l$$

$$\xi_4^3 - \alpha_1\xi_4^2 - \alpha_2\xi_4 - \alpha_4 = 0.$$

Die Coeff. sind also vom Gr. 1, 2, 4. Wir setzen

$\xi_4 + \frac{\alpha_1}{3} = \eta$, so daß $\eta^3 - \alpha_2'\eta - \alpha_4' = 0$ oder

$$\eta^3 + (\alpha\xi_3^2 + \beta\xi_3 + \gamma)\eta + (\delta\xi_3^4 + \varepsilon\xi_3^3 + \zeta\xi_3^2 + \vartheta\xi_3 + \kappa) = 0.$$

δ darf nicht 0 sein, damit die Entwickl. im Unendl. mit $\xi_3^{\frac{4}{3}}$ beginnt. Die Anzahl der Coeff. kann man noch

vereinigen; man kann statt ξ_3 eine bel. lineare Zusammensetz-
en, man kann ferner η mit einer bel. Zahl multipl., so daß man über drei Const. zu verfügen hat. Es bleiben also nur fünf wes. Const. Daraus geht hervor, daß das nicht der allgemeine Fall ist, da die erste Gl 6 wes. Const. enthält. Es ist also nur in particulären Fällen möglich daß ξ_3 u. ξ_4 existiren.

Weierstrass hat nicht genau untersucht, ob sich nicht dieser Fall auf dieselbe Form bringen läßt, wie der erstere. Denn wenn auch an dieser Stelle ξ_5 nicht existirt, so könnte es doch an einer anderen existiren.

Die durch die Gl dargestellte Curve 4ten Gr hat eine Wendetg, die zugleich eine Doppeltg ist.

2.

ξ_2 existirt.

Dieser Fall ist sehr einfach; denn es muß eine andere ξ geben, die mit ihr durch eine Gl zweiten Gr verbunden ist. Wären die Gr 3 oder 5 vorhanden, so müßten auch alle folgenden vorkommen. Diese fehlen also u. man hat

$$\xi_7^2 - a\xi_2^7 - b\xi_2^3\xi_7 - \dots = 0$$

$$\xi_7^2 - (b\xi_2^3 + \dots)\xi_7 + \dots = 0$$

$$\bar{\xi}_7^2 = (a\xi_2^7 + \dots)$$

Aus früheren Betrachtungen folgt, daß dann wirklich $\varrho = 3$ ist. Von den 8 Const kann man wieder drei wegschaffen, so daß auch dieser Fall nur ein particulärer ist.

So haben wir $\rho = 1, 2, 3$ vollständig behandelt. Zu bemerken ist noch: Wenn man ein $x\,\xi_2$ verkennt, so ist die zugehörige Gl. hat $\eta = \sqrt{G(\xi^2)}$.

$\rho = 4$ ist nicht schwer zu behandeln. $\rho = 5$ erfordert schon weitläufige Rechnungen. Da müßte es noch allgemeine Prinzipien geben, die wenigstens die Existenz zweier Normengl. die die wesentl. Lösung vielleicht enthalten, beweisen.

Sei eine gz. F. von u u. v gegeben, $F(u,v)$, welche für $u=0$, $v=0$ den Werth 0 hat. Wir denken sie nach Pot. von u geordnet

$$F(u,v) = f_0(v) + f_1(v)u + \cdots$$

Hier muss $f_0(0) = 0$ sein. Wenn

$$f_0(v) = v^\nu g(v)$$

ist, wo g für $v=0$ nicht mehr verschwindet, so sagen wir, $f_0(v)$ ist von der Ordnung ν. In diesem Falle ist es ersichtlich, dass für alle u unterhalb einer gewissen Grenze δ die Gl. $F(u,v)$ genau ν im allgemeinen von einander verschiedene, unterhalb einer gewissen Grenze ε gelegene Wurzeln besitzt, welche gerade durch diesen letzten Umstand von allen übrigen getrennt sind.

Man kann diese ν Wurzeln auch als Wurzeln einer ganz bestimmten Gl. darstellen

$$v^\nu + P_1(u)v^{\nu-1} + P_2(u)v^{\nu-2} + \cdots + P_\nu(u) = 0.$$

In der That können die Werthe der u u. v so klein gewählt werden, dass für die Gl. nur die Glieder niedrigster Dimension in Betracht kommen; das ist bei $f_0(v)$ die Potenz v^ν, die Coeff. der in den verschiedenen Fn vorkommenden $v^{\nu-1}$ten $P_1(u)$ u. s. w.

Dann ist $F(u,v) = (v^\nu + P_1 v^{\nu-1} + \dots)\, F_1(u,v)$,
wo F_1 für $u=0$, $v=0$ nicht mehr verschwindet.
Ordnen wir $F(u,v)$ nach den Dimensionen

$$F(u,v) = (u,v)_1 + (u,v)_2 + \cdots$$

so können diejenigen Werthe u, welche einem unendl. kleinen v zugehören unmittelbar gefunden werden, falls $(u,v)_1$ von Null verschieden ist. Sei

$$(u,v)_1 = Au + Bv$$

wo mindestens einer der Coeff. A, B nicht 0 ist, dann können wir durch die Substit.

$$u_1 = \alpha u + \beta v \qquad u = \frac{\beta' u_1 - \beta v_1}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

$$v_1 = \alpha' u + \beta' v \qquad v = \frac{-\alpha' u_1 + \beta v_1}{\alpha\beta' - \beta\alpha'}$$

wobei nur die Bedingung besteht, dass die Determ. nicht Null sein soll, $F(u,v)$ in

$$(u_1,v_1)_1 + (u_1,v_1)_2 + \dots = A_1 u_1 + B_1 v_1$$

umwandeln und die α, β stets so wählen, dass $B_1 \neq 0$ ist. Dann wird

$$F(u,v) = (v_1 - \mathfrak{P}(u_1))\, F_1(u_1, v_1).$$

Will man nun alle Werthe finden, die eine gewisse Grenze η nicht übersteigen, so brauchen wir η nur so zu wählen, dass für $|u_1| < \eta$, $|v_1| < \eta$ F_1 nicht verschwindet, dann werden die Werthe sein

$$u_1 = \mathfrak{P}_1(v_1),$$

wo diese Pot. Reihe die Umkehrung von $v_1 = \mathfrak{P}(u_1)$ ist, oder

$$u = g_1 u_1 + g_2 u_1^2 + \dots \quad ; \quad v = h_1 u_1 + h_2 u_1^2 + \dots$$

Setzen wir nun $t = c_1 u_1 + c_2 u_1^2 + \dots$, wo nur $c_1 \neq 0$ sein soll, so daß $u_1 = f_1 t + f_2 t^2 + \dots$ dann wird

$$u = k_1 t + k_2 t^2 + \dots \quad ; \quad v = l_1 t + l_2 t^2 + \dots$$

Wir können also die gesuchten Werthepaare durch zwei Potenzreihen ausdrücken.

Complicirter wird es, wenn $F(u,v)$ mit einer höheren als der ersten Dimension beginnt. Die folgenden Untersuchungen dieses Falles hat Weierstraß noch nicht veröffentlicht.

Sei
$$F(u,v) = (u,v)_\mu + (u,v)_{\mu+1} + \dots,$$
wo nicht alle Coeff. von $(u,v)_\mu$ verschwinden. Wenn $(u,v)_\mu$ für die Werthe $u = g$, $v = h$ verschwindet, so ist es durch $hu - gv$ theilbar; g u. h sind aber noch nicht völlig bestimmt. Um dies zu erreichen wählen wir ein Werthpaar für welches der Ausdruck nicht verschwindet, α, β, so daß also $(\alpha,\beta)_\mu \neq 0$ ist und setzen $g\beta - h\alpha = 1$. Werden in dieser Art alle g u. h bestimmt, so erhält man

$$(u,v)_\mu = C(hu - gv)^\nu (h'u - g'v)^{\nu'} \dots \quad ; \quad g^{(\nu)}\beta - h^{(\nu)}\alpha = 1$$

Machen wir nun hier folgende Substitution

$$u_1 = \beta u - \alpha v \quad , \quad v_1 = \frac{-hu + gv}{\beta u - \alpha v}$$

oder

$$u = (g + \alpha v_1) u_1 \quad , \quad v = (h + \beta v_1) u_1$$

so wird

$$(u,v)_\mu = C u_1^\mu v_1^\nu (h'g - hg' + v_1)^{\nu'} \dots$$

wobei $h'g - hg'$ von Null verschieden ist.

Ferner wird $(u,v)_{\mu+1} = u_1^{\mu+1}(g+\alpha v_1, h+\beta v_1)_{\mu+1}$

....

$$F(u,v) = u_1^{\mu}\left\{v_1^{\nu}(h'g-g'h+v_1)^{\nu'}\cdots + u_1(g+\alpha v_1, h+\beta v_1)_{\mu+1}+\cdots\right\}$$
$$= u_1^{\mu}\cdot F_1(u_1,v_1)$$

Derartige Ausdrücke ergeben sich nun so viele als $(u,v)_\mu$ verschiedene lineare Fct enthält; es handelt sich daher um die Lösung einer Reihe von Gl

$$F_1(u_1,v_1)=0$$
$$F_1'(u_1,v_1')=0$$
$$F_1''(u_1,v_1'')=0$$
......

Wir zeigen nun, daß wenn die Aufgabe für diese Gl gelöst ist, sie es auch für die ursprüngliche $F(u,v)=0$ ist.
Für $u_1=0$ wird $F_1(u_1,v_1)=0$ eine F der Ordnung ν u. es gehören also zu einem unendl kl Werthe u_1 ν unendl kl Werthe v_1. Zu einem jeden derselben gehört aber genau ein unendl kl Werth v so daß also bei der Behandlung aller jener Gl zu einem unendl kleinen Werthe von u_1 $\nu+\nu'+\cdots=\mu$ Werthe von v gehören.
Man kann also die eine Gl durch ein System anderer ersetzen; damit ist der ganze Algorithmus auf einmal angegeben, u zwar ist dadurch diese wichtige Theorie viel einfacher dargestellt als durch die Fct R mit gebrochenen Exponenten, denn wir bleiben hier ganz auf dem Gebiete der rat Funct.

Sind nun die $F_1, \ldots$ regulär, d. h. haben sie nur Linear-Fact., so ist hiermit bereits die Aufgabe gelöst. Ist dies nicht der Fall, so transf. wir weiter, indem wir die ersteren schon regulären unverändert mitnehmen. Nun ist es wesentlich zu beweisen, dass wir auf diese Art fortfahrend, schliesslich zu einem Gl. Systeme gelangen, in dem die Gl. sämtlich reg. sind.

Der einzige Fall, in welchem es möglich ist, dass eine Reduct. nicht eintritt, ist der wo alle Factoren von $(u,v)_\mu$ einander gleich sind, mit anderen Worten, wo (u,v) eine μte Pot. ist. Wir wollen daher nachweisen, dass durch fortgesetzte Transf. dies stets beseitigt werden kann.

Gesetzt wir hätten $u_1 = \beta u - \alpha v$, $v_1 = \frac{-hu+gv}{\beta u - \alpha v}$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = u_1^{\mu-1}\left(\mu\beta F_1 + \beta u_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} - (h+\beta v_1)\frac{\partial F_1}{\partial v_1}\right) = u_1^{\mu-1} f_1(u_1, v_1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = u_1^{\mu-1}\left(-\alpha\mu F_1 - \alpha u_1 \frac{\partial F}{\partial u_1} + (g+\alpha v_1)\frac{\partial F_1}{\partial v_1}\right) = u_1^{\mu-1} f_2(u_1, v_1)$$

Wir denken die Rechnung fortgesetzt

$$u_1 = (g_1 + \alpha_1 v_2)u_2 \qquad v_1 = (h + \beta_1 v_2)u_2$$

Gesetzt auch hier lieferten die Glieder niedrigster Dimension eine Potenz, dann wäre

$$\frac{\partial F}{\partial u} = u_1^{\mu-1} u_2^{\mu-1} f_3(u_2, v_2);$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = u_1^{\mu-1} u_2^{\mu-1} f_4(u_2, v_2).$$

Transformiren wir unter derselben Voraussetzung r mal, so ist

$$\frac{\partial F}{\partial u} = (u_1 u_2 \ldots u_r)^{\mu-1} f_{2r-1}(u_r, v_r);$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = (u_1 u_2 \ldots u_r)^{\mu-1} f_{2r}(u_r, v_r).$$

Es ist nun $u_1 = (g_1 + \alpha_1 v_2) u_2 = (g_1 + \alpha_1 v_2)(g_2 + \alpha_2 v_3) u_3 + \cdots$
$$= g_1 g_2 \cdots g_{r-1} u_r + \cdots$$
Unter den gemachten Voraussetzung ist nun $g_1 \cdots g_{r-1}$ von Null verschieden. g ist nur Null, wenn in $(u, v)_\alpha$ g nicht vorkommt. Schon nach der ersten Voraussetzung kommt aber $v_1^{\,v}$ wirklich vor, also ist g_1 nicht Null, u. aus gleichem Grunde keins der folgenden g.
Wählt man nun für die beiden Functionen $F(u, v)$, $\frac{\partial F(u,v)}{\partial v}$, in denen u u. v unabhängige Veränderl. sein sollen, die Functionen $P(u, v)$ u. $Q(u, v)$ so daß in
$$P(u,v) \frac{\partial F}{\partial v} - Q(u,v)\, F(u,v) = R$$
die rechte Seite von v unabhängig wird, was stets geschehen kann, da ja F u. $\frac{\partial F}{\partial v}$ keinen gemeinsamen Theiler haben und nimmt dann v so, daß $F(u,v) = 0$ wird, also
$$P(u,v) \cdot \frac{\partial F(u,v)}{\partial v} = R(u),$$
setzt ferner für u und v die Ausdrücke in u_r u. v_r ein, wo λ die Ordnung von R ist, die nicht 0 sein kann, so wird
$$u_r^{\,r(\mu-1)} \mathfrak{P}(u_r, v_r) \cdot \mathfrak{F}(u_r, v_r) = u^\lambda (R_0 + R_1 u + \cdots)$$
$$= (g_1 g_2 \cdots g_{r-1})^\lambda u_r^\lambda \mathfrak{R}(u).$$
Die Potenz auf der linken Seite ergiebt sich daraus, daß $u_2, \ldots$ gleichfalls u_r enthalten. Die Gleichung kann aber nur bestehen, wenn $r(\mu - 1) \leqq \lambda$ ist. Also kann r nicht jeden beliebigen Werth erhalten.

Ist also das gegebene Gleichsystem so weit reducirt, daß wir nur mit regul. Systemen zu thun haben, so kommen nur noch rat. Operationen zur Anwendung.

Wir führen nun zwei vert. F. $u_r = \varphi(t)$, $v_r = \psi(t)$ ein, derart, daß die zwischen u_r u. v_r bestehende lineare Gl. befriedigt wird; so ist auch u u. v durch Reihen von t ausdrückbar und t ist eine vert. F. von u u. v. Es gehört also zu einem bestimmten t ein bestimmtes Paar u, v u. umgekehrt.—

Mit Obigem hängt die Aufgabe zusammen, die eine der Größen u, v durch die andere auszudrücken. Schon Newton hat ein Verfahren dafür angegeben, wie man den Ausdruck als Reihe darstellen kann, die dann nach gebrochenen Pot. fortschreitet. Doch hat er eigentlich nur das Anfangsglied bestimmt. Nach ihm hat Lagrange eine Entwicklung gegeben, die jedoch an Klarheit noch manches zu wünschen übrig läßt. In den meisten Fällen kommt es hier nur auf das Anfangsglied an.

Wir zeigen nun in welcher Art die obige Methode zur Lösung dieser Aufgabe führt. Ist

$$u = \varphi(t) = c\,t^{\varepsilon} + c_1 t^{\varepsilon+1} + \dots \qquad c \neq 0$$

$$v = \psi(t) = e\,t^{\kappa} + e_1 t^{\kappa+1} + \dots \qquad e \neq 0$$

dann gehören nach einem bekannten Satze zu einem unendl. kl. W. von u ε unendl. kl. W. von t; man findet sie durch

$$\left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} = t + c_1' t^1 + c_2' t^2 + \dots$$

$$t = \left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} + g_2 \left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{2}{\varepsilon}} + g_3 \left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{3}{\varepsilon}} + \dots$$

Hierbei muß man natürlich zuerst die Wurzel ausziehen u. dann potenzieren, um den richtigen Werth zu erhalten. Setzen wir nun diesen Werth ein, so wird

$$v = c\left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{k}{\varepsilon}} + c_1'\left(\frac{u}{c}\right)^{\frac{k+1}{\varepsilon}} + \dots$$

Hiermit ist die Frage erledigt. Zu einem Werthe von u gehören ε Werthe von v. Wir erhalten soviel Reihenarten als Elemente da sind; es wird $\sum \varepsilon = \lambda$.
Hat das Gebilde nur ein Element, so giebt die Reihe sämmtliche unendl kl Werthe also das ganze Element. Die R ist somit nur als eine F zu betrachten.

Man könnte auch durch Reihenarten die Aufgabe lösen, aber bei unserer Weise überläßt man besser die nothwendigen algebraischen Operationen. $c, c_1', \dots$ sind erst aus dem Zusatz der u u. v d. h. aus den $c, c_1, \dots$ u. $c, c_1, \dots$ zusammengesetzt. Wir hätten also nur die algebr Operationen zu machen, die nöthig sind um die φ u. ψ zu erhalten. Gewöhnlich multiplicirt man noch mit $\sqrt{c}$, aber dadurch wird die aufzulösende Gl von höherem Gr.

Wir setzten

$$x - a = u, \qquad y - b = v.$$

Wenn a u. b endl sind, so sind x u. y jetzt durch Pot R von t ausgedrückt, ferner sind sämmtliche y die zu einem x gehören durch Pot Reihen, die nach $x - a$ oder einer Wurzel von $x - a$ fortschreiten, ausgedrückt.
Ist $a = \infty$ so ist $\frac{1}{x}$ durch eine solche Pot R ausgedrückt, die mit einer positiven Pot von t, etwa der εten anfängt, x also durch eine solche, die mit $t^{-\varepsilon}$ beginnt.

Wird auch b ∞, so gilt dasselbe für y.
Wir sagen nun: Ein P a, b liegt im unendl. Fernen, wenn a, oder b oder beide ∞ sind. Wenn es sich darum handelt, alle im Unendl. gelegenen Werthe x, y zu erhalten, so müssen wir die Reihengrenzen in t aufsuchen, in denen mindestens eine der beiden R eine endl. Anzahl negat. Pot. enthält. So viele derartige Fktionen vorhanden sind, so viele Elemente giebt es im Unendl.

Setzt man eine der oben abgeleiteten Darstellungen, so kann man noch unendl. viele andere erhalten. Man kann eine beliebige Pot. R von t als neue Variable einführen, z. B.

$$\tau = k_1 t + k_2 t^2 + \dots ;$$

wie gewöhnlich darf k_1 nicht Null sein, damit umgekehrt zu jedem τ nur ein t gehört, welches dann in der Form

$$t = l_1 \tau + l_2 \tau^2 + \dots$$

auftritt. Man erhält dann für x u. y die Pot. R

$$x = \mathfrak{P}_1(\tau), \qquad y = \mathfrak{P}_2(\tau);$$

dann bleibt es bestehen, dass zu einem τ nur ein P des Gebildes gehört u. umgekehrt.
Setzt man nun zwei verschiedene Fktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ u. $\varphi_1(\tau)$, $\psi_1(\tau)$, so ist es möglich, dass beide dasselbe Element darstellen; es handelt sich nun um das Kriterium, wie man dies erkennen kann.

Wird nun durch $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ein Element dargestellt, so muss wenigstens unterhalb einer bestimmten Grenze für t jedem Werthe derselben genau ein Werthepaar $\varphi(t)$, $\psi(t)$ entsprechen, und umgekehrt.

Sei für $t=0$ $\qquad \varphi(0)=a, \quad \psi(0)=b$

so haben wir

$$x-a = g t^{\kappa} + g_1 t^{\kappa+1} + \dots$$

$$y-b = h t^{\lambda} + h_1 t^{\lambda_1} + \dots$$

Nach unseren Festsetzungen tritt für $a=\infty$ oder $b=\infty$ statt der linken Seiten $\frac{1}{x}$ resp. $\frac{1}{y}$ auf. Wir bekommen daraus für t eine Reihe nach $x-a$, deren Coeff. sich erst aus den g zusammensetzen.

$$t = \mathfrak{P}\left(\left(\frac{x-a}{g}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\right)$$

und daher

$$y-b = \mathfrak{P}_1\left(\left(\frac{x-a}{g}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\right) = l\left(\frac{x-a}{g}\right)^{\frac{\lambda}{\kappa}} + l_1\left(\frac{x-a}{g}\right)^{\frac{\lambda_1}{\kappa}} + \dots$$

Wir wollen nur die Glieder hingeschrieben denken, die wirklich von Null verschieden sind.

Nun ist zu beweisen, daß die sämmtlichen λ keinen gemeinschaftlichen Theiler κ', der ein Theiler von κ ist, haben können. Denn sonst könnten wir, wenn wir setzen

$$\kappa = \kappa'\varepsilon, \quad \lambda = \kappa'\eta, \quad \lambda_1 = \kappa'\eta_1, \dots$$

unsere Reihe in der Form

$$y-b = l\left(\frac{x-a}{g}\right)^{\frac{\eta}{\varepsilon}} + l_1\left(\frac{x-a}{g}\right)^{\frac{\eta_1}{\varepsilon}} + \dots$$

darstellen. Für einen gegebenen Werth von x hätte diese Reihe nur ε verschiedene Werthe. Nun aber gehören zu einem $x-a$ k verschiedene Werthe von t, u. der zu verschiedenen Werthen von t nicht dasselbe Werthepaar x, y gehören sollte, so gehören auch k verschiedene Werthe $y-b$ zu einem $x-a$ in unserem Element. Daher muss $\varepsilon = k$ und $k' = 1$ sein.

Wir machen nun dieselbe Operation mit dem zweiten Paare $\varphi'(\tau)$, $\psi'(\tau)$ und nehmen den vorigen entsprechend die entsprechenden gestrichenen Buchstaben. Wir erhalten dann eine Formel von derselben Gestalt. Da beide Elemente identisch sein sollten, so muss $k' = k$ sein; da ferner für $t=0$ u. $\tau=0$ jedesmal a, b herauskommt, so erhält man für die Reihen

$$y-b = c' g'^{-\frac{\lambda'}{k}}(x-a)^{\frac{\lambda'}{k}} + c'_1 g'^{-\frac{\lambda'_1}{k}}(x-a)^{\frac{\lambda'_1}{k}} + \dots$$

während oben

$$y-b = c\, g^{-\frac{\lambda}{k}}(x-a)^{\frac{\lambda}{k}} + c_1 g^{-\frac{\lambda_1}{k}}(x-a)^{\frac{\lambda_1}{k}} + \dots$$

war. Wir fixiren nun ein $(x-a)^{\frac{1}{k}}$; dann stellt die Reihe immer noch alle Werthe dar, weil die Vieldeutigkeit durch die g gewahrt bleibt. So müssen nun zunächst die Exponenten λ und λ' übereinstimmen, da sonst für $x=a$ die Reihen von verschiedener Ordnung 0 werden würden. Ferner muss

$$\left(g^{-\frac{\lambda}{k}}\right)^k = \left(g'^{-\frac{\lambda}{k}}\right)^k$$

sein. Stimmen so die ersten Glieder überein, so schließt man, dass alle übereinstimmen müssen; denn stimmten sie nicht überein, so würde die Differenz eine Reihe von

von $x-a$ werden, die nicht, wie es doch sein müßte, identisch Null sein könnte.

Jene beiden Reihen für $y-b$ stimmen also so mit einander überein, daß sie entweder identisch gleich sind, oder daß die Coeff sich sämmtlich nur um dieselbe κte Einheitswurzel von einander unterscheiden. Denn nennen wir ε irgend eine κte Einheitswurzel, so stellt auch

$$b\varepsilon^{\lambda}\left(\frac{x-a}{g}\right)^{\frac{\lambda}{\kappa}}+b_1\varepsilon^{\lambda_1}\left(\frac{x-a}{g}\right)^{\frac{\lambda_1}{\kappa}}+\dots$$

alle κ Werthe von $y-b$ dar; unter diesen κ Reihen muß nothwendig eine sein die mit jener zweiten übereinstimmt, wenn durch beide ein u. dasselbe Element dargestellt werden soll.

Um dies kurz sagen zu können bedienen wir uns folgendes Ausdrucks: Es sei s irg eine lineare F von x u. wir haben eine fort R von s nämlich $\mathfrak{P}(s^{\frac{1}{\kappa}})$ mit gegebenen Coeff, wir können dann aus ihr noch $\kappa-1$ andere fort R herleiten $\mathfrak{P}(\varepsilon s^{\frac{1}{\kappa}})$ … Zwei solche Reihen stellen genau dieselben Werthe dar; sie sollen „äquivalent" heißen.

Wenn man also aus den Gl für $x-a$ u. $y-b$ den Ausdruck von $y-b$ durch $x-a$ bildet u. es geht dann aus dem zweiten Functionenpaar eine fort Reihe für $y-b$ hervor die jener äquivalent ist, dann und nur dann stellen beide Functionenpaare dasselbe Element dar.

Wir drücken nun auch den zweiten L. Z. τ durch x aus.

$$\tau = \mathfrak{P}\left(\left(\frac{x-a}{g'}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{x-a}{g'}\right)^{\frac{1}{n}} + \cdots$$

$$\left(\frac{x-a}{g'}\right)^{\frac{1}{n}} = \mathfrak{P}_1(\tau) = \tau + \cdots$$

$$(x-a)^{\frac{1}{n}} = g'^{\frac{1}{n}}\,\mathfrak{P}_1(\tau) = g'^{\frac{1}{n}}\mathfrak{P}_1(\tau)$$

Setzt man dies in $t = \mathfrak{P}\left(\left(\frac{x-a}{g}\right)^{\frac{1}{n}}\right)$ ein, so bekommt man

$$t = c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots$$

Also muß das zweite Functionenpaar aus dem ersten abgeleitet werden können, indem man für t eine solche Potenzreihe von τ, in welcher der Coeff. der ersten Potenz in τ nicht verschwindet, einsetzt.

Die beiden Zahlen n u. λ sind von besonderer Bedeutung. n zeigt an, wieviele Stellen es in dem Elemente giebt, bei denen x denselben Werth hat, λ wieviele es giebt, für die y derselbe ist.

Sind zwei Paare $\varphi(t), \psi(t)$ u. $\varphi_1(\tau), \psi_1(\tau)$ gegeben, und sind die den Werthen $t=0$, $\tau=0$ entsprechenden Stellen verschieden, so kann es doch vorkommen, daß diese Elemente an anderen Stellen sich decken, wenn t alle Werthe um eine gewisse Größe t_0 herum, τ die in der Umgebung von τ_0 annimmt. t_0 u. τ_0 müssen im Conv. Ber. von t resp. τ liegen.

Sei
$$\varphi(t) = \mathfrak{P}(t-t_0), \quad \psi(t) = \mathfrak{P}_1(t-t_0)$$
$$\varphi_1(\tau) = \mathfrak{P}'(\tau-\tau_0), \quad \psi_1(\tau) = \mathfrak{P}_1'(\tau-\tau_0).$$

Es soll also zunächst $\varphi(t_0) = \varphi_1(\tau_0)$, $\psi(t_0) = \psi_1(\tau_0)$ sein.

Setzen wir $\quad t - t_0 = s\,, \quad \tau - \tau_0 = \sigma$

$$x = \mathfrak{P}(s), \qquad y = \mathfrak{P}_1(s),$$
$$x = \mathfrak{P}'(\sigma), \qquad y = \mathfrak{P}_1'(\sigma);$$

wenn nun die x u. y in der Umgebung von $s=0$, $\sigma=0$ übereinstimmen, so kann man sagen, daß beide Darstellungen an dieser Stelle in diesem Gebiete congruiren. Wenn wir dieses gemeinsame Element betrachten, so ist das erste u. ebenso das zweite als Fortsetzung desselben aufzufassen.

Denken wir uns nun eine Reihe von Elementen

$$a, b, c, d, \ldots$$

in der a mit b an einer bestimmten Stelle congruiren möge, ferner b mit c, c mit d u. s. w. so sind alle aus einander abgeleitet u. als Elemente derselben F zu betrachten.

Wenn umgekehrt a u. d zwei beliebige derselben irreductibelen algebr. Gl. angehörige Elemente sind, so kann man stets durch zwischengeschobene Elemente $b, c, \ldots$ eine solche Reihe herstellen, daß jedes folgende Element als Fortsetzung des vorhergehenden erscheint.

Hyperelliptische Functionen.
Weierstrass.

[illegible] $R(x) = (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_{2n})$ [illegible] $(2n+1)$ [illegible]
$a_0, a_1 \ldots$ [illegible] $a_0 > a_1 > \cdots > a_{2n}$.
[illegible] $R(x)$ [illegible] $P(x) = (x-a_1)\cdots(x-a_{2n-1})$

$$Q(x) = (x-a_0)(x-a_2)\cdots(x-a_{2n})$$

[illegible] $\dfrac{\frac{1}{2}\sqrt{a_0 - a_{2n}}\, P(x)}{x - a_{2\nu-1}} = F_\nu(x)$ [illegible]

[illegible] $1, 2, \ldots n$ [illegible] $x_1 \ldots x_n$ [illegible] $u_1 \ldots u_n$

[illegible] $u_1 = \sum_\alpha \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \dfrac{F_1(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\,;\; u_2 = \sum_\alpha \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \dfrac{F_2(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}\,; \cdots$

[illegible]

[illegible] x_1 [illegible] a_1, x_2 [illegible] $a_3, \ldots$ x_n [illegible] a_{2n-1}
[illegible] $u_1 \ldots u_n$ [illegible] $x_1 \ldots x_n$ [illegible] $\sqrt{R(x_1)} \ldots$
$\sqrt{R(x_n)}$ [illegible] $u_1 \ldots u_n$ [illegible] a_α [illegible] $R(x)$
[illegible] a_α [illegible] $R(x) = R'(a_\alpha)(x-a_\alpha) + \cdots$
[illegible] $(x-a_\alpha)$ [illegible] $R(x)$ [illegible] $x - a_\alpha = \dfrac{R(x)}{R'(a_\alpha)} + c\,R^2(x) + \cdots$
[illegible] $F(x)$ [illegible]

$$\frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \left(\frac{F(a_\alpha)}{R'(a_\alpha)} + \cdots\right)\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

[illegible] $R(x)$ [illegible]

$$\int_{a_\alpha} \frac{F(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \quad [illegible] \quad 2\,\frac{F a_\alpha}{R'(a_\alpha)}\sqrt{R(x)} + c\left(\sqrt{R(x)}\right)^3 + \cdots$$

[illegible] (3), (5) [illegible] $a_0, a_1 \ldots$ [illegible] $P(x)$ [illegible]
$u_1, u_2 \ldots$ [illegible] $x_1, x_2 \ldots$ [illegible]

$$u_1 = \sqrt{a_0 - a_{2n}}\, \frac{P'(a_1)}{R'(a_1)} \sqrt{R(x_1)} + \ldots\ ; \quad u_2 = \sqrt{a_0 - a_{2n}}\, \frac{P'(a_3)}{R'(a_3)} \sqrt{R(x_2)} + \ldots$$

[illegible] $\frac{R'(a_{2n-1})}{P'(a_{2n-1})} = Q(a_{2n-1})$ [illegible]

$$(2)\quad \sqrt{R(x_n)} = \frac{Q(a_{2n-1})}{\sqrt{a_0 - a_{2n}}} \left(u_n + (u_1 \ldots u_n)_3 + \ldots \right); \quad (n = 1 \ldots n)$$

[illegible] $(u_1 \ldots u_n)_r$ [illegible] $u_1 \ldots u_n$ [illegible]

[illegible]
$$x_n - a_{2n-1} = \frac{R(x_n)}{R'(a_{2n-1})} = \left(1 + (1) R(x_n) + \ldots \right)$$
[illegible]

$$(3)\quad \sqrt{a_{2n-1} - x_n} = \sqrt{\frac{-Q(a_{2n-1})}{(a_0 - a_{2n}) P'(a_{2n-1})}} \left(u_n + (u_1 \ldots u_n)_3 + \ldots \right)$$

[illegible] $\sqrt{\frac{-Q}{(\;)P'}}$ [illegible] $\sqrt{a_{2n} - x_n}$ [illegible]
[illegible] $0, 1, \ldots 2n$ [illegible]

$$(4)\quad \sqrt{a_\alpha - x_n} = \sqrt{a_\alpha - a_{2n-1}} \left\{ 1 + (u_1 \ldots u_n)_2 + \ldots \right\}_{\alpha \gtrless 2n-1}$$

[illegible] $\sqrt{a_\alpha - a_\beta}$ [illegible] $\alpha < \beta$,
[illegible] $\sqrt{a_\beta - a_\alpha}$ [illegible]

$$L(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

[illegible] $\sqrt{L(a_\alpha)}$ [illegible] $\sqrt{a_\alpha - x_1} \ldots \sqrt{a_\alpha - x_n}$ [illegible]

$$\sqrt{L(a_{2n-1})} = g_n \left(u_n + (u_1 \ldots u_n)_3 + \ldots \right)$$

[illegible]

$$g_n = \sqrt{\frac{-Q(a_{2n-1})}{P'(a_{2n-1})}} \cdot \frac{\sqrt{a_{2n-1} - a_1} \ldots \sqrt{a_{2n-1} - a_{2n-1}}}{\sqrt{a_0 - a_{2n}}}$$

[illegible] $\sqrt{a_{2n-1}-a_{2n-1}}$ [illegible] $a_1, a_3, \dots a_{2n-1}$ [illegible] $(n-1)$ [illegible]
[illegible] a_{2n-1} [illegible]

$$G_n = i^{n-1}\sqrt{\frac{-Q(a_{2n-1})}{P'(a_{2n-1})}}\,\frac{\sqrt{(-1)^{n-1}P'(a_{2n-1})}}{\sqrt{a_0-a_{2n}}} = i^{n-1}\sqrt{\frac{(-1)^n Q(a_{2n-1})}{a_0-a_{2n}}}$$

[illegible]

$$(\underline{5})\quad \sqrt{(-1)^{n-1}\mathfrak{L}(a_{2n-1})} = \sqrt{\frac{(-1)^n Q(a_{2n-1})}{a_0-a_{2n}}}\,\{u_{2n}+(u_1\dots u_n)_3+\dots\}$$

[illegible]

$$(\underline{6})\quad \sqrt{(-1)^n\mathfrak{L}(a_{2n})} = \sqrt{(-1)^n P(a_{2n})}\,\{1+(u_1\dots u_n)_2+\dots\}$$

[illegible]

$(\underline{7})$ $\sqrt{(-1)^\alpha\mathfrak{L}(a_\alpha)}$ [illegible] $\varphi(u_1\dots)_\alpha$ [illegible] $u_1\dots u_n$ [illegible] $N+3$ [illegible] $\varphi_0\dots\varphi_n$ [illegible]

[illegible] $\alpha, \alpha_1, \dots \alpha_n$ $n+1$ [illegible] $1, 2, \dots 2n$ [illegible]:

$$R_1(x) = (x-a_{\alpha_1})\dots(x-a_{\alpha_n})$$

$$(\underline{8})\quad \frac{\mathfrak{L}(x)}{R_1(x)} = 1+\sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_n}\frac{\mathfrak{L}(a_\alpha)}{(x-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)},$$

$$(\underline{9})\quad \frac{\mathfrak{L}(x)}{R_1(x)} = 1+\sum\frac{(-1)^{\alpha}\varphi^2(u_1\dots)_\alpha}{(x-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)}.$$

[illegible] $x = x_1\dots x_n$ [illegible] $x_1\dots x_n$ [illegible] (4) [illegible]

$$(\underline{10})\quad \sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_n}\left\{\frac{(-1)^\alpha\varphi^2(u_1\dots)_\alpha}{(x-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)}\right\} = -1$$

[illegible] $x = a_\beta$ [illegible]

$$(11)\quad \frac{(-1)^\beta\varphi^2(u_1\dots)_\beta}{R_1(a_\beta)} = 1+\sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_n}\frac{(-1)^\alpha\varphi^2(u_1\dots)_\alpha}{(a_\beta-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)}.$$

II.

[illegible] $\infty, a_0, a_1, \dots a_{2n-1}, a_{2n}, -\infty$

[illegible]

$$(1)\quad v_\nu = \int_{x_0}^{\infty} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}, \quad \omega_\nu^\alpha = \int_{a_\alpha}^{\infty} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

[illegible] ω_ν^α [illegible] $\omega_\nu^0 - \omega_\nu^1 + \omega_\nu^2 - \dots + \omega_\nu^{2n} = 0$

[illegible]

$$(2)\quad W(x) = \frac{\sqrt{R(x_0)}}{(x-x_0)L(x_0)} + \sum \frac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{(x-x_\alpha)(x_0-x_\alpha)L'(x_\alpha)}$$

$(x_1, \sqrt{R(x_1)})$ [illegible] W [illegible] $u_1 \dots u_n$ [illegible] $\sqrt{R(x_0)}$ [illegible] $\sqrt{R(x)}$ [illegible] $x = x_0$ [illegible] $(x-x_0)L(x)W(x)$ [illegible] $x = x_0, \dots x_n$ [illegible] $\sqrt{R(x_0)}, \dots \sqrt{R(x_n)}$ [illegible] $R(x) - (x-x_0)^2 L^2(x) W^2(x) = 0$ [illegible] $x = x_0, \dots x_n$ [illegible] $x_{n+1} \dots x_{2n}$ [illegible] $(x-x_{n+1}) \dots (x-x_{2n}) = \bar{L}(x)$ [illegible]

$$(3)\quad R(x) - (x-x_0)^2 L^2(x) W^2(x) = (x-x_0) L(x) \bar{L}(x)$$

[illegible]

$$(4)\quad v = \int_{a_0}^{x_0} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} - \sum \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} + \sum \int_{a_{2\alpha}}^{x_{n+\alpha}} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

[illegible] $\nu = 1, \dots n$, [illegible] $\sqrt{R(x_{n+\alpha})} = (x_{n+\alpha} - x_0) L(x_{n+\alpha}) W(x_{n+\alpha})$ [illegible]

$$\sum \int_{a_{2\alpha}}^{x_{n+\alpha}} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = \sum \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_{n+\alpha}} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} - \sum \int_{a_{2\alpha-1}}^{a_{2\alpha}} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$- \sum \int_{a_{2\alpha-1}}^{a_{2\alpha}} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{Rx}} + \int_{a_0}^{x_0} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = -\int_{a_0}^{\infty} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{Rx}} + \int_{a_0}^{x_0} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = -v_\nu$$

[illegible]

$$(5)\quad \sum_\nu \int_{a_{2n-1}}^{x_{n+\alpha}} \frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} = u_\nu + v_\nu$$

[illegible] (3) [illegible] $x = a_\alpha$ [illegible] $\bar{\alpha}$ [illegible] $\frac{\alpha}{2}$ [illegible]

$$(6)\quad \sqrt{(-1)^{\bar\alpha} \mathcal{L}(x)} = -\sqrt{x_0 - a_\alpha}\,\sqrt{(-1)^{\bar\alpha}\mathcal{L}(a_\alpha)}\;W(a_\alpha) =$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{R(x_0)}}{\sqrt{x_0 - a_\alpha}\,\mathcal{L}(x_0)} - \sum \frac{\sqrt{x_0 - a_\alpha}\;R(x_{n})}{(x_n - a_\alpha)(x_n - x_0)\,\mathcal{L}'(x_n)} \right\} \sqrt{(-1)^{\bar\alpha}\mathcal{L}(a_\alpha)}$$

[illegible] $x_0 > a_\alpha$ [illegible] $\sqrt{x_0 - a_\alpha}$ [illegible] $x_0 < a_\alpha$ [illegible] $\sqrt{x_0 - a_\alpha} = i$ [illegible] $\sqrt{a_\alpha - x_0}$. [illegible] x_0 [illegible] $v_1 \ldots v_n$ [illegible] x_0 [illegible] $+\infty$ [illegible] $u_1 + v_1 \ldots$, [illegible] $\sqrt{(-1)^{\bar\alpha}\mathcal{L}(a_\alpha)} = \varphi(u_1 \ldots)_\alpha$ [illegible] (5) [illegible] $x_{n+\alpha}$ [illegible] $u_1+v_1,\ u_2+v_2, \ldots$ [illegible] $x_1 \ldots x_n$ [illegible] $u_1 \ldots u_n$ [illegible] (6)

$$(7)\quad \frac{\varphi(u_1+v_1, u_2+v_2 \ldots)_\alpha}{\varphi(u_1, u_2 \ldots)_\alpha} = \frac{\sqrt{R(x_0)}}{\sqrt{x_0 - a_\alpha}\,\mathcal{L}(x_0)} - \sum_n \frac{\sqrt{x_0 - a_\alpha}\,\sqrt{R(x_n)}}{(x_n - a_\alpha)(x_n - x_0)\,\mathcal{L}'(x_n)}$$

[illegible] (7) [illegible] x_0, [illegible] $x_0 = a_\alpha$ [illegible] $\frac{\sqrt{Rx_0}}{\sqrt{x_0 - a_\alpha}}$ [illegible] $\sqrt{a_\alpha - a_1} \ldots \sqrt{a_\alpha - a_{2n}}$ [illegible] $\sqrt{a_\alpha - a}$ [illegible] $i^\alpha \sqrt{(-1)^\alpha R'(a_\alpha)}$

$$\mathcal{L}(a_\alpha) = (-1)^{\bar\alpha}\,\varphi^2(u_1 \ldots)_\alpha = i^{2\bar\alpha}\,\varphi^2(u_1 \ldots)_\alpha$$

$$(8)\quad \varphi(u_1 + \bar\omega_1, u_2 + \bar\omega_2, \ldots u_n) = \frac{i^{\alpha - 2\bar\alpha}\sqrt{(-1)^\alpha R'(a_\alpha)}}{\varphi(u_1 \ldots)_\alpha}$$

[illegible] $x_0 = a_\alpha$ [illegible]

$$(9)\quad \frac{\varphi(u + \overset{\beta}{\omega}_1 \ldots)_\alpha}{\varphi(u_1 \ldots)_\alpha} = \sqrt{a_\beta - a_\alpha} \sum \frac{\sqrt{R(x_n)}}{(x_n - a_\alpha)(x_n - a_\beta)\,\mathcal{L}'(x_n)}$$

[illegible] α/β [illegible] $\alpha \gtrless \beta$ [illegible] $i^{\alpha/\beta}\sqrt{a_\beta - a_\alpha} = i^{\beta/\alpha}\sqrt{a_\alpha - a_\beta}$ [illegible] $i^{\alpha/\beta}$ [illegible] α, β [illegible] γ

6

$$(10)\quad \frac{i^{\alpha/\beta}\,\varphi(u_1+\overset{\beta}{\omega}_1\cdots)_\alpha}{\varphi(u_1\cdots)_\alpha}=\frac{i^{\beta/\alpha}\,\varphi(u_1+\overset{\alpha}{\omega}_1\cdots)_\beta}{\varphi(u_1\cdots)_\beta}$$

[illegible]

$$(11)\quad \frac{\sqrt{a_\beta-a_\alpha}}{i^{\beta/\alpha}}\sum_1\frac{\sqrt{R(x_n)}}{(x_n-a_\alpha)(x_n-a_\beta)L'(x_n)}=\frac{\varphi(u_1\cdots)_{\alpha\beta}}{\varphi(u_1\cdots)_\alpha\,\varphi(u_1\cdots)_\beta}$$

[illegible]

$$(12)\quad \varphi(u_1\cdots)_{\alpha\beta}=\varphi(u_1\cdots)_{\beta\alpha}$$

$$\varphi(u_1\cdots)_{\alpha\beta}=i^{-\beta/\alpha}\varphi(u_1+\overset{\beta}{\omega}_1\cdots)_\alpha\,\varphi(u_1\cdots)_\beta=i^{-\alpha/\beta}\varphi(u_1\cdots)_\alpha\,\varphi(u_1+\overset{\alpha}{\omega}_1\cdots)_\beta$$

[illegible] (8, 9) $-u_1, -u_2 \cdots -u_n$ [illegible] $u_1 \cdots u_n$ [illegible] $\sqrt{R(x_1)}\cdots\sqrt{R(x_n)}$ [illegible] $-\sqrt{R(x_1)}\cdots -\sqrt{R(x_n)}$ [illegible] $x_1\cdots x_n$ [illegible] $\varphi(-u_1\cdots)_\alpha=(-1)^\alpha\varphi(u_1\cdots)_\alpha$ [illegible]

$$(13)\quad \varphi(u_1+\overset{\alpha}{\omega}_1\cdots)_\alpha=\varphi(u_1-\overset{\alpha}{\omega}_1\cdots)_\alpha$$

$$\varphi(u_1+\overset{\beta}{\omega}_1\cdots)_\alpha=-\varphi(u_1-\overset{\beta}{\omega}_1\cdots)_\alpha$$

[illegible]

$$(14)\quad \varphi(u_1+2\overset{\alpha}{\omega}_1\cdots)_\alpha=\varphi(u_1\cdots)_\alpha$$

$$\varphi(u_1+2\overset{\beta}{\omega}_1\cdots)_\alpha=-\varphi(u_1\cdots)_\alpha.$$

[illegible] φ_α, $\varphi_{\alpha\beta}$ [illegible]. [illegible] $\alpha_1\cdots\alpha_n$ [illegible] $0, 1, \cdots 2n$ [illegible]

$$(15)\quad \sum_n\int_{a_{2n-1}}^{x_n}\frac{F_\nu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}=w_\nu$$

[illegible]

$$(16)\quad w_\nu=\overset{1}{\omega}_\nu+\overset{3}{\omega}_\nu+\cdots+\overset{2n-1}{\omega}_\nu-(\overset{\alpha_1}{\omega}_\nu+\cdots+\overset{\alpha_n}{\omega}_\nu)$$

[illegible] $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$, β [illegible] $0, 1, \cdots 2n$ [illegible]

$$(17)\quad \varphi(w_1\cdots w_n)_\alpha=0$$

[illegible] (5, 6) $\sqrt{(-1)^\beta L(a_\beta)}=i^{-n+\beta}\sqrt{x_1-a_\beta}\cdots\sqrt{x_n-a_\beta}$

$$(18)\quad \varphi(w_1\cdots w_n)_\beta=i^{\beta-n}\sqrt{a_{\alpha_1}-a_\beta}\cdots\sqrt{a_{\alpha_n}-a_\beta}$$

[illegible] $\sqrt{x-a_\beta}$ [illegible] $x>a_\beta$ [illegible]

7

[illegible] $\sqrt{a_\beta - x}$ [illegible] $a_\beta > x$ [illegible] $\sqrt{a_\alpha - a_\beta} = i^{\alpha/\beta}\sqrt{(-1)^{-\alpha/\beta}(a_\alpha - a_\beta)}$ [illegible]

$$(\underline{19})\quad \alpha_1/\beta + \alpha_2/\beta + \cdots + \alpha_n/\beta = \sigma$$

[illegible] $(x - a_{\alpha_1}) \cdots (x - a_{\alpha_n}) = \mathcal{R}_1(x)$

$$(\underline{20})\quad \varphi(w_1 \cdots w_n)/\beta = i^{\sigma - n + \beta}\sqrt{(-1)^{n-\sigma}\mathcal{R}_1(a_\beta)}$$

[illegible] (7)

$$(\underline{21})\quad \varphi(w_1 + v_1, w_2 + v_2 \cdots)/\alpha = i^{-n+\bar{\alpha}} \frac{\sqrt{a_\alpha - a_0} \cdots \sqrt{a_{\alpha_1} - a_\alpha} \cdots \sqrt{a_{\alpha_n} - a_\alpha}}{-\sqrt{x_0 - a_\alpha}\,(a_\alpha - a_{\alpha_1}) \cdots (a_\alpha - a_{\alpha_n})}$$

$$= \frac{i^{-n+\bar{\alpha}}\sqrt{a_\alpha - a_0} \cdots \sqrt{a_\alpha - a_{2n}}}{(-1)^n \sqrt{x_0 - a_\alpha}\,\sqrt{a_{\alpha_1} - a_\alpha} \cdots \sqrt{a_{\alpha_n} - a_\alpha}},$$

[illegible] $\sqrt{a_\alpha - a_\alpha}$ [illegible]

$$\alpha_1/\alpha + \alpha_2/\alpha + \cdots + \alpha_n/\alpha = \sigma_1$$

$$\sqrt{a_{\alpha_1} - a_\alpha} \cdots \sqrt{a_{\alpha_n} - a_\alpha} = i^{\sigma_1}\sqrt{(-1)^{n-\sigma_1-1}\mathcal{R}_1'(a_\alpha)}$$

$$\sqrt{a_\alpha - a_0} \cdots \sqrt{a_\alpha - a_{2n}} = i^{2n-\alpha}\sqrt{(-1)^\alpha \mathcal{R}'(a_\alpha)}$$

$$(\underline{22})\quad \varphi(w_1 + v_1 \cdots)/\alpha = \frac{i^{-\sigma_1 - n + \bar{\alpha} - \alpha}\sqrt{(-1)^\alpha \mathcal{R}'(a_\alpha)}}{\sqrt{x_0 - a_\alpha}\sqrt{(-1)^{n-\sigma_1-1}\mathcal{R}_1'(a_\alpha)}}$$

[illegible] $\frac{\mathcal{R}(x)}{\mathcal{R}_1(x)} = \mathcal{R}_2(x)$ [illegible]

$$(\underline{23})\quad \varphi(w_1 + v_1 \cdots)/\alpha = \frac{i^{\bar{\alpha} - \alpha - n - \sigma_1}}{\sqrt{x_0 - a_\alpha}}\sqrt{(-1)^{\alpha + n - \sigma_1 - 1}\mathcal{R}_2(a_\alpha)}.$$

[illegible] 7

$$(\underline{24})\quad \varphi(w_1 + v_1 \cdots)/\beta = \frac{\sqrt{\mathcal{R}(x_0)}}{\sqrt{x_0 - a_\beta}\,\mathcal{R}_1(x_0)}\varphi(w_1 \cdots)/\beta = \frac{i^{\sigma - n + \beta}\sqrt{\mathcal{R}_2(x_0)}}{\sqrt{x_0 - a_\beta}\sqrt{\mathcal{R}_1(x_0)}}\sqrt{(-1)^{n-\sigma}\mathcal{R}_1(a_\beta)}.$$

[illegible] (23) [illegible] $\frac{1}{(x_0 - a_\alpha)\mathcal{R}_1'(a_\alpha)} = \frac{(-1)^{\bar{\alpha}-1}}{\mathcal{R}'(a_\alpha)}\varphi^2(w_1 + v_1 \cdots)/\alpha$

[illegible] $(I\,9)$ [illegible]

$$(\underline{24^a})\quad \frac{\mathcal{L}(x_0)}{\mathcal{R}_1(x_0)} = 1 + \sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_n} \frac{-1}{\mathcal{R}'(a_\alpha)}\varphi^2(w_1 + v_1 \cdots)/\alpha\,\varphi^2(u_1 \cdots)/\alpha.$$

$$\frac{\mathcal{L}(x_0)}{(x_n-x_0)R_1(x_0)}=\sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_n}\frac{\mathcal{L}(a_\alpha)}{(x_n-a_\alpha)(x_0-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)}$$

$$\frac{\mathcal{L}(x_0)}{R_1(x_0)}\,\frac{\varphi(u_1+v_1\dots)_\beta}{\varphi(u_1\dots)_\beta}=\frac{\sqrt{R x_0}}{\sqrt{x_0-a_\beta}\cdot R_1(x_0)}+\sum_{\alpha_1}^{\alpha}\frac{\mathcal{L}(a_\alpha)\sqrt{R(x_n)}\sqrt{x_0-a_\beta}}{(x_0-a_\alpha)(x_n-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)\mathcal{L}'(a_\alpha)}$$

$$\sum\frac{\mathcal{L}a_\alpha\sqrt{R(x_n)}}{(x_n-a_\alpha)(x_n-a_\beta)\mathcal{L}'(x_n)}=\frac{1}{\sqrt{a_\beta-a_\alpha}}(-1)^{\bar\alpha}\varphi(u_1+\overset{\beta}{w}_1\dots)_\alpha\,\varphi(u_1\dots)_\alpha$$

(25') $$\frac{\mathcal{L}(x_0)}{R_1(x_0)}\,\frac{\varphi(u_1+v_1\dots)_\beta}{\varphi(u_1\dots)_\beta}=\frac{\sqrt{R x_0}}{\sqrt{x_0-a_\beta}\,R_1x_0}+\sum\frac{(-1)^{\bar\alpha}\sqrt{x_0-a_\beta}}{\sqrt{a_\beta-a_\alpha}\,(x_0-a_\alpha)}\,\frac{\varphi(u_1+\overset{\beta}{w}_1\dots)_\alpha\,\varphi(u_1\dots)_\alpha}{R_1'(a_\alpha)}$$

$$\frac{\sqrt{R x_0}}{R_1x_0\sqrt{x_0-a_\beta}}=\frac{\varphi(w_1+v_1\dots)_\beta}{\varphi(w_1\dots)_\beta}$$

$$\frac{(-1)^{\bar\alpha}}{(x_0-a_\alpha)R_1'a_\alpha}=\frac{-1}{R'(a_\alpha)}\varphi^2(w_1+v_1\dots)_\alpha$$

$$\dot w_n=\overset{1}{\omega}_n+\overset{3}{\omega}_n+\dots+\overset{2n-1}{\omega}_n-(\overset{\beta_0}{\omega}_n+\dots+\overset{\beta_n}{\omega}_n-\overset{\beta}{\omega}_n)$$

$$\overset{0}{\omega}_n-\overset{1}{\omega}_n+\overset{2}{\omega}_n\dots-\overset{2n-1}{\omega}_n+\overset{2n}{\omega}_n=0$$

$$\overset{\alpha_1}{\omega}_n+\dots+\overset{\alpha_n}{\omega}_n+\overset{\beta_0}{\omega}_n+\overset{\beta_1}{\omega}_n+\dots+\overset{\beta_n}{\omega}_n=2(\overset{1}{\omega}_n+\overset{3}{\omega}_n+\dots+\overset{2n-1}{\omega}_n)$$

$$w_n+\overset{\beta}{w}_n=-w_n+2\overset{\beta}{w}_n$$

$$\varphi(v_1+w_1+\overset{\beta}{w}_1\dots)_\alpha=\varphi(v_1-\dot w_1+2\overset{\beta}{w}_1\dots)_\alpha=-\varphi(v_1-\dot w_1\dots)_\alpha$$

$$\varphi(v_1-\dot w_1\dots)_\alpha=\pm\varphi(v_1+\dot w_1\dots)_\alpha$$

$$\varphi(-u_1,-u_2\dots)_\alpha=(-1)^\alpha\varphi(u_1\dots)_\alpha$$

$$\varphi(\dot w_1\dots\dot w_n)_\alpha=0,\quad \varphi(v_1-\dot w_1\dots)_\alpha=(-1)^\alpha\varphi(v_1+\dot w_1\dots)_\alpha$$

(26) $$\varphi(v_1+w_1+\overset{0}{w}_1\dots)_\alpha=(-1)^{\alpha-1}\varphi(v_1+\dot w_1\dots)_\alpha$$

(24) $w_n \cdot \dot w_n$ $R_1(x)$

$\frac{R_2(x)}{x-\beta}$ [illegible]

$$\varphi(v_1+w_1\ldots)_\alpha = \frac{\sqrt{R x_0}}{\sqrt{x_0-a_\alpha}\,\frac{R_2 x}{x_0-a_\beta}}\cdot\varphi(w_1\ldots)_\alpha$$

[illegible]

$$(27)\quad \varphi(v_1+w_1\ldots)_\alpha\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_\beta = \frac{\sqrt{x_0-a_\beta}}{\sqrt{x_0-a_\alpha}}\,\varphi(w_1\ldots)_\alpha\,\varphi(w_1\ldots)_\beta$$

[illegible]

$$\varphi(v_1+w_1\ldots)_\alpha\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_\beta = (-1)^{\alpha-1}\varphi(v_1+w_1+\overset{\beta}{w_1}\ldots)_\alpha\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_\beta$$

$$= (-1)^{\alpha-1}\,i^{\beta/\alpha}\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_{\alpha\beta}$$

$$\varphi(w_1\ldots)_\alpha = i^{\sigma_2-n+\bar\alpha}\,\frac{\sqrt{(-1)^{n-\sigma_2}R_2 a_\alpha}}{\sqrt{a_\alpha-a_\beta}}$$

[illegible] $\sigma_2 = \beta_0/\alpha + \ldots + \beta_n/\alpha - \beta_\alpha$ [illegible] 27 [illegible]

$$(-1)^{\alpha-1}\,i^{\beta/\alpha}\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_{\alpha\beta} = \frac{\sqrt{x_0-a_\beta}}{\sqrt{x_0-a_\alpha}}\;\frac{i^{\sigma_2-n+\bar\alpha}\sqrt{(-1)^{n-\sigma_2}R_2 a_\alpha}}{\sqrt{a_\beta-a_\alpha}}\,\varphi(w_1\ldots)_\beta$$

[illegible]

$$\varphi(w_1+v_1\ldots)_\alpha = \frac{i^{\bar\alpha+\alpha-n+\sigma_1}}{\sqrt{x_0-a_\alpha}}\sqrt{(-1)^{n-\alpha-\sigma_1-1}R_2(a_\alpha)}$$

[illegible]

$$\sigma_1+\sigma_2 = \alpha_0/\alpha + \ldots + \alpha_n/\alpha + \beta_0/\alpha + \ldots + \beta_n/\alpha - \beta_\alpha = 2n-\alpha-\beta/\alpha$$

[illegible] $0, 1 \ldots 2n$ [illegible] n [illegible]

$$\frac{1}{R_1'(a_\alpha)}\cdot\frac{\sqrt{x_0-a_\beta}}{(x_0-a_\alpha)\sqrt{a_\beta-a_\alpha}}\cdots = (-1)^{\bar\alpha+\alpha-1}\,i^{\beta/\alpha}\,\frac{\varphi(v_1+w_1)_{\alpha\beta}\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_\alpha}{\varphi(w_1\ldots)_\beta}$$

[illegible] 25 [illegible]

$$(28)\quad \frac{L(x_0)}{R_1(x_0)}\,\varphi(u_1+v_1\ldots)_\beta\,\varphi(w_1\ldots)_\beta = \varphi(u_1\ldots)_\beta\,\varphi(w_1+v_1\ldots)_\beta +$$

$$\sum_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha_n}\frac{(-1)^{\alpha-1+\beta/\alpha}}{R'(a_\alpha)}\,\varphi(u_1\ldots)_\alpha\,\varphi(u_1\ldots)_{\alpha\beta}\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_\alpha\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_{\alpha\beta}$$

[illegible] v_μ, $\overset{\alpha}{w}_\mu$, w_μ [illegible]

[illegible]
$$w_\mu + \overset{\alpha}{w}_\mu - v_\mu = \sum \int_{a_{2\alpha-1}}^{a_{2\alpha}} \frac{F_\mu(x)\,dx}{\sqrt{Rx}} + \int_{a_\alpha}^{x_0} \frac{F_\mu(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

[illegible] $w_\mu+\overset{\alpha}{w}_\mu - v_\mu$ [illegible] u_μ [illegible] (I 1) [illegible] $x_1 \dots x_n$ [illegible] $x_0, a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n}$ [illegible] a_α [illegible] $a_{\alpha_1} \dots a_{\alpha_n}$ [illegible] β [illegible] $0, 1, \dots 2n$ [illegible]

$$\varphi(w_1+\overset{\alpha}{w}_1 - v_1\dots)_{\alpha'} = 0 \quad \alpha' \gtrless \alpha$$

$$\varphi(w_1+\overset{\alpha}{w}_1-v_1\dots)_\beta = i^{-n+\beta}\frac{\sqrt{x_0-a_\beta}\sqrt{a_{\alpha_1}-a_\beta}\cdots\sqrt{a_{\alpha_n}-a_\beta}}{\sqrt{a_\alpha-a_\beta}}$$

[illegible]

$$\varphi(w_1+\overset{\alpha}{w}_1-v_1\dots)_\beta = (-1)^\beta \varphi(v_1-w_1-\overset{\alpha}{w}_1\dots)_\beta = \pm\,\varphi(v_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\dots)_\beta$$

[illegible] $v_\mu = \overset{\alpha}{w}_\mu$ [illegible] $\varphi(w_1\dots)_\beta = -\varphi(w_1+2\overset{\alpha}{w}_1\dots)_\beta$; [illegible]

$$\varphi(w_1+\overset{\alpha}{w}_1-v_1\dots)_\alpha = \varphi(w_1+\overset{\alpha}{w}_1+v_1\dots)_\alpha$$

[illegible]

$$(8)\qquad \varphi(v_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\dots)_{\alpha'} = 0, \quad \frac{\varphi(v_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\dots)_\beta}{\varphi(w_1\dots)_\beta} = -\frac{\sqrt{x_0-a_\beta}}{\sqrt{a_\alpha-a_\beta}}$$

[illegible] (II, 7) [illegible] β [illegible] α [illegible]

$$(9)\qquad \frac{\varphi(v_1+w_1\dots)_\beta}{\varphi(w_1\dots)_\beta} = \frac{\sqrt{R(x_0)}}{R_1(x_0)\sqrt{x_0-a_\beta}}$$

[illegible] (II 7) [illegible] $\dfrac{L x_0}{(x-x_0)R_1 x_0} = \sum \dfrac{L a_\alpha}{(x_\mu - a_\alpha)R_1' a_\alpha}\,\dfrac{1}{x_0-a_\alpha}$; [illegible]

$$\frac{L(x_0)}{R_1(x_0)}\varphi(w_1\dots)_\beta\,\varphi(u_1+v_1\dots)_\beta = \varphi(u_1\dots)_\beta\,\varphi(w_1+v_1\dots)_\beta - \sum_{\substack{\mu=1\dots n\\ \alpha=\alpha_1\dots\alpha_n}} \frac{\varphi(w_1\dots)_\beta\sqrt{x_0-a_\beta}\,L(a_\alpha)\sqrt{R_1(x_\mu)}\,\varphi(u_1\dots)_\beta}{(x_\mu-a_\alpha)(x_\mu-a_\beta)L'(x_\mu)(x_0-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)}$$

[illegible]
$$\sum\frac{\sqrt{R x_\mu}}{(x_\mu-a_\alpha)(x_\mu-a_\beta)L'(x_\mu)} = \frac{\varphi(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\dots)_\beta}{\varphi(u_1\dots)_\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{a_\alpha-a_\beta}}$$

$$L(a_\alpha) = (-1)^\alpha\,\varphi^2(u_1\dots)_\alpha$$

[illegible] (8)

$$\frac{\mathfrak{L}(x_0)}{R_1(x_0)}\,\varphi(w_1\ldots)_\beta\,\varphi(u_1+v_1\ldots)_\beta = \varphi(u_1\ldots)_\beta\,\varphi(w_1+v_1\ldots)_\beta$$
$$+\sum_\alpha \frac{(-1)^{\tilde\alpha}\varphi^2(u_1\ldots)_\alpha\,\varphi(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta\,\varphi(v_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta}{(x_0-a_\alpha)R_1'a_\alpha}$$

[illegible]

$$\frac{\mathfrak{L}(x_0)}{R_1(x_0)} = 1+\sum\frac{\mathfrak{L}(a_\alpha)}{(x_1-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)} = 1+\sum_\alpha\frac{(-1)^{\tilde\alpha}\varphi^2(u_1\ldots)_\alpha}{(x_0-a_\alpha)R_1'a_\alpha}$$

[illegible] $u_\alpha = -v_\alpha + w_\alpha + \overset{\alpha}{w}_\alpha$

[illegible] $\mathfrak{L}x_0 = 0$ [illegible] $\varphi(-v+w_\alpha+\overset{\alpha}{w}_\alpha\ldots)_\alpha = 0$ [illegible] $\alpha \gtrless \alpha_1$ [illegible]

$$1+\frac{(-1)^{\tilde\alpha}\varphi(v_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha}{(x_0-a_\alpha)R_1'a_\alpha} = 0$$

[illegible] (II 8)

$$\varphi^2(v+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha = \frac{R'a_\alpha}{\varphi^2(v_1+w_1\ldots)_\alpha}$$

[illegible]

$$\frac{(-1)^{\tilde\alpha}}{(x_0-a_\alpha)R_1a_\alpha} = \frac{-\varphi^2(v+w_1\ldots)_\alpha}{R'a_\alpha}$$

[illegible]

$$(10)\quad \frac{\mathfrak{L}x_0}{R_1x_0} = 1-\sum_\alpha\frac{\varphi^2(v_1+w_1\ldots)_\alpha\,\varphi^2(u_1\ldots)_\alpha}{R'(a_\alpha)} = N$$

$$(11)\quad \frac{\mathfrak{L}'x_0}{R_1x_0}\,\varphi(w_1\ldots)_\beta\,\varphi(u_1+v_1\ldots)_\beta = \varphi(u_1\ldots)_\beta\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_\beta$$
$$+\sum_\alpha\frac{\varphi^2(u_1\ldots)_\alpha\,\varphi(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta\,\varphi^2(v_1+w_1\ldots)_\alpha\,\varphi(v_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta}{R'a_\alpha}$$

[illegible]

$$\varphi(u_1\ldots)_\alpha\,\varphi(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta = i^{\alpha/\beta}\varphi(u_1\ldots)_{\alpha\beta}$$
$$\varphi(v_1+w_1\ldots)_\alpha\,\varphi(v_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta = i^{\alpha/\beta}\varphi(v_1+w_1\ldots)_{\alpha\beta}$$

[illegible]

$$(12)\quad M = \varphi(u_1\ldots)_\beta\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_\beta+\sum_\alpha\frac{(-1)^{\alpha/\beta}}{R'a_\alpha}\varphi(u_1\ldots)_\alpha\,\varphi(u_1\ldots)_{\alpha\beta}$$
$$\varphi(v_1+w_1\ldots)_\alpha\,\varphi(v_1+w_1\ldots)_{\alpha\beta}$$

[illegible]

$$(13)\quad \varphi(w_1\ldots)_\beta\,\varphi(u_1+v_1\ldots)_\beta = \frac{M}{N}.$$

[illegible] $\overset{\circ}{\omega}_n = \overset{1}{\omega}_n + \cdots + \overset{2n-1}{\omega}_n - (\overset{\beta_0}{\omega}_n + \cdots + \overset{\beta_n}{\omega}_n - \overset{\beta}{\omega}_n)$ [illegible] $\frac{q}{1,r}$ [illegible]

$$\overset{0}{\omega}_n - \overset{1}{\omega}_n + \cdots - \overset{2n-1}{\omega}_n + \overset{2n}{\omega}_n = 0$$

$$\overset{\alpha_1}{\omega}_n + \cdots + \overset{\alpha_n}{\omega}_n + \overset{\beta_0}{\omega}_n + \cdots + \overset{\beta_n}{\omega}_n = 2(\overset{1}{\omega}_n + \overset{3}{\omega}_n + \cdots + \overset{2n-1}{\omega}_n)$$ [illegible]

$$\omega_n = \overset{\circ}{\omega}_n + \overset{\beta}{\omega}_n .$$

[illegible]
$$\varphi(w_1 \cdots)_{\alpha\beta} = i^{-\beta/\alpha} \varphi(w_1 \cdots)_\beta \, \varphi(w_1 + \overset{\beta}{w}_1 \cdots)_\alpha =$$
$$i^{-\beta/\alpha} \varphi(w_1 \cdots)_\beta \, \varphi(2\overset{\beta}{w}_1 - \overset{\circ}{w}_1 \cdots)_\alpha = -i^{-\beta/\alpha} \varphi(w_1 \cdots)_\beta \, \varphi(-\overset{\circ}{w}_1 \cdots)_\alpha$$
$$= (-1)^{\alpha-1} i^{-\beta/\alpha} \varphi(w_1 \cdots)_\beta \, \varphi(w_1 \cdots)_\alpha$$

[illegible]
$$\varphi(w_1 \cdots)_\alpha = i^{-n+\bar\alpha} \frac{\sqrt{a_{\beta_1} - a_\alpha} \cdots \sqrt{a_{\beta_n} - a_\alpha}}{\sqrt{a_\beta - a_\alpha}}$$

[illegible]

$$(\underline{14}) \quad \varphi(w_1 \cdots)_{\alpha\beta} = \frac{(-1)^{n+\alpha-1} i^{\bar\alpha+\bar\beta}}{i^{\beta/\alpha} \sqrt{a_\beta - a_\alpha}} \sqrt{a_{\alpha_1} - a_\beta} \cdots \sqrt{a_{\alpha_n} - a_\beta} \sqrt{a_{\beta_0} - a_\alpha} \cdots \sqrt{a_{\beta_n} - a_\alpha}$$

[illegible] $\alpha_1/\beta + \cdots \alpha_n/\beta = \sigma \qquad \beta_0/\alpha + \beta_1/\alpha + \cdots + \beta_n/\alpha = \sigma_1$

$$R_2(x) = \frac{Rx}{R_1 x} \quad \text{[illegible] (7)}$$

$$(\underline{15}) \quad \varphi(w_1 \cdots)_{\alpha\beta} = (-1)^{n+\alpha-1} i^{\sigma+\sigma_1+\bar\alpha+\bar\beta} \sqrt{(-1)^{n-\sigma} R_1(a_\beta)} \cdot \sqrt{(-1)^{n-\sigma_1-\alpha/\beta} \frac{R_2 a_\alpha}{a_\alpha - a_\beta}}$$

[illegible] (II 11) [illegible]

$$(\underline{16}) \quad \begin{aligned} \varphi(w_1 \cdots)_{\alpha\alpha'} &= 0 \\ \varphi(w_1 \cdots)_{\beta\beta'} &= 0 \\ \varphi(w_1 \cdots)_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

[illegible] $\int_{a_{2i-1}}^{x_0} \frac{F_n(x)\,dx}{\sqrt{Rx}} = u_n'$ [illegible] i [illegible] $1, 2 \ldots n$ [illegible]

$v_n = \overset{2i-1}{w}_n - u_n'$ [illegible] (II 7) n

$$\frac{\varphi(u_1 + \overset{2i-1}{w}_1 - w_1' \cdots)_\alpha}{\varphi(u_1 \cdots)_\alpha} = \frac{\sqrt{Rx_0}}{L\dot x_0 \sqrt{x_0 - a_\alpha}} + \sum \frac{\sqrt{x_0 - a_\alpha}\,\sqrt{R x_n}}{(x_n - a_\alpha)(x_n - x_0) L'(x_n)}$$

[illegible] x_0 [illegible] a_{2i-1} [illegible] $u_1' \dots u_n'$ [illegible] $\sqrt{R x_0}$
[illegible]

$$u_i' = \sqrt{a_0 - a_{2n}}\,\frac{P'(a_{2i-1})}{R'(a_{2i-1})}\cdot\sqrt{R x_0} + \dots$$ [illegible],

[illegible] u' [illegible] $\sqrt{R x_0}$ [illegible]
[illegible] $\sqrt{R x_0}$ [illegible] $\sqrt{R x_0}$ [illegible] $\alpha \gtrless 2n-1$

$$\frac{\sqrt{a_0 + a_{2n} - a}}{\varphi(u_1 \dots)_\alpha}\,\frac{\partial \varphi(u_1 + \overset{2i-1}{w_1} \dots)_\alpha}{\partial u_i} = \frac{R'(a_{2i-1})}{\sqrt{a_{2i-1} - a_\alpha}\,P'(a_{2i-1})\,L(a_{2i-1})}$$

$$\frac{\partial \varphi(u_1 + \overset{2i-1}{w_1} \dots)_\alpha}{\partial u_i} = (-1)^i \frac{R'(a_{2i-1})}{\sqrt{a_0 - a_{2n}}\sqrt{x_{2i-1} - a_\alpha}\,P'_{a_{2i-1}}}\,\varphi^2(u_1 \dots)_{2i-1}\,\varphi(u_1 \dots)_\alpha$$

[illegible] $u_n - w_n$ [illegible] u_n [illegible]

$$\frac{\partial \varphi(u_1 \dots)_\alpha}{\partial u_i} = \frac{(-1)^{i-1}}{P'(a_{2i-1})\sqrt{a_{2i-1} - a_\alpha}\sqrt{a_0 - a_{2n}}}\,\varphi^2(u_1 \dots)_{2i-1}\,\varphi(u_1 + \overset{2i-1}{w_1} \dots)_\alpha$$

$$\alpha \gtrless 2i-1.$$

III

[illegible] (II) [illegible] $\sqrt{a_0 - a_{2n}}$ [illegible]
$v_1 \dots v_n$ [illegible]

$$(1) \qquad v_1 u_1 = \sum_n \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{1}{2}\frac{P x}{x - a_1}\frac{dx}{\sqrt{R x}}$$

$$v_e u_e = \sum_n \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{P x}{x - a_{2e-1}}\frac{dx}{\sqrt{R x}}$$

[illegible] u [illegible] $x_1 \dots x_n$ $\sqrt{R x_1} \dots \sqrt{R x_n}$ [illegible]
[illegible]

$$\sqrt{R x_1} = Q(a_1)\{v_1 u_1 + (u_1 \dots u_n)_3 + \dots\}$$
$$\sqrt{R x_n} = Q(a_{2n-1})\{v_n u_n + (u_1 \dots u_n)_3 + \dots\}$$

$$\sqrt{a_{2n-1} - x_n} = \sqrt{-\frac{Q(a_{2n-1})}{P'(a_{2n-1})}}\,\{v_n u_n + (u_1\ldots)_3 \ldots\}$$

$$\sqrt{a_\alpha - x_n} = \sqrt{a_\alpha - a_{2n-1}}\,\{1 + (u_1\ldots)_2 + \cdots\}$$

[illegible] $L_x = (x-x_1)\ldots(x-x_n)$

[illegible]

(2) $$\frac{f(u_1\ldots)_0}{\sqrt[4]{R'a_0}} = \frac{\sqrt{La_0}}{\sqrt[4]{R'a_0}} = al(u_1\ldots)_0$$

(3) $$\frac{f(u_1\ldots)_{2n-1}}{\sqrt[4]{-R'a_{2n-1}}} = \frac{\sqrt{La_{2n-1}}}{\sqrt[4]{R'a_{2n-1}}} = al(u_1\ldots)_{2n-1}$$

(4) $$\frac{f(u_1\ldots)_{2n}}{\sqrt[4]{R'a_{2n}}} = \frac{\sqrt{La_{2n}}}{\sqrt[4]{R'a_{2n}}} = al(u_1\ldots)_{2n}$$

[illegible]

$$\frac{f(u_1\ldots)_\alpha}{\sqrt[4]{(-1)^\alpha R'(a_\alpha)}} = \frac{\sqrt{(-1)^\alpha L(a_\alpha)}}{\sqrt[4]{(-1)^\alpha R'a_\alpha}} = al(u_1\ldots)_\alpha$$

[illegible]

(5) $$i^{-\alpha/\beta} al(u_1\ldots)_\alpha\, al(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta = i^{-\beta/\alpha} al(u_1+\overset{\beta}{w}_1\ldots)_\alpha\, al(u_1\ldots)_\beta = al(u_1\ldots)_{\alpha\beta}$$

[illegible] (6) $$\frac{al(u_1\ldots)_{\alpha\beta}}{al(u_1\ldots)_\alpha\, al(u_1\ldots)_\beta} = \frac{\sqrt{a_\beta - a_\alpha}}{i^{\beta/\alpha}}\sum\frac{\sqrt{Rx_n}}{(x_n-a_\alpha)(x_n-a_\beta)}$$

[illegible] (I 5, 6) [illegible]

(7) $$al(u_1\ldots)_{2n-1} = \sqrt[4]{-\frac{Q(a_{2n-1})}{P'(a_{2n-1})}}\,\{v_n u_n + (u_1\ldots)_3 + \ldots\}$$

$$al(u_1\ldots)_{2n} = \sqrt[4]{\frac{P(a_{2n})}{Q'(a_{2n})}}\,\{1 + (u_1\ldots)_2 + \ldots\}$$

[illegible] (II 8)

(8) $$al(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha = \frac{i^{\alpha-2\bar{\alpha}}}{al(u_1\ldots)_\alpha}$$

(9) $$\frac{al(u_1+\overset{\beta}{w}_1\ldots)_\alpha}{\sqrt{a_\beta-a_\alpha}\,al(u_1\ldots)_\alpha} = \frac{al(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta}{\sqrt{a_\alpha-a_\beta}\,al(u_1\ldots)_\beta} = \sum\frac{\sqrt{Rx_n}}{(x_n-a_\alpha)(x_n-a_\beta)L'x_n}$$

(10) $\frac{\sqrt{a_\beta - a_\alpha}\; al(u_1+\overset{\beta}{w}_1\ldots)_\alpha}{al(u_1\ldots)_\alpha} + \frac{\sqrt{a_\gamma - a_\beta}\; al(u_1+\overset{\gamma}{w}_1\ldots)_\beta}{al(u_1\ldots)_\beta} + \frac{\sqrt{a_\alpha - a_\gamma}\; al(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\gamma}{al(u_1\ldots)_\gamma} = 0$

(11) $al(u_1+2\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha = al(u_1\ldots)_\alpha$

$al(u_1+2\overset{\beta}{w}_1\ldots)_\alpha = -\,al(u_1\ldots)_\alpha \qquad \alpha \lessgtr \beta$

(12) $w_n = \overset{1}{w}_n + \overset{3}{w}_n + \ldots + \overset{2n-1}{w}_n - \overset{\alpha_1}{w}_n - \overset{\alpha_2}{w}_n - \ldots - \overset{\alpha_n}{w}_n$

(13) $i_n v_n = \int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{P x}{x - a_{2n-1}} \frac{dx}{\sqrt{R x}}$

(14) $al(w_1\ldots)_\alpha = 0 \qquad al(w_1\ldots)_\beta = i^{\sigma - n + \beta} \sqrt[4]{\frac{(-1)^\beta R_1 a_\beta}{R_2' a_\beta}}$

$al(w_1\ldots)_{\alpha\alpha'} = 0 \qquad al(w_1\ldots)_{\beta\beta'} = 0$

$al(w_1\ldots)_{\alpha\beta} = (-1)^{n+\alpha-1}\, i^{\sigma+\sigma_1+\bar\alpha+\bar\beta} \sqrt[4]{\frac{(-1)^\beta R_1 a_\beta \; (-1)^\alpha R_2 a_\alpha}{R_2' a_\beta \; (a_\alpha - a_\beta)^2 R_1' a_\alpha}}$

Cor 1 (II A8)

$al(v_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha = 0; \quad \frac{al(v_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta}{al(w_1\ldots)_\beta} = -\frac{\sqrt{x_0 - a_\beta}}{\sqrt{a_\alpha - a_\beta}}$

(15) $\frac{al(v_1+w_1\ldots)_\beta}{al(w_1\ldots)_\beta} = \frac{\sqrt{R x_0}}{\sqrt{x_0 - a_\beta}\, R_1 x_0}$

(16) $N = 1 - \sum (-1)^\alpha al^2(u_1\ldots)_\alpha\, al^2(v_1+w_1\ldots)_\alpha = \frac{L x_0}{P x_0}$

$M = al(u_1\ldots)_\beta\, al(v_1+w_1\ldots)_\beta + \sum (-1)^\alpha al^2(u_1\ldots)_\alpha\, al(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta\, al^2(v_1+w_1\ldots)_\alpha\, al(v_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\beta$

(17) $M = al(u_1\ldots)_\beta\, al(v_1+w_1\ldots)_\beta + \sum (-1)^{\alpha+\alpha/\beta} al(u_1\ldots)_\alpha\, al(u_1\ldots)_{\alpha\beta}\, al(v_1+w_1\ldots)_\alpha\, al(v_1+w_1\ldots)_{\alpha\beta}$

(18) $al(w_1\ldots)_\beta\, al(u_1+v_1\ldots)_\beta = \frac{M}{N}$

(16) $x_0 = a_\beta$

$(-1)^{n+\sigma+\beta} \sqrt{\frac{(-1)^\beta R_2' a_\beta}{R_1 a_\beta}}\, al^2(u_1\ldots)_\beta = 1 - \sum (-1)^\beta al^2(u_1+\overset{\beta}{w}_1\ldots)_\alpha\, al^2(u_1\ldots)_\alpha$

[illegible] $\sqrt{\frac{(-1)^{\beta} R'_2 a_\beta}{R_1 a_\beta}} = \frac{(-1)^{\nu+\sigma+\beta}}{al^2(u_1\dots)_\beta}$

$al(u_1 + \overset{\beta}{w}_1 \dots)_\alpha = \frac{i^{\beta/\alpha}\, al(u_1\dots)_{\alpha\beta}}{al(u_1\dots)_\alpha} = \frac{i^{-\alpha/\beta+1}\, al(u_1\dots)_{\alpha\beta}}{al(u_1\dots)_\beta}$

[illegible]

(19) $al^2(u_1\dots)_\beta = al^2(u_1\dots)_\beta + \sum_\alpha (-1)^{\alpha+\alpha/\beta}\, al^2(u_1\dots)_{\alpha\beta}\, al^2(u_1\dots)_\alpha$

[illegible]

(20) $v_n u'_n = \int_{a_{2n-1}}^{x_0} \frac{i\, P_x\, dx}{(x-a_{2n-1})\sqrt{R_x}}$

[illegible]

$$v_n = \overset{2n-1}{w_n} - u'_n$$

[illegible]

(21) $\frac{al(u_1 - \overset{2n-1}{w_1} + u'_1 \dots)_\alpha}{al(u_1\dots)_\alpha} = \frac{\sqrt{R x_0}}{(x_0-a_\alpha) L x_0} \frac{W x_0 - W a_\alpha}{x_0 - a_\alpha} \sqrt{x_0 - a_\alpha}$

[illegible] (22) $Wx = \sum_n \frac{\sqrt{R x_n}}{(x_n - x)\, L' x_n}$ [illegible]

[illegible] x_0 [illegible] a_{2n-1} [illegible] u'_n [illegible] $\sqrt{R x_0}$ [illegible]

$v_n u'_n = \frac{\sqrt{R x_0}}{L a_{2n-1}} +$ [illegible] $\sqrt{R x_0}$ [illegible] u'_0

[illegible] $\sqrt{R x_0}$ [illegible] $\sqrt{R x_0}$ [illegible]

[illegible] $\sqrt{R x_0}$ [illegible] a_{2n-1}

$$\frac{\partial\, al(u_1 - \overset{2n-1}{w_1}\dots)_\alpha}{L a_{2n-1}\, \partial u_n} = \frac{al(u_1\dots)_\alpha}{\sqrt{a_{2n-1}-a_\alpha}\, L a_{2n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}\, al(u_1\dots)_\alpha}{\sqrt{a_{2n-1}-a_\alpha}\, \sqrt[4]{-R' a_{2n-1}}\, al(u_1\dots)_{2n-1}}$$

[illegible] $l_{2n-1} = \sqrt[4]{\frac{-L a_{2n-1}}{R' a_{2n-1}}}$;

$$\frac{\partial\, al(u_1\dots)_{2n-1}}{l_b\, \partial u_b} = \frac{i^{2n-1/2b-1}\, l^2_{2b-1}}{\sqrt{a_{2n-1}-a_{2b-1}}}\, al(u_1\dots)_{2b-1}\, al(u_1\dots)_{2b-1,2n-1}$$

[illegible] $al(u_1\dots)_{2b-1,2n-1} = \frac{\sqrt{a_{2n-1}-a_{2b-1}}}{i^{2n-1/2b-1}}\, al(u_1\dots)_{2n-1}\, al(u_1\dots)_{2b-1} \cdot \sum_m \frac{\sqrt{R x_m}}{(x_m - a_{2n})(x_m - a_{2b-1})\, L'(x_m)}$

[illegible]

$$\frac{\partial\, al(u_1 \ldots)_{2a-1}}{l_b\, \partial u_b} = - e_{2b-1}^2\, al^2(u_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1\ldots)_{2a-1} \sum \frac{\sqrt{R x_m}}{(x_m - a_{2a-1})(x_m - a_{2b-1})\, \mathcal{L}'x_m}$$

[illegible]

$$\frac{e_{2a-1}^2 - al(u_1\ldots)_{2a-1}}{a_{2a-1} - x_\nu}$$

[illegible] $, 1$

$$\sum_a \frac{e_{2a-1}^2\, al^2(u_1\ldots)_{2a-1}}{(a_{2a-1} - x_\nu)(x_m - a_{2a-1})} = 0 \quad m \gtrless \nu$$

$$\sum_a \frac{e_{2a-1}^2\, al^2(u_1\ldots)_{2a-1}}{(a_{2a-1} - x_\nu)(x_\nu - a_{2a-1})} = \frac{\mathcal{L}'(x_\nu)}{\mathcal{P}(x_\nu)}$$

$$\sqrt{R x_\nu} = \frac{(a_{2b-1} - x_\nu)\, \mathcal{P} x_\nu}{e_{2b-1}^2\, al^2(u_1\ldots)_{2b-1}} \sum_a \frac{e_{2a-1}^2\, al(u_1\ldots)_{2a-1}}{a_{2a-1} - x_\nu} \cdot \frac{\partial\, al(u_1\ldots)_{2a-1}}{\partial u_b}$$

[illegible] $1, 2, \ldots e$:

(23) $$\frac{\partial\, al(u_1\ldots)_\alpha}{e_n\, \partial u_n} = \sqrt{\frac{-\mathcal{Q} a_{2n-1}}{\mathcal{P}' a_{2n-1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a_{2n-1} - a_\alpha}}\, al^2(u_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1 \overset{2n-1}{w_1}\ldots)_\alpha$$

$$= \sqrt{\frac{-\mathcal{Q} a_{2n-1}}{\mathcal{P}' a_{2n-1}}} \cdot \frac{i^{2n-1/\alpha}}{\sqrt{a_{2n-1} - a_\alpha}}\, al(u_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1\ldots)_{2n-1,\alpha}$$

[illegible] (12, 13) $\alpha_1 \ldots \alpha_\rho = 1, 3, \ldots 2n-1$, $x_0 = a_\beta$ [illegible] $w_n = 0$

$v_n = \overset{\beta}{w}_n$, $\sigma_1 \ldots {}^0/_{2n+1} \ldots {}^{2n}/_{2n+1}$ $= n+1-w$; $\bar{\alpha} = n-1$ [illegible]

$$\sqrt[4]{\frac{-\mathcal{Q} a_{2n-1}}{\mathcal{P}' a_{2n-1}}} = \sqrt{a_\beta - a_{2n-1}}\, (\overset{\beta}{w}_1 \ldots)_{2n-1}$$

[illegible] $\quad e_n \sqrt[4]{\frac{-\mathcal{Q} a_{2n-1}}{\mathcal{P}' a_{2n-1}}} = g_n$ [illegible]

(24) $$\frac{\partial\, al(u_1\ldots)_\beta}{g_n\, \partial u_n} = i^{\beta/2n-1}\, al(\overset{\beta}{w}_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1\ldots)_{\beta/2n-1}$$

[illegible] $$\sum_a \frac{1}{2} \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{\sqrt{R\xi}}{(x-\xi)\, \mathcal{P}\xi} \cdot \frac{\mathcal{P}x}{\sqrt{Rx}}\, dx, \quad \mathcal{H}(u_1 \ldots u_n)$$

[illegible]

$$\frac{1}{2} \int_{x_0}^{\infty} \frac{\sqrt{R\xi}}{(x-\xi)\, \mathcal{P}\xi} \cdot \frac{\mathcal{P}x}{\sqrt{Rx}}\, dx = \sigma$$

$$\frac{1}{2}\int_{a_\alpha}^{\infty}\frac{\sqrt{R\xi}}{(x-\xi)D\xi}\,\frac{P_x}{\sqrt{Rx}}\,dx=\overset{\alpha}{\sigma}$$

$$v_\alpha\; w_\alpha=\int_{\xi}^{\infty}\frac{P_x\,dx}{(x-a_{2\alpha-1})\sqrt{Rx}}$$

[illegible] $\mathcal{U}\ Z_\alpha$

(25) $\mathcal{H}(u_1+v_1\ldots)=\mathcal{H}(u_1\ldots)+\sigma+\frac{1}{2}\log\frac{G\xi+\sqrt{R\xi}}{G\xi-\sqrt{R\xi}}$

[illegible] $\frac{G\xi}{\mathcal{L}\xi}=\frac{\sqrt{Rx_0}}{\mathcal{L}x_0}+w_\xi-Ux_0$.

26

$$\sqrt{x_0-a_\alpha}\;al(u_1+v_1\ldots)_\alpha=\left(\frac{\sqrt{Rx_0}}{\mathcal{L}x_0}-w_{x_0}+w_{a_\alpha}\right)al(u_1\ldots)_\alpha$$

$$\sqrt{\xi-a_\alpha}\;al(u_1+w_1\ldots)_\alpha=\left(\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathcal{L}\xi}-w_\xi+w_{a_\alpha}\right)al(u_1\ldots)_\alpha$$

$$\sqrt{\xi-a_\alpha}\;al(u_1-w_1\ldots)_\alpha=\left(\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathcal{L}\xi}+w_\xi-w_{a_\alpha}\right)al(u_1\ldots)_\alpha$$

$$\sqrt{x_0-a_\alpha}\;al(u_1+v_1\ldots)_\alpha-\sqrt{\xi-a_\alpha}\;al(u_1+w_1\ldots)_\alpha=\frac{G\xi-\sqrt{R\xi}}{\mathcal{L}\xi}$$

$$\sqrt{x_0-a_\alpha}\;al(u_1+v_1\ldots)_\alpha+\sqrt{\xi-a_\alpha}\;al(u_1-w_1\ldots)_\alpha=\frac{G\xi+\sqrt{R\xi}}{\mathcal{L}\xi}$$

(26) $T=\frac{G\xi-\sqrt{R\xi}}{G\xi+\sqrt{R\xi}}=\frac{\sqrt{x_0-a_\alpha}\,al(u_1+v_1\ldots)_\alpha-\sqrt{\xi-a_\alpha}\,al(u_1+w_1\ldots)_\alpha}{\sqrt{x_0-a_\alpha}\,al(u_1+v_1\ldots)_\alpha+\sqrt{\xi-a_\alpha}\,al(u_1-w_1\ldots)_\alpha}$

[illegible] (15) 6

(27) $T=\frac{al(u_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha\,al(u_1+v_1\ldots)_\alpha-al(u_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha\,al(u_1+v_1\ldots)_\alpha}{al(u_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha\,al(u_1+v_1\ldots)_\alpha+al(u_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha\,al(u_1-w_1\ldots)_\alpha}$

[illegible] $\mathcal{U}$

(28) $\mathcal{H}(u_1+\overset{\alpha}{\omega}_1\ldots)=\mathcal{H}(u_1\ldots)+\overset{\alpha}{\sigma}+\frac{1}{2}\lg\frac{-al(u_1+w_1\ldots)_\alpha}{al(u_1-w_1\ldots)_\alpha}$

[illegible] $-u_1,\ldots-u_n$ [illegible] $u_1\ldots u_n$ [illegible]

(29) $T_1=\frac{al(u_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha\,al(u_1-v_1\ldots)_\alpha+al(u_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha\,al(u_1-w_1\ldots)_\alpha}{al(u_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha\,al(u_1-v_1\ldots)_\alpha-al(u_1+w_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha\,al(u_1-w_1\ldots)_\alpha}$

(30) $\mathcal{H}(u_1-v_1\ldots)=\mathcal{H}(u_1\ldots)-\sigma+\frac{1}{2}\log T$

(31) $\mathcal{H}(u_1-\overset{\alpha}{w}_1\ldots)=\mathcal{H}(u_1\ldots)-\overset{\alpha}{\sigma}+\frac{1}{2}\lg\frac{-al(u_1+w_1\ldots)_\alpha}{al(u_1-w_1\ldots)_\alpha}$

[illegible] 15 (β α [illegible])

$$\sqrt{\frac{x_0 - a_\beta}{\xi - a_\beta}} = \frac{al(w_1 + w_1 \ldots)_\beta}{al(\omega_1 + v_1 \ldots)_\beta}$$

(28) β α_1

$$T = \frac{al(w_1+\omega_1\ldots)_\beta\, al(u_1+v_1\ldots)_\beta - al(v_1+\omega_1\ldots)_\beta\, al(u_1+w_1\ldots)_\beta}{al(w_1+\omega_1\ldots)_\beta\, al(u_1+v_1\ldots)_\beta + al(v_1+\omega_1\ldots)_\beta\, al(u_1-w_1\ldots)_\beta}$$

$$T_1 = \frac{al(w_1+\omega_1\ldots)_\beta\, al(u_1-v_1\ldots)_\beta + al(v_1+\omega_1\ldots)_\beta\, al(u_1+w_1\ldots)_\beta}{al(w_1+\omega_1\ldots)_\beta\, al(u_1-v_1\ldots)_\beta - al(v_1+\omega_1\ldots)_\beta\, al(u_1-w_1\ldots)_\beta} \quad (32)$$

$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 1, 3, \ldots 2n-1$ $\omega_n = \overset{1}{\omega}_n + \overset{2n-1}{\omega}_n - \overset{\beta_1}{\omega}_n - \overset{\beta_n}{\omega}_n = 0$

$$T = \frac{al(w_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1\ldots)_{2n-1} - al(v_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1}}{al(w_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1\ldots)_{2n-1} + al(v_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1-w_1\ldots)_{2n-1}}$$

$$T_1 = \frac{al(w_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1\ldots)_{2n-1} + al(v_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1}}{al(w_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1\ldots)_{2n-1} - al(v_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1-w_1\ldots)_{2n-1}} \quad (33)$$

$v_n = \overset{2n-1}{\omega}_n - u'_n$ $u_n + \overset{2n-1}{\omega}_n$ v_n (30)

T_1

(34) $\mathcal{H}(u_1 + v_1 \ldots) = \mathcal{H}(u_1\ldots) + \overset{2n-1}{\sigma} + \frac{1}{2}\log U.$

$$U = \frac{-al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1}}{al(u_1-w_1\ldots)_{2n-1}}\, T' \ldots$$

(35) $$U = \frac{1 + al(u'_1\ldots)_{2n-1}\, al(w_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1+u'_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1}}{1 - al(u'_1\ldots)_{2n-1}\, al(w_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1+u'_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1-w_1\ldots)_{2n-1}}$$

(34, 35) $u'_1, u'_2 \ldots$

(37) $$\frac{\partial \mathcal{H}(u_1\ldots)}{g^n\, \partial u_n} = \frac{1}{2} al(w_1\ldots)_{2n-1}\, al(u_1\ldots)_{2n-1} \left(al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1} - al(u_1-w_1\ldots)_{2n-1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1} + al(u_1-w_1\ldots)_{2n-1}\right) = \frac{R\xi\, al(u_1\ldots)_{2n-1}}{\sqrt{\xi - a_{2n-1}}\, \mathcal{L}\xi}$$

$$\frac{\sqrt{R\xi}}{\sqrt{\xi - a_{2m}}\, P\xi} = \frac{al(w_1\ldots)_{2m}}{al(v_1\ldots)_{2m}}, \quad \frac{\sqrt{\xi - a_{2m}}}{\sqrt{\xi - a_{2n-1}}} = \frac{al(w_1\ldots)_{2m,2n-1}}{al(v_1\ldots)_{2m,2n-1}}$$

$$\frac{\mathcal{L}\xi}{P\xi} = 1 + \sum_{m} al^2(w_1\ldots)_{2m-1}\, al^2(u_1\ldots)_{2m-1}$$

k

$$(38)\quad \frac{\partial \mathcal{H}(u_1 \ldots)}{g_n\, \partial u_n} = \frac{al(w_1 \ldots)_{2n-1}\, al(w_1 \ldots)_{2m}\, al(w_1 \ldots)_{2m,0}\, al^2(u_1 \ldots)_{2n-1}}{al(0_1 \ldots)_{2m}\, al(0_1 \ldots)_{2m,2n-1} \left\{1 + \sum_a al^2(u_1 \ldots)_{2a-1}\, al^2(u_1 \ldots)_{2a-1}\right\}}$$

$$(39)\quad g_n = v_n \sqrt[4]{\frac{-\mathfrak{Q} a_{2n-1}}{\mathfrak{P}' a_{2n-1}}}$$

[illegible] $\sqrt[4]{\frac{-\mathfrak{Q} a_{2n-1}}{\mathfrak{P}' a_{2n-1}}} = \sqrt{a_{2m} - a_{2n-1}}\, al(u_1^{2m} \ldots)_{2n-1} = \frac{i^{2m/2n-1} \sqrt{a_{2m} - a_{2n-1}}\, al(0 \ldots)_{2m,2n-1}}{al(0_1 \ldots)_{2m}}$

[illegible] $v_n' = v_n\, i^{-2m/2n-1} \sqrt{a_{2m} - a_{2n-1}}$ [illegible]

$$(40)\quad \frac{\partial \mathcal{H}(u_1 \ldots)}{v_n'\, \partial u_n} = \frac{al(w_1 \ldots)_{2n-1}\, al(w_1 \ldots)_{2m}\, al(w_1 \ldots)_{2m,2n-1}\, al^2(u_1 \ldots)_{2n-1}}{(-1)^{2m/2n-1}\, al^2(0 \ldots)_{2m} \left\{1 + \sum_a al^2(w_1 \ldots)_{2a-1}\, al^2(u_1 \ldots)_{2a-1}\right\}}$$

[illegible] ξ [illegible] a_{2m-1} [illegible]

$$\eta = \frac{\mathfrak{P}\xi}{\sqrt{R\xi}}$$

[illegible] $\eta^2 = \frac{\mathfrak{P}\xi}{\mathfrak{Q}\xi} = \frac{\mathfrak{P}' a_{2m-1}}{\mathfrak{Q} a_{2m-1}} (\xi - a_{2m-1}) + \ldots$

[illegible] $\xi - a_{2m-1} = \frac{\mathfrak{Q} a_{2m-1}}{\mathfrak{P}' a_{2m-1}} \eta^2 + \ldots$

[illegible] $\mathcal{H}(u_1 \ldots)$ [illegible] $\frac{1}{x - \xi} = \frac{1}{x - a_{2m-1}} + \frac{\xi - a_{2m-1}}{(x - a_{2m-1})^2} + \ldots$

[illegible] $\frac{f_\eta u}{\eta} + f_1(u)\eta + \ldots$ [illegible]

$$C_a\, w_a' = \int_{a_{2m-1}}^{\xi} \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{P}_\xi\, d\xi}{(\xi - a_{2m-1})\sqrt{R\xi}} = v_a\, w_a^{2m-1} - c_a w_a \,;\; w_a = \omega_a^{2m-1} - w_a'$$

[illegible] $w_m' = \frac{\eta}{v_m} +$ [illegible] η, [illegible] w_a', [illegible]

[illegible] η [illegible] (25, 30) [illegible] η,

[illegible]

$$v_m f_1 u = \sum_a \int_{a_{2a-1}}^{x_0} \frac{1}{2} v_m \frac{\mathfrak{Q} a_{2m-1}}{\mathfrak{P}' a_{2m-1}} \frac{\mathfrak{P}_x\, dx}{(x - a_{2m-1})^2 \sqrt{R x}} = \mathcal{H}(u_1 \ldots)_m$$

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{1}{2} v_m \frac{\mathfrak{Q} a_{2m-1}}{\mathfrak{P}' a_{2m-1}} \frac{\mathfrak{P}_x\, dx}{(x - a_{2m-1}) \sqrt{R x}} = \sigma_m$$

[illegible] σ_m^a [illegible] σ_m [illegible] $x_0 = v_a$ [illegible]

$$\mathcal{H}(u_1+v_1\ldots)_m = \mathcal{H}(u_1\ldots)_m + \sigma_m + \frac{al(v_1\ldots)_{2m-1}\, g_m}{al(u_1\ldots)_{2m-1}\, al(u_1+v_1\ldots)_{2m-1}}$$

$$\mathcal{H}(u_1-v_1\ldots)_m = \mathcal{H}(u_1\ldots)_m - \sigma_m - g_m \frac{al(v_1\ldots)_{2m-1}}{al(u_1\ldots)_{2m-1}\, al(u_1-v_1\ldots)_{2m-1}}.$$

[illegible] (37) [illegible] $l_{2n-1} = \sqrt{-\frac{R(a_{2m-1})}{\mathfrak{P}'(a_{2m-1})}}$ [illegible]

[illegible] $al(u_1\ldots)_{2n-1} = \sqrt{\frac{l_{2n-1}}{\xi - a_{2n-1}}}$.

$$\frac{\partial \mathcal{H}(u_1\ldots)}{v_n\, \partial u_n} = \frac{l_{2n-1}\sqrt{R\xi}}{(\xi - a_{2n-1})\,\mathfrak{L}'\xi}\, al^2(u_1\ldots)_{2n-1} = \frac{l_{2n-1}\sqrt{R\xi}\, al^2(u_1\ldots)_{2n-1}}{(\xi - a_{2n-1})\, \mathfrak{P}_\xi\, N_\xi}$$

[illegible] $N_\xi = 1 + \sum \frac{l_{2n-1}}{\xi - a_{2n-1}}\, al^2(u_1\ldots)_{2n-1}$:

[illegible] ξ [illegible] a_{2m-1} [illegible]

[illegible]

(42) $$\frac{\partial \mathcal{H}(u_1\ldots)_m}{v_n v_m\, \partial u_n} = \frac{l_{2n-1}\, l_{2m-1}}{a_{2n-1} - a_{2m-1}}\, \frac{al^2(u_1\ldots)_{2n-1}}{al^2(u_1\ldots)_{2m-1}}.$$

[illegible] $n = m$:

(42a) $$\frac{\partial \mathcal{H}(u_1\ldots)_m}{v_m v_n\, \partial u_m} = \frac{l_{2m-1}}{al^2(u_1\ldots)_{2m-1}} + \sum' \frac{l_{2n-1}\, l_{2m-1}\, al^2(u_1\ldots)_{2n-1}}{(a_{2m-1} - a_{2n-1})\, al^2(u_1\ldots)_{2m-1}}$$

[illegible]

(43) $$d\mathcal{H}(u_1\ldots)_m = \frac{v_m^2\, l_{2m-1}\, du_m}{al^2(u_1\ldots)_{2m-1}} + \sum_n' \frac{v_m\, l_{2m-1}\, l_{2n-1}\, al^2(u_1\ldots)_{2n-1}\,(v_m\, du_m - v_n\, du_n)}{(a_{2m-1} - a_{2n-1})\, al^2(u_1\ldots)_{2m-1}}$$

[illegible] (28) [illegible] $w_1 = \overset{2m-1}{w_1} - w'_1$.

$$\mathcal{H}(u_1 + \overset{\alpha}{w}_1\ldots)_m = \mathcal{H}(u_1\ldots)_m + \overset{\alpha}{\sigma}_m + \left[\log \frac{-al(u_1 + \overset{2m-1}{w_1} - w'_1\ldots)_\alpha}{al(u_1 - \overset{2m-1}{w_1} + w'_1\ldots)_\alpha}\right]_{w'}^{=}$$

$$= \mathcal{H}(u_1\ldots)_m + \overset{\alpha}{\sigma}_m - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial\, al(u_1 + \overset{2m-1}{w_1}\ldots)_\alpha}{al(u_1 + \overset{2m-1}{w_1}\ldots)_\alpha\, \partial u_m} + \frac{\partial\, al(u_1 - \overset{2m-1}{w_1}\ldots)_\alpha}{al(u_1 - \overset{2m-1}{w_1}\ldots)_\alpha\, \partial u_m}\right\}$$

[illegible]

(44) $$\frac{\partial \log al(u_1 + \overset{2m-1}{w_1}\ldots)_\alpha}{\partial u_m} = \mathcal{H}(u_1\ldots)_m + \overset{\alpha}{\sigma}_m - \mathcal{H}(u_1 + \overset{\alpha}{w}_1\ldots)_m$$

(45) $$\frac{\partial \log al(u_1\ldots)_\alpha}{\partial u_m} = \mathcal{H}(u_1 - \overset{2m-1}{w_1}\ldots)_m + \overset{\alpha}{\sigma}_m - \mathcal{H}(u_1 + \overset{\alpha}{w}_1 - \overset{2m-1}{w_1}\ldots)_m$$

[illegible] 41 [illegible]

$$\frac{\partial H(u_1 - \overset{2m-1}{w_1} \cdots)_m}{v_m\, v_n\, \partial u_m} = -\frac{l_{2n-1}\, l_{2m-1}}{a_{2n-1} - a_{2m-1}}\, al(u_1 \ldots)_{2m-1}\, al(u_1 + \overset{2m-1}{w_1} \cdots)_{2n-1}$$

$$= \frac{(-1)^{2m-1/2n-1}\, l_{2m-1}\, l_{2n-1}}{a_{2m-1} - a_{2n-1}}\, al^2(u_1 \ldots)_{2m-1,\, 2n-1}$$

[illegible]

$$\frac{\partial H(u_1 - \overset{2m-1}{w_1} \cdots)_m}{\partial u_m} = \frac{\partial H(u_1 - \overset{2n-1}{w_1} \cdots)_n}{\partial u_m}.$$

[illegible]

$$\sum_n \left(-\overset{2n-1}{\sigma_n} - H(u_1 - \overset{2n-1}{w_1} \cdots)_n\right) du_n$$

[illegible] $Al(u_1 \ldots u_n)$ [illegible]

(47) $d \log Al(u_1 \ldots) = \sum_n \left\{ -\overset{2n-1}{\sigma_n} - H(u_1 - \overset{2n-1}{w_1} \cdots)_n \right\} du_n$

[illegible]

(48) $al(u_1 \ldots)_\alpha = \dfrac{Al(u_1 \ldots)_\alpha}{Al(u_1 \ldots)}$

[illegible] (49) $d \log Al(u_1 \ldots)_\alpha = \sum_n \left(\overset{\alpha}{\sigma_n} - \overset{2n-1}{\sigma_n} - H(u_1 + \overset{\alpha}{w_1} - \overset{2n-1}{w_1} \cdots)_n \right) du_n$

[illegible] $d H(u_1 \ldots)_m$ [illegible]

$$d H(u_1 - \overset{2m-1}{w_1} \cdots)_m = -v_m^2\, l_{2m-1}\, al^2(u_1 \ldots)_{2m-1}\, du_m$$

$$+ \sum' \frac{(-1)^{2m-1/2n-1}\, v_m\, l_{2n-1}\, l_{2m-1}}{a_{2m-1} - a_{2n-1}}\, al(u_1 \ldots)_{2m-1}\, (i_m\, du_m - i_n\, du_n)$$

[illegible] $u_1 \ldots$ [illegible] $x_1 \ldots x_n$ [illegible] $a_1 \ldots a_{2n-1}$ [illegible]

$\eta_n = \dfrac{P x_a}{\sqrt{R x_a}}$ [illegible] $H(u_1 \ldots)_m$ [illegible] $\eta_1\, \eta_2 \ldots$ [illegible]

$$H(u_1 \ldots)_m = -v_m \sum_n \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{1}{2} \frac{P_{2m-1}\, P x\, dx}{(x - a_{2m-1})^2 \sqrt{Rx}}$$

[illegible] $x_n - a_{2n-1} = -l_{2n-1}\, \eta_n^2 + \cdots$

$$dx_n = 2 l_{2n-1}^2\, \eta_n\, d\eta_n$$

$$H(u_1 \ldots)_m = -i_m \int_0^{\eta_m} \frac{-\, d\eta_m}{\eta^2_m} + \ldots$$ [illegible] $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = 0$ [illegible]

$$\mathcal{H}(u_1 \cdot\cdot)_m = -\frac{i_m}{\eta_m} + \mathfrak{F}(\eta_1 \cdot\cdot \eta_m)$$

$\mathfrak{F}(\eta_1 \cdot\cdot \eta_m)$ [illegible] $\eta_1 = \cdot\cdot = \eta_n = 0$ [illegible]

$$\frac{\partial \log al(u_1 \cdot\cdot)_{2m-1}}{\partial u_m} = -\mathcal{H}(u_1 \cdot\cdot)_m + \overset{2m-1}{\sigma_m} + \mathcal{H}(u_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \cdot\cdot)_m$$

[illegible] $al(u_1 \cdot\cdot)_{2m-1} = g_m(v_m u_m + \cdot\cdot) = g_m \eta_m + \cdot\cdot\cdot$

[illegible]

$$\frac{\partial \log al(u_1 \cdot\cdot)_{2m-1}}{\partial u_m} = \frac{i_m}{\eta_m} + \mathfrak{F}(\eta_1 \cdot\cdot \eta_m)$$

[illegible] $\overset{2m-1}{\sigma_m} + \mathcal{H}(u_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \cdot\cdot)_m =$ [illegible] $\eta_1 = \eta_2 = \cdot\cdot = 0$ [illegible]

[illegible] $\log Al(u_1 \cdot\cdot)$, [illegible]

[illegible] $\eta_1 \cdot\cdot \eta_n$ [illegible] $u_1 \cdot\cdot u_n$ [illegible] $u_1 = \cdot\cdot = 0$ [illegible]

[illegible] $u_1 \cdot\cdot u_n$ [illegible] $Al(u_1 \cdot\cdot u_n)$ [illegible]

$$(50)\quad Al(u_1 \cdot\cdot) = 1 + (u_1 u_2 \cdot\cdot)_2 + (u_1 u_2 \cdot\cdot)_4 + \cdot\cdot$$

[illegible] (49) [illegible] $w = 0$, $u - \overset{2m-1}{\omega}$ [illegible]

$$(51)\quad \mathcal{H}(u_1 + w_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \cdot\cdot)_m = \mathcal{H}(u_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \cdot\cdot)_m + \sigma_m - g_m al(w_1 \cdot\cdot)_{2m-1} al(u_1 \cdot\cdot)_{2m-1} al(u_1 + w_1 \cdot\cdot)_{2m-1}$$

$$\mathcal{H}(u_1 - w_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \cdot\cdot)_m = \mathcal{H}(u_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \cdot\cdot)_m - \sigma_m + g_m al(w_1 \cdot\cdot)_{2m-1} al(u_1 \cdot\cdot)_{2m-1} al(u_1 - w_1 \cdot\cdot)_{2m-1}$$

[illegible] $\sigma_m = -\int_{\xi}^{\infty} \frac{1}{2} v_m\, l^2_{2m-1} \frac{P_x\, dx}{(x - a_{2m-1})^2 \sqrt{R_x}}$ [illegible]

$$\mathcal{H}(u_1 + w_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \cdot\cdot) - \mathcal{H}(u_1 - w_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \cdot\cdot) - 2\sigma_m = -g_m al(w_1 \cdot\cdot)_{2m-1} al(u_1 \cdot\cdot)_{2m-1} \left\{ al(u_1 + w_1 \cdot\cdot)_{2m-1} + al(u_1 - w_1 \cdot\cdot)_{2m-1} \right\}$$

$$\frac{\partial \log Al(u_1 + w_1 \cdot\cdot)}{\partial u_m} - \frac{\partial \log Al(u_1 - w_1 \cdot\cdot)}{\partial u_m} + 2\sigma = 2\frac{\partial \mathcal{H}(u_1 \cdot\cdot)}{\partial u_m}$$

$$(52)\quad \mathcal{H}(u_1 \cdot\cdot) = \sum_{\alpha} \sigma_\alpha u_\alpha + \frac{1}{2} \log \frac{Al(u_1 + w_1 \cdot\cdot)}{Al(u_1 - w_1 \cdot\cdot)}$$

[illegible] (49) [illegible] ξ [illegible] $u_\alpha - \overset{2m-1}{\omega_\alpha}$ [illegible] u_α [illegible]

$$\mathcal{H}(u_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} + w_1 \cdot\cdot)_m = \mathcal{H}(u_1 - \overset{2m-1}{w_1} \cdot\cdot)_m + \sigma_m - g_m al(w_1 \cdot\cdot)_{2m-1} al(u_1 \cdot\cdot)_{2m-1} al(u_1 + w_1 \cdot\cdot)_{2m-1};$$

1, [illegible] $u_1 = u_2 = \dots = 0$, $\mathcal{H}(u_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \dots) = -\overset{2m-1}{\sigma_m}$ [illegible]

(53) $\sigma_m = \overset{2m-1}{\sigma_m} + \mathcal{H}(u_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \dots)_m$

[illegible]

$$\frac{\partial Al(u_1 \dots)}{Al(u_1 \dots)\,\partial u_m}, \quad Al^{m}(u_1 \dots)_0, \quad 47$$

$$\mathcal{H}(u_1 - \overset{2m-1}{\omega_1} \dots)_m = -\overset{2m-1}{\sigma_m} - \overset{m}{Al}(u_1 \dots)$$

$$\sigma_m = -\overset{m}{Al}(u_1 \dots)$$

[illegible]

(54) $\mathcal{H}(u_1 \dots) = -\sum_\alpha \overset{\alpha}{Al}(u_1 \dots)\, u_\alpha + \frac{1}{2} \lg \frac{Al(u_1 + w_1 \dots)}{Al(u_1 - w_1 \dots)}$

[illegible] (1) [illegible] $dx_1 \dots dx_n$, $du_1 \dots du_n$ [illegible]

$$\frac{L(x)}{(x_\alpha - x) P_x} = \sum_n \frac{L a_{2n-1}}{(x_\alpha - a_{2n-1})(x - a_{2n-1}) P' a_{2n-1}}$$

$$0 = \sum_n \frac{L a_{2n-1}}{(x_\alpha - a_{2n-1})(x_m - a_{2n-1}) P' a_{2n-1}} \quad \alpha \gtrless m$$

$$-\frac{L'(x_m)}{P x_m} = \sum_n \frac{L a_{2n-1}}{(x_m - a_{2n-1})^2 P' a_{2n-1}}$$

[illegible] (1) [illegible] $\frac{L a_1}{(x_m - a_1) P' a_1}, \dots \frac{L a_n}{(x_m - a_{2n-1}) P' a_{2n-1}}$

$$\sum_n \frac{\varepsilon_n L a_{2n-1}\, du_n}{(x_m - a_{2n-1}) P' a_{2n-1}} = \sum_{\alpha, n} \frac{1}{2} \frac{L a_{2n-1}}{(x_\alpha - a_{2n-1})(x_m - a_{2n-1}) P' a_{2n-1}} \frac{dx_\alpha}{\sqrt{R x_\alpha}}$$

[illegible]

$$-L' x_m \frac{dx_m}{2\sqrt{R x_m}}$$

(55) $dx_m = -\sum_n \frac{2 \varepsilon_n L a_{2n-1}\, du_n}{(x_m - a_{2n-1}) P' a_{2n-1}} \frac{\sqrt{R x_m}}{L' x_m}.$

[illegible] $\frac{dL\xi}{L\xi} = \sum_\alpha \frac{dx_\alpha}{x_\alpha - \xi} = -\sum \frac{2 \varepsilon_n L a_{2n-1}\, du_n}{(x_\alpha - a_{2n-1}) P' a_{2n-1}} \frac{\sqrt{R x_\alpha}}{L' x_\alpha}.$

$$(56a)\quad \frac{1}{2}\,\frac{d\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{L}\xi} = -\sum{}' \frac{v_n\,\mathfrak{L}a_{2n-1}\,du_n}{\mathfrak{P}'a_{2n-1}}\left(\frac{W\xi - Wa_{2n-1}}{\xi - a_{2n-1}}\right)$$

[illegible]

$$-\frac{W\xi - Wa_{2n-1}}{\xi - a_{2n-1}} = \frac{al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1} - al(u_1-w_1\ldots)_{2n-1}}{2\sqrt{\xi - a_{2n-1}}\;al(u_1\ldots)_{2n-1}}$$

[illegible]

$$\frac{1}{\xi - a_{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{l_{2n-1}}}\,al(w_1\ldots)_{2n-1}$$

$$\frac{\mathfrak{L}a_{2n-1}}{\mathfrak{P}'a_{2n-1}} = l_{2n-1}\,al^2(u_1\ldots)_{2n-1}$$

[illegible]

$$(56)\quad \frac{d\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{L}\xi} = \sum_n \epsilon_n\sqrt{l_{2n-1}}\,al(w_1\ldots)_{2n-1}\,al(u_1\ldots)_{2n-1}\left\{al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1} - al(u_1-w_1\ldots)_{2n-1}\right\}$$

[illegible]

$$(57)\quad -d\lg Al(u_1-w_1\ldots) + d\lg Al(u_1+w_1\ldots) = -2\sum_n \sigma_n\,du_n + \sum_n \epsilon_n\sqrt{l_{2n-1}}\,al(w_1\ldots)_{2n-1}\,al(u_1\ldots)_{2n-1}\left\{al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1} + al(u_1-w_1\ldots)_{2n-1}\right\}du_n$$

[illegible]

$$\frac{d\mathfrak{L}(\xi)}{\mathfrak{L}\xi} + d\lg Al(u_1+w_1\ldots) - d\lg Al(u_1-w_1\ldots) = -2\sum \sigma_n\,du_n + 2\sum_n g_n\,al(u_1\ldots)_{2n-1}\,al(w_1\ldots)_{2n-1}\,al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1}\,du_n$$

[illegible]

$$H(u_1+w_1 - \overset{2n-1}{\omega_1}\ldots)_n = H(u_1 - \overset{2n-1}{w_1}\ldots)_n + \sigma_n - g_n\,al(u_1\ldots)_{2n-1}\,al(w_1\ldots)_{2n-1}\,al(u_1+w_1\ldots)_{2n-1}$$

[illegible]

$$\frac{d\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{L}\xi} = d\lg Al(u_1+w_1\ldots) + d\lg Al(u_1-w_1\ldots) - 2\lg Al(u_1\ldots)$$

[illegible]

$$(58)\quad \frac{\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{P}\xi} = \frac{Al(u_1+w_1\ldots)\,Al(u_1-w_1\ldots)}{Al^2(u_1\ldots)\,Al^2(w_1\ldots)}$$

[illegible] $u_1\ldots = u_n = 0$, $\mathfrak{L}\xi = \mathfrak{P}\xi$

$Al(0, \ldots 0) = 1$ … (54) …

$$\mathcal{H}(u_1 \ldots) = -\sum_1 u_n \overset{\alpha}{Al}(w_1 \ldots) + \lg Al(u_1 + w_1 \ldots) - \tfrac{1}{2} \lg \frac{Al(u_1 + w_1 \ldots)}{Al(u_1 - w_1 \ldots)}$$

$$- \tfrac{1}{2} \lg \left(Al(u_1 + w_1 \ldots) Al(u_1 - w_1 \ldots) \right) = - \lg Al(u_1 \ldots) - \lg Al(w_1 \ldots) - \tfrac{1}{2} \lg \frac{\Delta_\xi}{D_\xi}$$

$$= - \lg Al(u_1 \ldots) - \lg Al(w_1 \ldots) - \tfrac{1}{2} \sum_{n}^{\varrho} \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{dx_n}{x_n - \xi}.$$

$$(58a) \quad \lg \frac{Al(u_1 + w_1 \ldots)}{Al(w_1 \ldots) Al(u_1 \ldots)} = - \sum_{n}^{\varrho} \overset{\alpha}{Al}\, u_n + \sum_{n}^{\varrho} \tfrac{1}{2} \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{\sqrt{R\xi}}{D\xi} \frac{D_x}{\sqrt{R x}} \frac{dx}{x - \xi}$$

$$(59) \quad e^{\sum_1^\varrho \int_{a_{2n-1}}^{x_n} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{R\xi}}{D\xi} \cdot \frac{D_x}{\sqrt{Rx}}\right) \frac{dx}{x - \xi}} = e^{-\sum_n^\varrho \overset{\alpha}{Al}\, u_n} \frac{Al(u_1 + w_1 \ldots)}{Al(w_1 \ldots) Al(u_1 \ldots)}$$

… (56) … ξ …

$$al(v_1 \ldots)_{2n} - al(u_1 \ldots)_{2n-1} \left\{ al(u_1 + v_1 \ldots)_{2n-1} - al(u_1 - v_1 \ldots)_{2n-1} \right\}$$

$$= \frac{1}{c_n \sqrt{l_{2n-1}}} \frac{\partial \lg \mathfrak{L}_{x_0}}{\partial u_n}$$

… (57) … (58)

$$al(w_1 \ldots)_{2n-1} al(u_1 \ldots)_{2n-1} \left\{ al(u_1 + w_1 \ldots)_{2n-1} + al(u_1 - w_1 \ldots)_{2n-1} \right\} = 2 \frac{\partial \mathcal{H}(u_1 \ldots)}{g_n \, \partial u_n}$$

$$= 2 \frac{al(w_1 \ldots)_{2n-1} al(w_1 \ldots)_{2m} al(w_1 \ldots)_{2m, 2n-1} al^2(w \ldots)_{2n-1}}{al(0_1 \ldots)_{2m} al(0_1 \ldots)_{2m, 2n-1} N\xi}$$

… ξ …

$$(60) \quad al(u_1 + v_1 \ldots)_{2n-1} = \frac{al(v_1 \ldots)_{2n-1} al(v_1 \ldots)_{2m} al(u_1 \ldots)_{2m} al(u_1 \ldots)_{2m, 2n-1}}{al(0 \ldots)_{2m} al(0_1 \ldots)_{2m, 2n-1} N x_0}$$

$$+ \frac{1}{c_n \sqrt{l_{2n-1}}} \frac{\partial \lg N x_0}{al(v_1 \ldots)_{2n-1} al(u_1 \ldots)_{2n-1} \partial u_n}.$$

… (49) $u_n - \overset{\alpha}{w}_n$ … u_n …

$$d \lg Al(u_1 - \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)_\alpha = \sum_1 \overset{\alpha}{\sigma}_n \, du_n + d \lg Al(u_1 \ldots)$$

…

$$Al(u_1 - \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)_\alpha = C\, e^{\Sigma_1 \overset{\alpha}{\sigma}_n u_n} Al(u_1 \ldots)$$

[illegible]

$$Al(-u_1 \ldots)_\alpha = (-1)^\alpha Al(u_1 \ldots)_\alpha$$

$$Al(u_1 + \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)_\alpha = (-1)^\alpha e^{-2\Sigma_1 \overset{\alpha}{\sigma}_n u_n} Al(u_1 - \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)_\alpha$$

$$al(u_1 + \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)_\alpha = al(u_1 - \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)_\alpha$$

$$\frac{Al(u_1 + \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)_\alpha}{Al(u_1 + \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)} = \frac{Al(u_1 - \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)_\alpha}{Al(u_1 - \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)}$$

$$Al(u_1 + \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots) = (-1)^\alpha e^{-2\Sigma_1 \overset{\alpha}{\sigma}_n u_n} Al(u_1 - \overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots)$$

$$(\underline{61})\quad Al(u_1 + 2\overset{\alpha}{\omega}_1 \ldots) = (-1)^\alpha e^{-2\Sigma_1 \overset{\alpha}{\sigma}_n (u_n + \overset{\alpha}{\omega}_n)} Al(u_1 \ldots)$$

[illegible] $u + 2\overset{\beta}{\omega}$ [illegible] $\beta \gtrless \alpha$ [illegible]

$$Al(u_1 + 2\overset{\alpha}{\omega}_1 + 2\overset{\beta}{\omega}_1 \ldots) = (-1)^{\alpha+\beta} e^{-2\Sigma_1 (\overset{\alpha}{\sigma}_n + \overset{\beta}{\sigma}_n)(u_n + \overset{\alpha}{\omega}_n + \overset{\beta}{\omega}_n) + 2\Sigma_1(\overset{\alpha}{\omega}_n \overset{\beta}{\sigma}_n - \overset{\beta}{\omega}_n \overset{\alpha}{\sigma}_n)} \cdot Al(u_1 \ldots)$$

[illegible] α [illegible] β [illegible]

$$e^{2\Sigma(\overset{\alpha}{\omega}_n \overset{\beta}{\sigma}_n - \overset{\beta}{\omega}_n \overset{\alpha}{\sigma}_n)} = e^{-2\Sigma_1(\overset{\alpha}{\omega}_n \overset{\beta}{\sigma}_n - \overset{\beta}{\omega}_n \overset{\alpha}{\sigma}_n)}$$

$$e^{4\Sigma_n(\overset{\alpha}{\omega}_n \overset{\beta}{\sigma}_n - \overset{\beta}{\omega}_n \overset{\alpha}{\sigma}_n)} = 1$$ [illegible]

$\sum_n (\overset{\alpha}{\omega}_n \overset{\beta}{\sigma}_n - \overset{\beta}{\omega}_n \overset{\alpha}{\sigma}_n)$ [illegible] $\frac{\pi i}{2}$ [illegible]

$$\overset{\alpha}{\omega}_n = \int_{a_\alpha}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{P_x\, dx}{(x - a_{2n-1})\sqrt{R_x}} \qquad \overset{\beta}{\sigma}_n = \int_{a_\beta}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{c_n\, Q a_{2n-1}}{P' a_{2n-1}} \frac{P_y}{(y - a_{2n-1})^2} \frac{dy}{\sqrt{R_x}}$$

$$\sum_n (\overset{\alpha}{\omega}_n \overset{\beta}{\sigma}_n - \overset{\beta}{\omega}_n \overset{\alpha}{\sigma}_n) = \int_{a_\alpha}^{\infty}\int_{a_\beta}^{\infty} \sum_1 \frac{1}{4} \frac{Q a_{2n-1}}{P' a_{2n-1}} \left(\frac{1}{y - a_{2n-1}} - \frac{1}{x - a_{2n-1}}\right) \frac{P_x P_y}{(x - a_{2n-1})(y - a_{2n-1})} \frac{dx}{\sqrt{R_x}} \frac{dy}{\sqrt{R_y}}$$

[illegible] x, [illegible] y [illegible]

[illegible] ξ

$$\frac{Q(\xi)}{(\xi - x)(\xi - y) P_\xi} = \frac{Q_x}{(x - y)(\xi - x) P_x} + \frac{Q_y}{(y - x)(\xi - y) P_y} + \Sigma_1 \frac{Q a_{2n-1}}{(x - a_{2n-1})(y - a_{2n-1})(\xi - a_{2n-1}) P' a_{2n-1}}$$

[illegible] $(\xi - x)(\xi - y) P_\xi$ [illegible] ξ^{n+1} [illegible]

$$1 = \frac{Q_x}{(x-y)P_x} + \frac{Q_y}{(y-x)P_y} + \sum_n \frac{Q(a_{2n-1})}{(x-a_{2n-1})(y-a_{2n-1})\,P'a_{2n-1}}$$

[illegible]

$$\frac{1}{x-y}\left(\frac{Q_x}{P_x} - \frac{Q_y}{P_y}\right) = M$$

[illegible]

$$\sum_n \frac{Q a_{2n-1}}{P' a_{2n-1}}\left(\frac{1}{(x-a_{2n-1})(y-a_{2n-1})^2} - \frac{1}{(x-a_{2n-1})^2(y-a_{2n-1})}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}$$

$$\sum_n \left(\overset{\alpha}{\omega}_n \overset{\beta}{\sigma}_n - \overset{\beta}{\omega}_n \overset{\alpha}{\sigma}_n\right) = \frac{1}{4}\int_{a_\alpha}^{\infty}\int_{a_\beta}^{\infty}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\frac{P_x}{\sqrt{R_x}}\frac{P_y}{\sqrt{R_y}}.$$

[illegible]

$$\frac{P_y}{P_x}\frac{\sqrt{R_x}}{(y-x)\sqrt{R_y}} = q \qquad \frac{P_x}{Q_y}\frac{\sqrt{R_y}}{(x-y)\sqrt{R_x}} = p$$

[illegible]

$$q^2 = \frac{1}{(x-y)^2}\frac{Q_x}{P_x}\frac{P_y}{Q_y}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{2q}\left(-\frac{2}{(x-y)^3}\frac{Q_x}{P_x}\frac{P_y}{Q_y} + \frac{1}{(x-y)^2}\frac{P_y}{Q_y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{Q_x}{P_x}\right)$$

$$\frac{1}{q} = \frac{(y-x)P_x\sqrt{R_x}}{P_y\sqrt{R_x}} = \frac{(y-x)P_x P_y}{\sqrt{R_x R_y}} = \frac{(y-x)Q_y}{P_y}\cdot\frac{P_x P_y}{\sqrt{R_x R_y}}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \left\{\frac{1}{(x-y)^2}\frac{Q_x}{P_x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x-y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{Q_x}{P_x}\right\}\frac{P_x P_y}{\sqrt{R_x R_y}}$$

[illegible]

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{1}{(x-y)^2}\left(\frac{Q_x}{P_x} - \frac{Q_y}{P_y}\right) + \frac{1}{x-y}\frac{\partial}{\partial x}\frac{Q_x}{P_x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{(x-y)^2}\left\{\frac{Q_y}{P_y} - \frac{Q_x}{P_x}\right\} + \frac{1}{y-x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{Q_y}{P_y}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\frac{P_x P_y}{\sqrt{R_x R_y}}$$

[illegible] $$\sum_n \left(\overset{\alpha}{\omega}_n \overset{\beta}{\sigma}_n - \overset{\beta}{\omega}_n \overset{\alpha}{\sigma}_n\right) = \frac{1}{2}\int_{a_\alpha}^{\infty}\int_{a_\beta}^{\infty}\left(\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\,dy$$

[illegible] $\alpha<\beta$, [illegible] $a_\alpha > a_\beta$ [illegible] F_x [illegible]

[illegible]

$$\int_{a_\beta}^{\infty}\frac{F_x\,dx}{\sqrt{R_x}} \quad [illegible] \quad \int_{a_\beta}^{-\infty}\frac{F_x\,dx}{\sqrt{R_x}} \quad \text{Etc.}$$

[illegible]

$$\frac{1}{i}\int_{a_\alpha}^{x_0}\int_{a_\beta}^{-y_0}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dx\,dy = J_0$$

[illegible] x_0, y_0 [illegible] $+\infty$ [illegible] =

$$\frac{1}{i}\int_{a_\beta}^{-y_0}\frac{\sqrt{R_{x_0}}}{P_{x_0}}\frac{P_y\,dy}{(y-x_0)\sqrt{R_y}} - \frac{1}{i}\int_{a_\alpha}^{x_0}\frac{\sqrt{R(-y_0)}}{P(-y_0)}\frac{P_x\,dx}{(x+y_0)\sqrt{R_x}}$$

[illegible] $y = x_0$, $x = -y_0$ [illegible] ξ, $-\eta$ [illegible] x, y [illegible]

ξ [illegible] $a_\alpha \sim \infty$

$-\eta$ [illegible] $a_\beta \sim -\infty$

[illegible] $\xi \sim \infty$, [illegible] $-\eta \sim -\infty$ [illegible] $a_0 \dots a_{2n}$ [illegible] $x_0 - y_0$ [illegible]

$$J_0 = \frac{1}{i}\int_{a_\beta}^{-\eta}\frac{\sqrt{R_{x_0}}}{P_{x_0}}\frac{P_y\,dy}{(y-x_0)\sqrt{R_y}} - \frac{1}{i}\int_{a_\alpha}^{\xi}\frac{\sqrt{R(-y_0)}}{P(-y_0)}\frac{P_x\,dx}{(x+y_0)\sqrt{R_x}}$$

$$+\int_{-\eta}^{-y_0}\frac{\sqrt{R_{x_0}}}{P_{x_0}}\frac{P_y\,dy}{(y-x_0)\sqrt{R_y}} - \frac{1}{i}\int_{a_\alpha}^{\xi}\frac{\sqrt{R(-y_0)}}{P(-y_0)}\frac{P_x\,dx}{(x+y_0)\sqrt{R_x}}$$

[illegible] $a_0 \dots a_{2n}$ [illegible] $\frac{P_x}{\sqrt{R_x}}$ [illegible]

$$\frac{P_x}{\sqrt{R_x}} = \frac{1}{x}\left\{1+g_1\frac{1}{x}+\dots\right\}$$

[illegible] $\frac{g_1}{x}+\frac{g_2}{x^2}+\dots$ [illegible] F_x [illegible] J [illegible]

[illegible] J_0 [illegible] $x_0 y_0$ [illegible]

$$\frac{1}{i}\int_{-\eta}^{-y_0} \frac{\sqrt{Rx_0}}{Px_0}\frac{Py\,dy}{(y-x_0)\sqrt{Ry}} - \frac{1}{i}\int_{\xi}^{x_0}\frac{\sqrt{R(-y_0)}}{P(-y_0)}\frac{Px\,dx}{(x+y_0)\sqrt{Rx}}$$

$$= \frac{1}{i}\int_{-\eta}^{-y_0}\frac{1+Fy}{1+Fx_0}\frac{\sqrt{x_0}\,dy}{(y-x_0)\sqrt{y}} - \frac{1}{i}\int_{\xi}^{x_0}\frac{1+Fx}{1+F(-y_0)}\frac{\sqrt{-y_0}}{x+y_0}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

[illegible] x_0 y_0 [illegible]

[illegible]
$$\frac{1+Fy}{1+Fx_0}\frac{1}{y-x_0} = \frac{1}{y-x_0} + \frac{Fy-Fx_0}{y-x_0}\frac{1}{1+Fx_0}$$

$$\frac{Fy-Fx_0}{y-x_0} = -\frac{1}{y x_0}\;\frac{Fy-Fx_0}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x_0}}$$ [illegible]

$$\frac{Fy-Fx_0}{(y-x_0)(1+Fx_0)} = -\frac{1}{x_0 y}\left\{1+S(ab)x_0^{-a}y^{-b}+\dots\right\}$$

[illegible]
$$\int_{-\eta}^{-y_0}\frac{Fy-Fx_0}{y-x_0}\frac{\sqrt{x_0}\,dy}{(1+Fx_0)\sqrt{y}}$$ [illegible] x_0 y_0 [illegible]

[illegible]
$$\int_{\xi}^{x_0}\frac{Fx-F(-y_0)}{x+y_0}\frac{\sqrt{-y_0}\,dx}{1+F(-y_0)\sqrt{x}}$$ [illegible]

[illegible]
$$\frac{1}{i}\int_{-\eta}^{-y_0}\frac{\sqrt{x_0}\,dy}{(y-x_0)\sqrt{y}} - \frac{1}{i}\int_{\xi}^{x_0}\frac{\sqrt{-y_0}}{(x+y_0)}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

[illegible] $\sqrt{Rx}$ [illegible]

[illegible] a_0 $\frac{\sqrt{Rx}}{Px}$ [illegible] a_n [illegible] $-\infty$, $\frac{\sqrt{Rx}}{Px} = i$ [illegible]

[illegible] $\sqrt{x}$ [illegible] $\frac{1}{i}\sqrt{y}$ [illegible]

$$\sqrt{x} = s.\quad \sqrt{x_0} = s_0,\quad \sqrt{y} = it \quad \sqrt{-y_0} = it_0$$

[illegible] t [illegible]

$$\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{x}} = ds \qquad \frac{1}{2}\frac{dy}{\sqrt{y}} = i\,dt$$

[illegible]

$$-i\int_\tau^{t_0}\frac{s_0\,dt}{t^2+s_0^2} - i\int_\sigma^{s_0}\frac{t_0\,ds}{t_0^2+s^2} = -2i\int_{\frac{\sigma_0}{t_0}}^{\frac{s_0}{t_0}}\frac{s_0\,dt}{t^2+s_0^2} = \int_{\frac{\tau}{s}}^{\frac{t_0}{s_0}}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} \sim$$

$$\int_\sigma^{s_0}\frac{t_0\,ds}{t_0^2+s^2} = \int_{\frac{\sigma}{t_0}}^{\frac{\sigma_0}{t_0}}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} \quad ; \quad \int_\tau^{t_0}\frac{s_0\,dt}{t^2+s_0^2} = \int_{\frac{\tau}{s_0}}^{\frac{t_0}{s_0}}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2}$$

[illegible] $t_0=\infty,\ s_0=\infty$ [illegible]

$$2\int_{\frac{\sigma}{t_0}}^{\frac{s_0}{t_0}}\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = 2\int_0^1\frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{\pi}{2}\cdot$$ [illegible]

$\sum_n\left(\overset{\alpha}{\omega}_n \cdots\right) = (-1)\frac{\pi}{2}i$ [illegible] $\alpha<\beta$ [illegible] $\beta\geq\alpha$ [illegible]

$\sum_n\left(\quad\right) = \frac{\pi}{2}i$ [illegible]

(62) $\sum_n\left(\overset{\alpha}{\omega}_n\overset{\beta}{\sigma}_n - \overset{\alpha}{\sigma}_n\overset{\beta}{\omega}_n\right) = (-1)^{\beta/\alpha}\frac{\pi}{2}i.$

[illegible] (61) [illegible] $Al(u_1\ldots)$ [illegible]

$$\omega_n = m_0\overset{0}{\omega}_n + m_1\overset{1}{\omega}_n + \cdots + m_{2n}\overset{2n}{\omega}_n$$
$$\sigma_n = m_0\overset{0}{\sigma}_n + m_1\overset{1}{\sigma}_n + \cdots$$

[illegible] $(m_0, m_1, \ldots$ [illegible]

$\sum m_\alpha m_\beta$ [illegible] $m_0m_1+\cdots+m_0m_{2n}+m_1m_2+\cdots+m_{2n-1}m_{2n}$

[illegible]

(64) $Al(u_1+2\omega_1\ldots) = (-1)^{\sum m_{2n-1}+\sum' m_\alpha m_\beta}\, e^{-\sum\sigma_n(u_n+\omega_n)}\, Al(u_1\ldots)$

[illegible] $\sum m_{2n-1}+\sum' m_\alpha m_\beta$, $\varphi(m_0, m_1, \ldots)$ [illegible]

(65) $(-1)^\varphi\, e^{2\sum\sigma_n(u_n+\omega_n)}\,\frac{Al(u_1+\omega_1\ldots)}{Al(u_1\ldots)}$

[illegible] $m_1\ldots m_{2n}$ [illegible]

[illegible] $m_1 \ldots$ [illegible] $m_0 = \ldots$ [illegible]

$m_{2n} = 0$ [illegible] $= 1$, [illegible] $m_\alpha + 1$ [illegible]

[illegible] $\omega_{n1} + \overset{\alpha}{\omega}_{n}$ [illegible] ω_n, $\sigma_{n1} + \overset{\alpha}{\sigma}_n$ [illegible] σ_n. [illegible]

$$\sum' m_\alpha m_\beta \;[\text{illegible}]\; \sum m'_\alpha m_\beta + (m_0 + \ldots + m_{2n} - m_\alpha)$$

$\sum m_{\lambda n-1}$ [illegible] $\sum m_{\lambda n-1} +$ [illegible]

$$(-1)^\varphi = (-1)^{\varphi + \alpha + (m_0 + \ldots m_{2n} - m_\alpha)}$$

[illegible] $e^{2\sum \sigma_n (u_1 + w_n)} Al(u + 2w_1 \ldots)$ [illegible]

$$e^{2\sum(\overset{\alpha}{\sigma}_n + \sigma_n)(u_{n} + w_n + \overset{\alpha}{w}_n)} Al(u_1 + 2w_1 + 2\overset{\alpha}{w}_1 \ldots) = (-1)^\alpha e^{2\sum(\sigma_n + \overset{\alpha}{\sigma}_n)}$$

$$e^{\sum(u_n + w_n + \overset{\alpha}{w}_n) - \sigma_n(u + 2w_n + \overset{\alpha}{w}_n)} Al(u_1 + 2w_1 \ldots)$$

$$= (-1)^\alpha e^{2\sum(u_n + w_n)\overset{\alpha}{\sigma}_n + 2\sum(\sigma_n \overset{\alpha}{w}_n - \overset{\alpha}{\sigma}_n w_n)} Al(u_1 + 2w_1 \ldots)$$

$$\sum(\sigma_n \overset{\alpha}{w}_n - \ldots) = (m_0 + m_1 + m_{\alpha-1} - m_\alpha - m_{2n})\pi i =$$

$$= \pi i(m_0 + m_1 + \ldots + m_{2n} - m_\alpha) - 2(m_{\alpha+1} \ldots + m_{2n})\pi i$$

[illegible] $m_0 \ldots m_{2n}$ [illegible] $e^{\Sigma} = (-1)^{m_0 + \ldots + m_{2n} - m_\alpha}$

[illegible] m_α [illegible] $m_0\, m_{2n}$

[illegible]

$$Al(u_1 - \overset{\alpha}{w}_1 \ldots)_\alpha = C e^{\sum \overset{\alpha}{\sigma}_n u_n} Al(u_1 \ldots)$$

[illegible] (66) $Al(u_1 \ldots)_\alpha = C e^{2\sum \overset{\alpha}{\sigma}_n (u_n + \overset{\alpha}{w}_n)} Al(u_1 + \overset{\alpha}{w}_1 \ldots)$

[illegible]

$$al(u_1 + \overset{\alpha}{w}_1 \ldots)_\alpha = \frac{\varepsilon^{\alpha - 2\bar{\alpha}}}{al(u_1 \ldots)_\alpha}$$

$$\frac{Al(u_1 + \overset{\alpha}{w}_1 \ldots)_\alpha}{Al(u_1 + \overset{\alpha}{w}_1 \ldots)} = \varepsilon^{\alpha - 2\bar{\alpha}} \frac{Al(u_1 \ldots)}{Al(u_1 \ldots)_\alpha}$$

[illegible] 66 [illegible]

[illegible] $$Al(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha = (-1)^\alpha C e^{-\sum_n \sigma_n^\alpha u_n} Al(u_1\ldots)$$

$$Al(u_1\ldots)_\alpha \, Al(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)_\alpha = (-1)^\alpha C^2 e^{\sum \sigma_n^\alpha \overset{\alpha}{w}_n} Al(u_1\ldots)\, Al(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)$$

[illegible] $$(-1)^\alpha C^2 e^{\sum_n \sigma_n^\alpha \overset{\alpha}{w}_n} = e^{-(\alpha-2\bar\alpha)\frac{\pi i}{2}}$$

[illegible] $$(-1)^\alpha = e^{(\alpha-2\bar\alpha)\pi i}$$

[illegible]

$$C^2 = e^{-(\alpha-2\bar\alpha)\frac{\pi i}{2} - \sum_n \sigma_n^\alpha \overset{\alpha}{w}_n}$$

$$\underline{(67)} \quad Al(u_1\ldots)_\alpha = \pm e^{-(\alpha-2\bar\alpha)\frac{\pi i}{4}} e^{\sum_n \sigma_n^\alpha (u_n + \frac{1}{2}\overset{\alpha}{w}_n)} Al(u_1+\overset{\alpha}{w}_1\ldots)$$

[illegible] $u_1\ldots u_n$ [illegible]

IV.

[illegible] $\omega_{nb} = \overset{2b-1}{\omega}_n - \overset{2b}{\omega}_n$, $\bar\omega_{nb} = \overset{2b-2}{\omega}_n - \overset{2b-1}{\omega}_n$, $\omega'_{nb} = \bar\omega_{n1}+\ldots+\bar\omega_{nb}$

$\eta_{nb} = \overset{2b-1}{\eta}_n - \overset{2b}{\eta}_n$, $\bar\eta_{nb} = \overset{2b-2}{\eta}_n - \overset{2b-1}{\eta}_n$, $\eta'_{nb} = \bar\eta_{n1}+\ldots+\bar\eta_{nb}$

[illegible] $Al(u_1\ldots u_\varrho)$ [illegible]

$$Al(u_1+2\omega_{1b}+\ldots u_\varrho+2\omega_{\varrho b}) = e^{-2\sum_n \eta_{nb}(u_n+\omega_{nb})} Al(u_1\ldots u_\varrho)$$

$$Al(u_1+2\omega'_{1b}+\ldots \qquad) = e^{-2\sum_n \eta'_{nb}(u_n+\omega'_{nb})} Al(u_1\ldots)$$

[illegible] $\mu_1\ldots\mu_\varrho, \nu_1\ldots\nu_\varrho$ [illegible]

$$\bar\omega_n = \mu_1\omega_{n1}+\ldots+\mu_\varrho\omega_{n\varrho} + \nu_1\omega'_{n1}+\ldots+\nu_\varrho\omega'_{n\varrho} \qquad \bar\eta_n = \mu_1\eta_{n1}+\ldots+\mu_\varrho\eta_{n\varrho} + \nu_1\eta'_{n1}+\ldots+\nu_\varrho\eta'_{n\varrho}$$

[illegible]

$$(3) \quad Al(u_1+2\bar\omega_1\ldots) = (-1)^{\mu_1\nu_1+\ldots+\mu_\varrho\nu_\varrho} e^{-2\sum_n \bar\eta_n(u_n+\bar\omega_n)} Al(u_1\ldots)$$

[illegible] $(1,2)$ [illegible] $\omega_{nb}, \omega'_{nb}, \eta_{nb}, \eta'_{nb}$

[illegible]

$$\sum_\nu (\omega_{\mu\nu}\eta_{\alpha\nu} - \omega_{\alpha\nu}\eta_{\mu\nu}) = 0$$

(4) $$\sum_\nu (\omega'_{\mu\nu}\eta'_{\alpha\nu} - \omega'_{\alpha\nu}\eta'_{\mu\nu}) = 0$$

$$\sum_\nu (\omega_{\mu\nu}\eta'_{\alpha\nu} - \omega'_{\alpha\nu}\eta_{\mu\nu}) = 0 \quad \mu \gtrless \alpha$$

$$\sum (\omega_{\mu\nu}\eta'_{\mu\nu} - \omega'_{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}) = \frac{\pi i}{2}$$

[illegible]

$$\sum_\nu (\omega_{\mu\nu}\omega'_{\alpha\nu} - \omega_{\alpha\nu}\omega'_{\mu\nu}) = 0$$

$$\sum_\nu (\eta_{\mu\nu}\eta'_{\alpha\nu} - \eta_{\alpha\nu}\eta'_{\mu\nu}) = 0$$

$$\sum_\nu (\omega_{\mu\nu}\eta'_{\alpha\nu} - \omega'_{\alpha\nu}\eta_{\mu\nu}) = 0 \quad \mu \gtrless \alpha$$

$$\sum_\nu (\omega_{\mu\nu}\eta'_{\mu\nu} - \omega'_{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}) = \frac{\pi i}{2}$$

[illegible] $E(u_1 \ldots u_\rho)$ [illegible] $u_1 \ldots u_\rho$ [illegible]

$$e^{E}\, \mathfrak{Al}(u_1 \ldots) = F(u_1 \ldots u_\rho)$$

[illegible] $F(u_1 \ldots)$ [illegible] $(1, 2)$ [illegible] $\eta_{\mu\nu}\ \eta'_{\mu\nu}$ [illegible] (4) [illegible] F [illegible] $\eta_{\mu\nu}$ [illegible]

$$F(u_1 + 2\omega_1, 0 \ldots) = F(u_1 \ldots)$$

[illegible] $b = 1 \ldots \rho$ [illegible]

$$w_\mu = a_1\omega_{\mu 1} + \ldots + a_\rho \omega_{\mu\rho}, \quad \eta_\mu = a_1\eta_{\mu 1} + \ldots + a_\rho \eta_{\mu\rho}$$

$$F(u_1 + w_1 \ldots) = F(u_1 \ldots)$$

[illegible] E [illegible] $v_1 \ldots v_\rho$ [illegible] $u_1 \ldots u_\rho$ [illegible]

(1) $$2\omega_{11} v_1 + \ldots + 2\omega_{1\rho} v_\rho = u_1$$
$$2\omega_{\rho 1} v_1 + \ldots\ldots = u_\rho$$

[illegible]

(2) $$2v_1 = \varepsilon_{11} u_1 + \ldots + \varepsilon_{\rho 1} u_\rho$$
$$2v_\rho = \varepsilon_{1\rho} u_1 + \ldots + \varepsilon_{\rho\rho} u_\rho$$

[illegible] (3) $E = \sum_{\alpha\beta} \eta_{\alpha\beta}\, v_\alpha u_\beta = i \sum_{\alpha\beta\nu} \eta_{\alpha\nu}\, \varepsilon_{\beta\nu}\, u_\beta u_\nu = 2\sum_{\alpha\beta\nu} \eta_{\alpha\beta}\, \omega_{\alpha\nu}\, v_\beta v_\nu$

[illegible] H [illegible]

(4) $E(u_1 + 2\omega_1 \dots) = E(u_1 \dots) + 2\sum \eta_{\alpha 1}(u_{\alpha 1} + \omega_{\alpha 1})$

[illegible] (3) [illegible] $v_1 = 0 \dots v_\varrho = 0$ [illegible]

(5) $e^{E(u_1+2\omega_1\dots)}\, Al(u_1+2\omega_1 \dots) = e^{E(u_1\dots)}\, Al(u_1 \dots)$

[illegible] $u_1 \dots u_n$ [illegible]

[illegible] $v'_\alpha\ \varepsilon'_{\alpha\beta}$ [illegible] $v_\alpha\ \varepsilon'_{\alpha\beta}$ [illegible]

[illegible] $\omega'_{\alpha\beta}$ [illegible] $\omega_{\alpha\beta}$ [illegible]

(6) $E'(u_1 \dots) = \sum_{\alpha\beta} \eta'_{\alpha\beta}\, u_\alpha v'_\beta = i\sum_{\alpha\beta\nu} \eta'_{\alpha\nu}\, \varepsilon_{\alpha\beta}\, u_\beta u_\nu = 2\sum_{\alpha\beta\nu} \eta_{\alpha\beta}\, \omega_{\alpha\nu}\, v_\beta v_\nu$

$\omega'_{\alpha 1} = v_1 \omega_{\alpha 1} + \dots + v_\varrho\, \omega_{\alpha\varrho}$

$\eta'_{\alpha 1} = v_1 \eta_{\alpha 1} + \dots$

[illegible] $v_1 \dots v_\varrho$ [illegible]

$e^{E'(u_1\dots)}\, Al(u_1 \dots u_\varrho) = e^{E'(u_1+2\omega'_1 \dots)}\, Al(u_1+2\omega'_1 \dots)$

[illegible] $E'(u_1+2\omega_1 \dots) = E'(u_1 \dots) + 2\sum \eta'_{\alpha 1}(u_{\alpha 1} + \omega'_{\alpha 1})$

[illegible] $v_1 \dots v_\varrho$ [illegible]

[illegible]

$\sum_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}\, \omega_{\alpha\nu} = 1$ [illegible] $\beta = \nu$; $= 0$ [illegible] $\beta \gtrless \nu$

(10) $\sum \varepsilon_{\alpha\beta}\, \omega_{\beta\nu} = 1$, $\alpha = \beta$; $= 0$ $\alpha \gtrless \beta$

[illegible]

(11) $\sum_\alpha \eta_{\alpha\beta}\, \omega_{\alpha\nu} = \sum \eta_{\alpha\nu}\, \omega_{\alpha\beta}$

$\sum_\alpha \eta'_{\alpha\beta}\, \omega'_{\alpha\nu} = \sum \eta'_{\alpha\nu}\, \omega'_{\alpha\beta}$

[illegible]

(11) $\sum_\nu \eta_{\alpha\nu}\varepsilon_{\beta\nu} = \sum_\nu \eta_{\beta\nu}\varepsilon_{\alpha\nu}\,; \quad \sum_\nu \eta'_{\alpha\nu}\varepsilon'_{\beta\nu} = \sum_\nu \eta'_{\beta\nu}\varepsilon'_{\alpha\nu}$

[illegible] (6) [illegible]

$$E' = 2\sum_{\alpha\beta\nu} \omega_{\alpha\nu}\eta'_{\nu\beta}\, v_\alpha v'_\beta$$

[illegible]

$$E = 2\sum_{\alpha\beta\nu} \omega'_{\alpha\nu}\eta_{\nu\beta}\, v'_\alpha v_\beta = 2\sum_{\alpha\beta\nu} \omega'_{\nu\beta}\eta_{\alpha\nu}\, v_\alpha v'_\beta$$

[illegible] (4)

(12) $E' - E = \pi i \sum_\alpha v_\alpha v'_\alpha$

[illegible]

$$E' - E = G(u_1 \ldots u_\varrho)$$

[illegible]

(13) $G(u_1 \ldots u_\varrho) = \frac{\pi i}{4} \sum_{\alpha\beta\nu} \varepsilon_{\beta\nu}\varepsilon'_{\nu\alpha}\, u_\beta u_\alpha$

[illegible]

(14) $\sum_\nu \varepsilon_{\beta\nu}\varepsilon'_{\nu\alpha} = \sum_\nu \varepsilon_{\alpha\nu}\varepsilon'_{\nu\beta}$

[illegible] $\frac{\partial G(u \ldots)}{\partial u_\beta} = G(u_1 \ldots)_\beta$

[illegible]

$$G(u_1 \ldots)_\beta = \frac{\pi i}{2} \sum_{\alpha\nu} \varepsilon_{\beta\nu}\varepsilon'_{\nu\alpha}\, u_\alpha = \frac{\pi i}{2} \sum_{\alpha\nu} \varepsilon_{\alpha\nu}\varepsilon'_{\nu\beta}\, u_\alpha$$

$$= \pi i \sum_\alpha \varepsilon_{\beta\alpha} v'_\alpha = \pi i \sum_\alpha \varepsilon'_{\alpha\beta} v_\alpha$$

[illegible]

$$v'_1 = v_1 \qquad v'_\varrho = v_\varrho$$

[illegible] $u_1 = 2\omega'_1 \qquad u_\varrho = 2\omega'_\varrho$

[illegible] $G(2\omega'_1 \ldots 2\omega'_\varrho)_\beta = \pi i \sum_\alpha v_\alpha \varepsilon_{\beta\alpha}$

(15) $G(2\omega'_1 \ldots 2\omega'_\varrho)_\alpha = \pi i \sum_\beta v_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}$

[illegible]

(16) $\mathfrak{S}(2\omega_1\ldots) = \pi i \sum_b \mu_b \varepsilon'_{ab}$

$$\mathfrak{S}(u_1+2\omega_1\ldots) = \mathfrak{S}(2\omega_1'\ldots) + \sum_\alpha \mathfrak{S}(2\omega_1\ldots)_\alpha\, u_\alpha + \mathfrak{S}(u_1\ldots)$$

$$\mathfrak{S}(2\omega_1'\ldots) = \sum_\alpha \mathfrak{S}(2\omega_1'\ldots)_\alpha\, 2\omega'_\alpha$$

(17) $\mathfrak{S}(u_1+2\omega_1'\ldots) - \mathfrak{S}(u_1\ldots) = 2i\sum_\alpha \varepsilon_\alpha (u_\alpha + \omega'_\alpha)$

(18) $\varepsilon_\alpha = \frac{1}{i}\,\mathfrak{S}(\omega_1'\ldots\omega_\varrho')_\alpha = \frac{\pi}{2}\sum_b \nu_b\, \varepsilon_{ab}$

(19) $\mathfrak{S}(u_1+2\omega_1\ldots) - \mathfrak{S}(u_1\ldots) = 2i\sum_\alpha \varepsilon'_\alpha(u_\alpha+\omega_\alpha)$

(18a) $\varepsilon'_\alpha = \frac{1}{i}\,\mathfrak{S}(\omega_1\ldots)_\alpha = \frac{\pi}{2}\sum_b \mu_b\, \varepsilon'_{ab}$

$u_1\ldots u_\varrho,\ v_1\ldots v_\varrho$

$\mathfrak{F} = e^{E}\mathfrak{A}$ $\quad u_1 + 2\omega_1', \ldots$

$$E(u_1+2\omega_1'\ldots) = E'(u_1+2\omega_1'\ldots) - \mathfrak{S}(u_1+2\omega_1'\ldots)$$
$$= E(u_1\ldots) + 2\sum_\alpha(\eta'_\alpha - i\varepsilon_\alpha)(u_\alpha+\omega'_\alpha)$$

(1) $\mathfrak{F}(u_1+2\omega_1') = e^{-i\sum_\alpha 2\varepsilon_\alpha(u_\alpha+\omega'_\alpha)}\,\mathfrak{F}(u_1\ldots u_\varrho)$

(2) $e^{\mathfrak{S}(u_1+2\omega_1'\ldots)}\,\mathfrak{F}(u_1+2\omega_1'\ldots) = e^{\mathfrak{S}(u_1\ldots)}\,\mathfrak{F}_1(u_1\ldots)$

(3) $\mathfrak{F}(u_1+2\omega_1\ldots) = \mathfrak{F}(u_1\ldots)$

$f(v_1\ldots v_\varrho)$ $\quad \mathfrak{F}(u_1\ldots)$

$$u_\lambda = 2\omega_{\lambda 1} v_1 + \cdots + 2\omega_{\lambda\varrho} v_\varrho$$

$$f(v_1+u_1\ldots) = f(v_1\ldots)$$

[illegible]

$$\sum_{\nu} C(\nu_1 \dots \nu_\rho)\, e^{2(\nu_1 v_1 + \dots + \nu_\rho v_\rho)\pi i}$$

[illegible] $C(\nu_1 \dots \nu_\rho)$ [illegible]

$$\sum_{\alpha} 2\nu_\alpha v_\alpha \pi i = i \sum_{\alpha\beta} \nu_\alpha \varepsilon_{\beta\alpha} u_\beta \pi i = 2i \sum_\alpha \varepsilon_\alpha u_\alpha$$

[illegible]

$$\mathfrak{F}(u_1 \dots) = \sum C(\nu_1 \dots \nu_\rho)\, e^{2i \sum_\alpha \varepsilon_\alpha u_\alpha}$$

[illegible] $A(\nu_1 \dots) = C(\nu_1 \dots \nu_\rho)\, e^{-2i \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \omega'_\alpha}$ [illegible]

$$\mathfrak{F}(u_1 \dots) = \sum A(\nu_1 \dots \nu_\rho)\, e^{2i \sum \varepsilon_\alpha (u_\alpha + \omega'_\alpha)}$$

$$= \sum_\nu A(\nu_1 \dots \nu_\rho)\, e^{G(u_1 + 2\omega'_1 \dots) - G(u_1 \dots)}$$

$$e^{G(u_1 \dots)}\, \mathfrak{F}(u_1 \dots) = \sum_\nu A(\nu_1 \dots \nu_\rho)\, e^{G(u_1 + 2\omega'_1 \dots)}$$

[illegible] $\bar\nu_1 \dots \bar\nu_\rho$

[illegible] $\bar\omega'_\alpha = \bar\nu_1 \omega'_{\alpha 1} + \dots + \bar\nu_\rho \omega'_{\alpha\rho}$

[illegible] $u_1 \dots u_\rho$ [illegible] $u_1 + 2\bar\omega'_1, \dots u_\rho + 2\bar\omega'_\rho$ [illegible] (2)

$$e^{G(u_1 \dots)}\, \mathfrak{F}(u_1 \dots) = \sum_\nu A(\nu_1 \dots \nu_\rho)\, e^{G(u_1 + 2\omega'_1 + 2\bar\omega'_1 \dots)}$$

[illegible] $\nu_1 - \bar\nu_1 \dots \nu_\rho - \bar\nu_\rho$ [illegible] $\nu_1 \dots \nu_\rho$ [illegible]

$$e^{G(u_1 \dots)}\, \mathfrak{F}(u_1 \dots) = \sum_\nu A(\nu_1 - \bar\nu_1 \dots \nu_\rho - \bar\nu_\rho)\, e^{G(u_1 + 2\omega'_1 \dots)}$$

[illegible]

$$A(\nu_1 - \bar\nu_1 \dots \nu_\rho - \bar\nu_\rho) = A(\nu_1 \dots)$$

[illegible] $\nu_1 \dots \nu_\rho$.

[illegible] $A(0, 0 \dots)$ [illegible]

$$A(\bar\nu_1 \dots \bar\nu_\rho) = C$$

[illegible] $\bar\nu_1 \dots \bar\nu_\rho$ [illegible] $A(\nu_1 \dots \nu_\rho) = C$ [illegible]

(4) $e^{G(u_1 ..)} F(u_1 .. u_\rho) = C \sum_\nu e^{G(u_1 + 2\omega_1' ..)}$

(5) $F(u_1 .. u_\rho) = C \sum_\nu e^{2i[\varepsilon_1(u_1+\omega_1') + .. + \varepsilon_\rho(u_\rho + \omega_\rho')]}$

[illegible]

(6) $\sum_\nu e^{G(u_1 + 2\omega_1' ..) - G(u_1 ..)} = \Theta(u_1 .. u_\rho)$

(7) $\Theta(u_1 .. u_\rho) = \sum_\nu e^{2[\varepsilon_1(u_1+\omega_1') + .. + \varepsilon_\rho(u_\rho+\omega_\rho')]i}$

$= \sum_\nu e^{2i[\varepsilon_1\omega_1' + ..]} \cos(2\varepsilon_1 u_1 + ..)$

[illegible]

(8) $Al(u_1 ..) = C e^{-E} \Theta(u_1 ..)$

[illegible] $u_1 .. u_\rho$ [illegible] (12) [illegible] $Al(u_1 ..)$ [illegible]

$Al(0, ..) = 1$

$Al(u_1 ..) = e^{-E(u_1 .. u_\rho)} \frac{\Theta(u_1 .. u_\rho)}{\Theta(0, .. 0)}$

$\sum_a \varepsilon_a \omega_a' = \frac{\pi}{2} \sum_{ab\nu} \nu_b \nu_\nu \varepsilon_{ab} \omega'_{a\nu}$

$\sum_a \varepsilon_a u_a = \frac{\pi}{2} \sum_{ab} \nu_b \varepsilon_{ab} u_a = \pi \sum_b \nu_b v_b$

[illegible]

(10) $\tau_{b\nu} = \sum_a \varepsilon_{ab} \omega'_{a\nu}$

[illegible] $\tau_{b\nu} = \tau_{\nu b}$ [illegible]

(12) $\tau_b = \nu_1 \tau_{b1} + .. + \nu_\rho \tau_{b\rho}$

(13) $\Theta(u_1 .. u_\rho) = \sum_\nu e^{\pi i(\nu_1[2v_1 + \tau_1] + ..)}$

(14) $\Theta(u_1 .. u_\rho) = \sum_\nu e^{\pi i \sum \nu_b \nu_c \tau_{bc}} \cos(\nu_1 v_1 + ..) 2\pi$.

[illegible]

$$(1)\quad f(u_1 \dots) = C e^{\sum_\alpha \bar\eta_\alpha (u_\alpha + \frac{1}{2}\bar\omega_\alpha)}\, \mathfrak{A}(u_1 + \bar\omega_1 \dots)$$

$$(2)\quad \bar\omega_\alpha = \sum_\nu \mu_\nu \omega_{\alpha\nu} + \sum_\nu \nu_\nu \omega'_{\alpha\nu}$$

$$\bar\eta_\alpha = \sum_\nu \mu_\nu \eta_{\alpha\nu} + \sum_\nu \nu_\nu \eta'_{\alpha\nu}$$

[illegible] $u_1 \dots u_\rho$ [illegible]

$$(3)\quad f(u_1 + 2\omega_{1b} \dots) = e^{2\sum_\alpha (\bar\eta_\alpha \omega_{\alpha b} - \eta_{\alpha b}(u_\alpha + \bar\omega_\alpha + \omega_{\alpha b}))} f(u_1 \dots)$$

$$f(u_1 + 2\omega'_{1b}\dots) = e^{2\sum_\alpha (\bar\eta_\alpha \omega'_{\alpha b} - \eta'_{\alpha b}(u_\alpha + \bar\omega_\alpha + \omega'_{\alpha b}))} f(u_1\dots)$$

[illegible]

$$(4)\quad \sum_\alpha(\bar\eta_\alpha \omega_{\alpha b} - \eta_{\alpha b}\bar\omega_{\alpha b}) = \nu_b \frac{\pi i}{2}$$

$$\sum_\alpha(\bar\eta_\alpha \omega'_{\alpha b} - \eta'_{\alpha b}\bar\omega_{\alpha b}) = -\mu_b \frac{\pi i}{2}$$

[illegible]

$$(5)\quad f(u_1+2\omega_{1b}\dots) = e^{\nu_b \pi i - 2\sum_\alpha \eta_{\alpha b}(u_\alpha + \omega_{\alpha b})} f(u_1 \dots)$$

$$f(u_1+2\omega'_{1b}\dots) = e^{-\mu_b\pi i - 2\sum_\alpha \eta'_{\alpha b}(u_\alpha+\omega'_{\alpha b})} f(u_1\dots)$$

[illegible] $\mathfrak{A}(u_1 \dots)$ [illegible] $-2\sum_\alpha \eta_{\alpha b}(u_\alpha+\omega_{\alpha b})$, $-2\sum_\alpha \eta'_{\alpha b}(u_\alpha + \omega'_{\alpha b})$, [illegible] $u_1 \dots u_\rho$ [illegible] (5) [illegible] $\bar\eta_\alpha, \bar\omega_\alpha$ [illegible] (2) [illegible] $u_1 \dots$ [illegible] $u_1 - \bar\omega_1 \dots$

$$f(u_1 - \bar\omega_1 + 2\omega_{1b}\dots) = e^{2\sum_\alpha(\bar\eta_\alpha\omega_{\alpha b} - \eta_{\alpha b}(u_\alpha+\omega_{\alpha b}))} f(u_1-\bar\omega_1\dots)$$

$$f(u_1-\bar\omega_1+2\omega'_{1b}\dots) = e^{2\sum_\alpha(\bar\eta_\alpha\omega'_{\alpha b} - \eta'_{\alpha b}(u_\alpha+\omega'_{\alpha b}))} f(u_1-\bar\omega_1\dots)$$

[illegible]

$$e^{-\sum_\alpha \bar\eta_\alpha(u_\alpha - \frac{\bar\omega_\alpha}{2})} f(u_1-\bar\omega_1\dots) = f_1(u_1\dots)$$

[illegible]

$$f(u_1+2\omega_{1b}\dots) = f(u_1\dots)\,e^{-2\sum_\alpha \eta_{\alpha b}(u_\alpha+\omega_{\alpha b})}$$

$$f_1(u_1+2\omega'_{1b}\dots) = f(u_1\dots)\,e^{-2\sum_\alpha \eta'_{\alpha b}(u_\alpha+\omega'_{\alpha b})}$$

[illegible] $f_1(u_1\dots) = C\,Al(u_1\dots)$

[illegible] $u_\alpha+\bar\omega_\alpha$ [illegible] u_α [illegible]

$$f(u_1\dots) = C\,e^{\sum_\alpha \bar\eta_\alpha(u_\alpha+\frac{1}{2}\bar\omega_\alpha)}\,Al(u_1+\bar\omega_1\dots)$$

[illegible]

$$\bar\omega'_\alpha = \sum_\nu(\mu'_\nu\,\omega_{\alpha\nu}+\nu'_\nu\,\omega'_{\alpha\nu})$$

$$\bar\eta'_\alpha = \sum_\nu(\mu'_\nu\,\eta_{\alpha\nu}+\nu'_\nu\,\eta'_{\alpha\nu})$$

[illegible] (3)

(6) $$f(u_1+2\bar\omega'_1\dots) = e^{2\sum_\alpha(\bar\eta_\alpha\bar\omega'_\alpha-\bar\eta'_\alpha(u_\alpha+\bar\omega_\alpha+\bar\omega'_\alpha))-\sum_\alpha\mu'_\alpha\nu'_\alpha\pi i}\,f(u_1\dots)$$

[illegible] $$\sum_\alpha(\bar\omega_\alpha\bar\eta'_\alpha-\bar\eta_\alpha\bar\omega'_\alpha) = \frac{\pi i}{2}\sum_b(\mu_b\nu'_b-\mu'_b\nu_b)$$

[illegible]

(7) $$f(u_1+2\bar\omega'_1\dots) = (-1)^{\sum(\mu'_\alpha\nu'_\alpha-\mu'_\alpha\nu_\alpha+\mu_\alpha\nu'_\alpha)}\,e^{-2\sum_\alpha\bar\eta'_\alpha(u_\alpha+\bar\omega'_\alpha)}\,f(u_1\dots)$$

[illegible] $\mu_\alpha\nu_\alpha\cdot 2$ [illegible] $\frac{1}{2}$ [illegible]

(8) $$f(u_1+2\bar\omega'_1\dots) = (-1)^{\sum_\alpha(\mu'_\alpha\nu'_\alpha-\mu'_\alpha\nu_\alpha+\mu_\alpha\nu'_\alpha)}\,e^{-\sum_\alpha\bar\eta'_\alpha(u_\alpha+\bar\omega'_\alpha)}\,f(u_1\dots)$$

[illegible] $$e^{\sum_\alpha\bar\eta_\alpha(u_\alpha+\frac{1}{2}\bar\omega_\alpha)}\,Al(u_1+\bar\omega_1\dots) = e^{-E_1(u_1+\bar\omega_1)+\sum_\alpha\bar\eta'_\alpha(u_\alpha+\frac{1}{2}\bar\omega_\alpha)}\cdot\frac{\Theta(u_1+\bar\omega_1\dots)}{\Theta(0\dots)}$$

[illegible]
$$\omega_\alpha = \sum_b \mu_b\,\omega_{\alpha b} \qquad \omega'_\alpha = \sum_b \nu_b\,\omega'_{\alpha b}$$
$$\eta_\alpha = \sum_b \mu_b\,\eta_{\alpha b} \qquad \eta'_\alpha = \sum_b \nu_b\,\eta'_{\alpha b}$$

[illegible] $$\sum_\alpha\bar\eta_\alpha(u_\alpha+\tfrac{1}{2}\bar\omega_\alpha) = \sum_\alpha\eta_\alpha(u_\alpha+\tfrac{1}{2}\omega_\alpha+\tfrac{1}{2}\omega'_\alpha)+\sum_\alpha\eta'_\alpha(u_\alpha+\tfrac{1}{2}\omega_\alpha+\tfrac{1}{2}\omega'_\alpha)$$

[illegible] (4) [illegible] $\frac{u_\alpha}{2}$ [illegible] u_α [illegible]

$$\sum_\alpha\eta_\alpha(u_\alpha+\tfrac{1}{2}\omega_\alpha) = E_1(u_1+\omega_1\dots)-E_1(u_1\dots).$$

$$\sum \eta_n'(u_n+\tfrac{1}{2}\omega_n') = E'(u_1+\omega_1'\ldots) - E'(u_1\ldots)$$

[illegible]

$$\sum \eta_n'(u_n+\tfrac{1}{2}\omega_n+\tfrac{1}{2}\omega_n') = E'(u+\bar\omega_1\ldots) - E'(u_1+\omega_1\ldots) - \tfrac{i}{2}\sum \eta_n'\omega_n$$

$$\sum \eta_n(u_n+\tfrac{1}{2}\omega_n+\tfrac{1}{2}\omega_n') = E(u+\omega_1\ldots) - E(u_1\ldots) + \tfrac{i}{2}\sum \eta_n\omega_n'$$

$$\sum \bar\eta_n(u_n+\tfrac{1}{2}\bar\omega_n) - E(u_1+\bar\omega_1\ldots) = G(u_1+\bar\omega_1\ldots) - G(u_1+\omega_1\ldots)$$

$$-E(u_1\ldots) - \tfrac{i}{2}\sum_n(\omega_n\eta_n' - \omega_n'\eta_n) =$$

$$G(u_1+\bar\omega_1\ldots) - G(u_1+\omega_1\ldots) - E(u_1\ldots) = \tfrac{\pi i}{4}\sum \mu_n\nu_n$$

[illegible]

$$(9)\quad e^{\sum \bar\eta_n(u_n+\frac{1}{2}\bar\omega_n)} Al(u_1+\bar\omega_1\ldots) = e^{-E(u_1\ldots)+G(u_1+\bar\omega_1\ldots)-G(u_1+\omega_1\ldots)} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}\sum_n \mu_n\nu_n}\,\frac{\theta(u_1+\bar\omega_1\ldots)}{\theta(0,0,\ldots)}$$

[illegible] $\theta(u_1\ldots)$ [illegible]

$$(10)\quad e^{\sum(\bar\eta_n(u_n+\frac{1}{2}\bar\omega_n)+\frac{\pi i}{4}\mu_n\nu_n)} Al(u_1+\bar\omega_1\ldots)$$

$$= \frac{e^{-E(u_1)}}{\theta(0\ldots)}\sum e^{G(u_1+\omega_1+\omega_1'+2\omega_1')-G(u_1+\omega_1\ldots)}$$

$$= \frac{e^{-E(u_1)}}{\theta(0\ldots)}\sum e^{\sum_n(2\overset{*}{\varepsilon}_n+\varepsilon_n)(u_n+\omega_n+\frac{1}{2}\omega_n'+\overset{*}{\omega}_n')}$$

[illegible]
$$\overset{*}{\omega}' = \mu_1\omega_{n1}' + \cdots + \mu_\varrho\omega_{n\varrho}'$$
$$\overset{*}{\varepsilon}_n = (\mu_1\varepsilon_{n1}+\cdots)\pi$$
$$\varepsilon_n = (\nu_1\varepsilon_{n1}+\cdots+\nu_\varrho\varepsilon_{n\varrho})\pi$$

$\mu_1\ldots\mu_\varrho$ [illegible]

$$e^{\sum\bar\eta_n(u_n+\frac{1}{2}\bar\omega_n)+\mu_n\nu_n\frac{\pi i}{4}} Al(u_1+\bar\omega_1\ldots) \;[illegible]\; Al(u_n|\bar\omega_n)$$

$$e^{G(u_1+\bar\omega_1\ldots)-G(u_1+\omega_1\ldots)}\,\theta(u_1+\bar\omega_1\ldots) \;[illegible]\; \theta(u_n|\bar\omega_n)$$ [illegible]

$$(1)\quad Al(u_n|\bar\omega_n) = e^{-E(u_1\ldots)}\frac{\theta(u_n|\bar\omega_n)}{\theta(0\ldots0)}$$

$$(2)\quad \theta(u_n|\bar\omega_n) = \sum e^{G(u_1+\omega_1+\omega_1'+2\omega_1'\ldots)-G(u_1+\omega_1\ldots)}$$

$$= \sum e^{\sum_{\alpha}(2\overset{*}{\varepsilon}_\alpha + \varepsilon_\alpha)(u_\alpha + w_\alpha + \tfrac{1}{2}\omega_\alpha' + \overset{*}{\omega}_\alpha{}')i}$$

[illegible]

(3) $\theta(u_\alpha/\overline{\omega}_\alpha) = \sum_{\alpha} e^{\sum_{\alpha}(2\overset{*}{\varepsilon}_\alpha + \varepsilon_\alpha)(\overset{*}{\omega}_\alpha{}' + \frac{1}{2}\omega_\alpha')i} \cos\left[\sum_\alpha (2\overset{*}{\varepsilon}_\alpha + \varepsilon_\alpha)(u_\alpha + w_\alpha)\right]$

[illegible] $|\omega_{\lambda\mu}|$ $\lambda, \mu = 1 \ldots \varrho$ [illegible] $\Omega(\varkappa_1 \ldots \varkappa_\varrho/\alpha)$ [illegible]

[illegible]

$w_{\alpha 1} \ldots w_{\alpha\varrho}$ [illegible] $\varkappa_1 \ldots \varkappa_\varrho$ [illegible] $Al(u_\alpha/\overline{\omega}_\alpha)$

$\theta(u_\alpha/\overline{\omega}_\alpha)$ [illegible]

$w_\alpha = \mu_1 \omega_{\alpha 1} + \ldots + \mu_\varrho \omega_{\alpha\varrho}$; $\omega_\alpha' = \nu_1 \omega_{\alpha 1}' + \cdots + \nu_\varrho \omega_{\alpha\varrho}'$

$\overset{*}{\omega}_\alpha{}' = \varkappa_1 \omega_{\alpha 1}' + \cdots + \varkappa_\varrho \omega_{\alpha\varrho}'$; $\varepsilon_\alpha = \frac{\pi}{2\Omega} \Omega(\nu_1 \ldots \nu_\varrho/\alpha)$

$\overset{*}{\varepsilon}_\alpha = \frac{\pi}{2\Omega} \Omega(\mu_1 \ldots \mu_\varrho/\alpha)$; $E(u_1 \ldots) - \frac{1}{2}\sum \eta_{\alpha b} u_\alpha u_b$

[illegible] $\dot{\omega}_\alpha, \dot{\eta}_\alpha, \dot{\omega}_\alpha, \dot{\omega}_\alpha'$, $\dot{\varepsilon}_\alpha$ [illegible] $\overline{\omega}, \overline{\eta}, \ldots$ [illegible]

[illegible] $\dot{\mu}, \dot{\nu}$ [illegible] μ_α, ν_α [illegible]

$$Al(u_\alpha + \dot{\omega}_\alpha/\overline{\omega}_\alpha) = e^{\sum \overline{\eta}_\alpha(u_\alpha + \dot{\overline{\omega}}_\alpha + \frac{1}{2}\overline{\omega}_\alpha) + \frac{\mu_\alpha \nu_\alpha \pi i}{4}} Al(u_1 + \overline{\omega}_1 + \dot{\overline{\omega}}_1 \ldots)$$

$$\sum (\overline{\eta}_\alpha + \dot{\eta}_\alpha)(u_\alpha + \tfrac{1}{2}\overline{\omega}_\alpha + \tfrac{1}{2}\dot{\overline{\omega}}_\alpha) + \tfrac{1}{4}(\mu_\alpha + \dot{\mu}_\alpha)(\nu_\alpha + \dot{\nu}_\alpha)\pi i =$$

$$\sum \dot{\eta}_\alpha(\eta_\alpha + \tfrac{1}{2}\overline{\omega}_\alpha + \dot{\omega}_\alpha) + \tfrac{1}{4}\mu_\alpha \nu_\alpha \pi i + \sum \dot{\eta}_\alpha(\mu_\alpha + \tfrac{1}{2}\dot{\omega}_\alpha)$$

$$+ \sum -(\dot{\mu}_\alpha \dot{\nu}_\alpha + 2\mu_\alpha \dot{\nu}_\alpha)\frac{\pi i}{4}$$

[illegible]

(4) $Al(u_\alpha + \dot{\omega}_\alpha/\overline{\omega}_\alpha) = e^{-\sum \dot{\eta}_\alpha(u_\alpha + \frac{1}{2}\dot{\omega}_\alpha)(\dot{\mu}_\alpha \dot{\nu}_\alpha + 2\mu_\alpha \dot{\nu}_\alpha)\frac{\pi i}{4}} Al(u_\alpha/\overline{\omega}_\alpha + \dot{\omega}_\alpha)$

[illegible]

$$\theta(u_\alpha + \overline{\omega}_\alpha/\overline{\omega}_\alpha) = e^{G(u_1 + \overline{\omega}_1 + \dot{\omega}_1 \ldots) - G(u_1 + \omega_1 + \dot{\omega})} \theta(u_1 + \overline{\omega}_1 + \dot{\omega}_1 \ldots)$$

$$= e^{-G(u_1 + \omega_1 + \overline{\omega}_1 \ldots) + G(u_1 + \omega_1 + \omega_1' \ldots)} \theta(u_\alpha/\overline{\omega}_\alpha + \dot{\omega}_\alpha)$$

$$G(u_1 + \dot{\omega}_1' \ldots) - G(u_1 \ldots) = \sum_\alpha \dot{\varepsilon}_\alpha(u_\alpha + \tfrac{1}{2}\dot{\omega}_\alpha')i$$

$$\sigma(u_1+\omega_1+\dot\omega_1+\dot\omega_1' \ldots) - \sigma(u_1+\omega_1+\dot\omega_1 \ldots) = \sum_n \dot\varepsilon_n\left(u_n+\omega_n+\dot\omega_n+\tfrac{1}{2}\dot\omega_n'\right)i$$

$$= i\sum_n \dot\varepsilon_n\left(u_n+\tfrac{1}{2}\dot\omega_n\right) + i\sum \dot\varepsilon_n\left(\omega_n+\tfrac{\dot\omega_n}{2}\right)$$

[illegible] $\sum \dot\varepsilon_n \omega_n = \frac{\pi}{2}\sum \dot\nu_\alpha \mu_\alpha \omega_{n\alpha} \varepsilon_{n\alpha} = \frac{\pi}{2}\sum_n \dot\nu_n \mu_n$

(2) $\theta(u_n+\dot\omega/\bar\omega_n) = e^{-\sum \mu_n \dot\nu_n} e^{-\sum \dot\varepsilon_n(u_n+\frac{1}{2}\dot\omega_n)i + \mu_n\dot\nu_n \frac{\pi i}{4}}\theta(u_n/\bar\omega_n+\dot\omega_n)$

[illegible] $i^{-\sum h}$ [illegible] $e^{-\frac{\pi i}{2}\sum}$ [illegible]

(6) $Al(u_n/\bar\omega_n) = e^{\sum_n\left(\bar\eta_n(u_n+\frac{1}{2}\bar\omega_n)+\mu_n\nu_n\frac{\pi i}{4}\right)} Al(u_1+\bar\omega_1 \ldots)$

[illegible] $\bar\omega_n + 2\dot\omega_n$ [illegible] $\mu_n + 2\dot\mu_n$ [illegible] $\nu_n + 2\dot\nu_n$ [illegible] $\dot\mu_n, \dot\nu_n$ [illegible]

$Al(u_1+\bar\omega_1+2\dot\omega_1 \ldots) = e^{-\sum 2\left[\dot\eta_n(u_n+\dot\omega_n+\bar\omega_n)+\dot\mu_n\dot\nu_n\pi i\right]} Al(u_1+\bar\omega_1 \ldots)$

$e^{\ldots}$

$\sum(\bar\eta_n+2\dot\eta_n)(u_n+\tfrac{1}{2}\bar\omega_n+\dot\omega_n) + (\mu_n+2\dot\mu_n)(\nu_n+2\dot\nu_n)\frac{\pi i}{4} =$

$\sum_n \bar\eta_n(u_n+\tfrac{1}{2}\bar\omega_n) + \tfrac{1}{4}\mu_n\nu_n\pi i + \sum 2\dot\eta_n(u_n+\dot\omega_n+\bar\omega_n) + \dot\mu_n\dot\nu_n\pi i$

$+ \sum(\bar\eta_n\dot\omega_n - \dot\eta_n\bar\omega_n) + \tfrac{1}{2}(\mu_n\dot\nu_n+\dot\mu_n\nu_n)\pi i$

[illegible] $\sum_n(\dot\omega_n\bar\eta_n - \bar\omega_n\dot\eta_n) = \sum(\dot\mu_n\nu_n - \mu_n\dot\nu_n)\frac{\pi i}{2}$ [illegible]

(7) $Al(u_n/\bar\omega_n+2\dot\omega_n) = e^{\sum \dot\mu_n\nu_n\pi i} Al(u_n/\bar\omega_n)$

[illegible] $\dot\mu_n\ \dot\nu_n$ [illegible]

$$\theta(u_n/\bar\omega_n+2\dot\omega_n) = e^{\sum \dot\mu_n\nu_n\pi i}\theta(u_n/\bar\omega_n)$$

[illegible] mod 2

$\bar\omega_n = \sum_\nu(\mu_\nu\omega_{n\nu}+\nu_\nu\omega'_{n\nu})$ $\quad \bar\omega_n' = \sum_\nu(\mu_\nu'\omega_{n\nu}+\nu_\nu'\omega'_{n\nu})$

[illegible] $\mu_6 \equiv \mu_6'$, $\nu_6 \equiv \nu_6'$ mod 2 [illegible]
$6 = 1 \cdots \varrho$

$\dot\mu_{\alpha}, \dot\nu_{\alpha}$ [illegible] $\bar\omega_\alpha + \dot\omega_\alpha = \ddot\omega_\alpha \mod 2$ [illegible]

$$Al(u_\alpha | \bar\omega_\alpha + \dot\omega_\alpha) = Al\left(u_\alpha | \ddot\omega_\alpha + 2\frac{\omega_\alpha + \dot\omega_\alpha - \ddot\omega_\alpha}{2}\right)$$

[illegible] $\ddot\omega_\alpha = \sum_b (\ddot\mu_b \omega_{\alpha b} + \ddot\nu_b \omega'_{\alpha b})$

[illegible] $\dfrac{\ddot\mu_b - \mu_b - \dot\mu_b}{2}, \dfrac{\ddot\nu_b - \nu_b - \dot\nu_b}{2}$

[illegible]

$$Al(u_\alpha | \bar\omega_\alpha + \dot\omega_\alpha) = e^{\frac{\pi i}{2}\sum_\alpha (\ddot\mu_\alpha - \dot\mu_\alpha - \mu_\alpha)\ddot\nu_\alpha} Al(u_\alpha | \ddot\omega_\alpha)$$

[illegible] (6) [illegible] $\ddot\omega_\alpha = \bar\omega_\alpha + \dot\omega_\alpha \mod 2$

$$(9)\quad Al(u_\alpha + \dot\omega_\alpha | \bar\omega_\alpha) = i^{\sum_\alpha [\ddot\mu_\alpha - \dot\mu_\alpha - \mu_\alpha]\ddot\nu_\alpha} e^{\mu_\alpha \dot\nu_\alpha \sum \dot\eta_\alpha (u_\alpha + \frac{1}{2}\dot\omega_\alpha) + \dot\mu_\alpha \dot\nu_\alpha \frac{\pi i}{4}} Al(u_\alpha | \ddot\omega_\alpha)$$

[illegible] $2\dot\omega_\alpha$ [illegible] $\dot\omega_\alpha$ [illegible] $\dot\mu_\alpha, \dot\nu_\alpha$ [illegible]

$\ddot\omega_\alpha = \bar\omega_\alpha, \ddot\mu_\alpha = \mu_\alpha, \ddot\nu_\alpha = \nu_\alpha$ [illegible]

$$(10)\quad Al(u_\alpha + 2\dot\omega_\alpha | \bar\omega_\alpha) = e^{-2\sum_\alpha(\dot\eta_\alpha(u_\alpha + \dot\omega_\alpha) + (\dot\mu_\alpha \dot\nu_\alpha - \dot\mu_\alpha \nu_\alpha + \mu_\alpha \dot\nu_\alpha)\frac{\pi i}{2})} Al(u_\alpha | \bar\omega_\alpha)$$

[illegible] (7) [illegible] 9 [illegible] 10 [illegible]

[illegible] ε_α [illegible] η_α [illegible] $\nu_1 \dots \nu_\rho$ [illegible] $-1, 0$, [illegible]

$\mu_1 \dots \mu_\rho$ [illegible] $+1, 0$, [illegible] $Al(u_\alpha | \bar\omega_\alpha)$ [illegible] $Al(u | \lambda)$

[illegible] $0, 1 \dots 2\rho - 1$ [illegible]

[illegible] $\lambda = 0, 1, 2, \dots 2\rho$ [illegible] μ_α, ν_α [illegible]

λ	μ_1	μ_2	$\cdots$	$\mu_{\rho-1}$	μ_ρ	ν_1	ν_2	$\cdots$	$\nu_{\rho-1}$	ν_ρ
0	1	1	$\cdots$	1	1	0	0	$\cdots$	0	0
1	1	1	$\cdots$	1	1	−1	0	$\cdots$	0	0
2	0	1	$\cdots$	1	1	−1	0	$\cdots$	0	0
3	0	1	$\cdots$	1	1	0	−1	$\cdots$	0	0
$\vdots$										
$2\rho-1$	0	0	$\cdots$	0	1	0	0	$\cdots$	0	−1
2ρ	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	$\cdots$	0	−1
$2\rho+1$	0	0	$\cdots$	0	0	0	0	$\cdots$	0	0

[illegible] α, β, κ [illegible] $0, 1, \dots 2\rho$ [illegible]

[illegible]

$Al(u_1\ldots)_{\alpha\beta\ldots\kappa}$

v, [illegible] $\mu_{\alpha} = \overset{\alpha}{\mu}_{\alpha} + \overset{\beta}{\mu}_{\alpha} \cdots + \overset{\kappa}{\mu}_{\alpha}$; $\nu_{\alpha} = \overset{\alpha}{\nu}_{\alpha} + \cdots + \overset{\kappa}{\nu}_{\alpha}$

[illegible] $\mu_{\alpha} = 0$ [illegible] $= 1$; $\nu_{\alpha} = 0$ [illegible] -1 [illegible]

[illegible] $\alpha\beta\ldots$ [illegible] $\rho+1$ [illegible] $2\rho+1$ [illegible]

[illegible]

$\alpha_1 \ldots \alpha_{2\rho+1}$ [illegible] $0, 1 \ldots 2\rho$ [illegible]

$$\overset{\alpha_1}{\mu}_{\alpha} + \cdots + \overset{\alpha_{2\rho+1}}{\mu}_{\alpha} \equiv 0, \quad \overset{\alpha_1}{\nu}_{\alpha} \cdots + \overset{\alpha_{2\rho+1}}{\nu}_{\alpha} \equiv 0 \quad \mod 2$$

[illegible]

$$Al(u_1\ldots)_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m} = Al(u_1\ldots)_{\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{2\rho+1}}$$

[illegible] $Al(u_1\ldots)_{\alpha\beta\ldots\kappa}$ [illegible]

$2\rho+1$ [illegible] $0, 1 \ldots 2\rho$ [illegible] $\rho+1$ [illegible]

[illegible]

$\rho = 2$ [illegible]

5, 0, 1, 2, 3, 4, 01, 02, 03, 04, 12, 13, 14, 23, 24, 34.

6 [illegible] 16.

[illegible] $\overset{\lambda}{m}_{\alpha}, \overset{\lambda}{n}_{\alpha}$

[illegible] $\mu_{\alpha}, \nu_{\alpha}$ [illegible] $\overset{\lambda}{\tilde\omega}_{\alpha}, \overset{\lambda}{\eta}_{\alpha}, \overset{\lambda}{\omega}_{\alpha}, \overset{\lambda}{\eta}_{\alpha}, \overset{\lambda}{\varepsilon}_{\alpha}$ [illegible]

$\tilde\omega_{\alpha} \ldots \varepsilon_{\alpha}$ [illegible]

$$(12)\quad Al(u_1\ldots)_\lambda = Al(u_{\alpha}|\hat{\omega}_{\alpha}) = e^{\sum_\alpha \left(\overset{\lambda}{\eta}_\alpha (u_\alpha + \tfrac{1}{2}\overset{\lambda}{\tilde\omega}_\alpha) + \overset{\lambda}{m}_\alpha \overset{\lambda}{n}_\alpha\right)\frac{\pi i}{4}} \cdot Al(u_1 + \overset{\lambda}{\tilde\omega}_1 \ldots)$$

[illegible]

[illegible]

(9)

$$(\underline{12})\quad Al(u_1+\overset{\mu}{\omega}_1\ldots)_\lambda = i^{c\mu/\lambda}\, e^{-\sum_\alpha\left(\overset{\mu}{\eta}_\alpha(u_\alpha+\frac{1}{2}\overset{\mu}{\omega}_\alpha)+\overset{\mu}{m}_\alpha\overset{\mu}{n}_\alpha\right)\frac{\pi i}{2}}\, Al(u_1\ldots)_{\lambda\mu}$$

$$c\mu/\lambda = \sum_\alpha\left(\overset{\lambda\mu}{m}_\alpha-\overset{\lambda}{m}_\alpha-\overset{\mu}{m}_\alpha\right)\left(\overset{\lambda\mu}{n}_\alpha-\overset{\lambda}{n}_\alpha-\overset{\mu}{n}_\alpha\right)$$

$$\tilde{\omega}_\alpha=\sum_b\left(m_b\,\omega_{\alpha b}+n_b\,\omega'_{\alpha b}\right)\ ;\ \tilde{\eta}_\alpha=\sum_b\left(m_b\,\eta_{\alpha b}+n_b\,\eta'_{\alpha b}\right)$$

$$\tilde{\omega}_\alpha\equiv\overset{\mu}{\omega}_\alpha \mod 2$$

$$(\underline{13})\quad Al(u_1+\tilde{\omega}_1\ldots)_\lambda = i^{\sum_\alpha\left(\overset{\lambda\mu}{m}_\alpha-\overset{\lambda}{m}_\alpha-m_\alpha\right)\left(\overset{\lambda\mu}{n}_\alpha-\overset{\lambda}{n}_\alpha-n_\alpha\right)}\, Al(u_1\ldots)_{\lambda\mu}\cdot e^{-\sum_\alpha\left[\tilde{\eta}_\alpha(u_\alpha+\frac{1}{2}\tilde{\omega})+\frac{m_\alpha n_\alpha\pi i}{4}\right]}$$

$\Theta(u_1\ldots)_\lambda,\ \omega_0$ … ε … e … ?

$e=2$

$$R_x=A_0(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)\qquad A_0>0,\quad a_0>a_1\ldots>a_4$$

$$u_1=\int_{a_1}^{x_1}\frac{(g_1+h_1x)\,dx}{\sqrt{R_x}}+\int_{a_3}^{x_2}\frac{(g_1+h_1x)\,dx}{\sqrt{R_x}}$$

$$u_2=\int_{a_4}^{x}\frac{(g_2+h_2x)\,dx}{\sqrt{R_x}}+\int_{a_3}^{x_2}\frac{(g_2+h_2x)\,dx}{\sqrt{R_x}}$$

$$K_{\alpha 1}=\int_{a_2}^{a_1}\frac{(g_\alpha+h_\alpha x)\,dx}{\sqrt{R_x}}\qquad K_{\alpha 2}=-\int_{a_4}^{a_3}\frac{(g_\alpha+h_\alpha x)\,dx}{\sqrt{R_x}}$$

$$\bar{K}_{\alpha 1}=\int_{a_1}^{a_0}\frac{(g_\alpha+h_\alpha x)\,dx}{\sqrt{R_x}}\qquad \bar{K}_{\alpha 2}=-\int_{a_3}^{a_2}\frac{(g_\alpha+h_\alpha x)\,dx}{\sqrt{R_x}}$$

$$K'_{\alpha 1}=\bar{K}_{\alpha 1}\ ;\ K'_{\alpha 2}=\bar{K}_{\alpha 1}+\bar{K}_{\alpha 2}$$

$(\alpha=1,2\ ;\ \sqrt{R_x},\ \sqrt{-R_x}$ …$)$

$$u_1 = 2K_{11} v_1 + 2K_{12} v_2 \,, \quad u_2 = 2K_{21} v_1 + 2K_{22} v_2$$

$$v_1 = \frac{1}{2}\,\frac{K_{22}u_1 - K_{12}u_2}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}} \;; \quad v_2 = \frac{1}{2}\,\frac{-K_{21}u_1 + K_{11}u_2}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}$$

$$\tau_{11} = \frac{K_{22}K_{11}' - K_{12}K_{21}'}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}\, i \;; \quad \tau_{22} = \frac{-K_{21}K_{12}' + K_{11}K_{22}'}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \frac{K_{22}K_{12}' - K_{12}K_{22}'}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}\, i = \frac{-K_{21}K_{11}' + K_{11}K_{21}'}{K_{11}K_{22} - K_{12}K_{21}}\, i$$

$$\frac{\sqrt[4]{A_0}}{\sqrt[4]{R'a_1}} \sqrt{(a_1 - x_1)(a_1 - x_2)} = \frac{\vartheta(v_1 v_2)_1}{\vartheta(v_1 v_2)} \;; \quad \frac{\sqrt[4]{A_0}}{\sqrt[4]{-R'a_3}} \sqrt{(a_3 - x_1)(a_3 - x_2)} = \frac{\vartheta(v_1 v_2)_3}{\vartheta(v_1 v_2)}$$

$$\frac{\sqrt[4]{A_0}}{\sqrt[4]{R'a_0}} \sqrt{(a_0 - x_1)(a_0 - x_2)} = \frac{\vartheta(v_1 v_2)_0}{\vartheta(v_1 v_2)} \;; \quad \frac{\sqrt[4]{A_0}}{\sqrt[4]{R'a_2}} \sqrt{-(a_2 - x_1)(a_2 - x_2)} = \frac{\vartheta(v_1 v_2)_2}{\vartheta(v_1 v_2)}$$

$$\frac{\sqrt[4]{A_0}}{\sqrt[4]{R'(a_4)}} \sqrt{(a_4 - x_1)(a_4 - x_2)} = \frac{\vartheta(v_1 v_2)_4}{\vartheta(v_1 v_2)}$$

$$\frac{\sqrt{a_\beta - a_\alpha}}{\sqrt{A_0}\, i^{\beta/\alpha}} \left\{ \frac{\sqrt{R x_1}}{(x_1 - a_\alpha)(x_1 - a_\beta)(x_1 - x_2)} + \frac{\sqrt{R x_2}}{(x_2 - a_\alpha)(x_2 - a_\beta)(x_2 - x_1)} \right\} = \frac{\vartheta(v_1 v_2)\,\vartheta(v_1 v_2)_{\alpha\beta}}{\vartheta(v_1 v_2)_\alpha\, \vartheta(v_1 v_2)_\beta}$$

$$R x = \frac{R x}{A_0} = P(x)\, Q(x) \qquad P x = (x - a_1)(x - a_3)$$

$$\frac{\vartheta(0,0)_0}{\vartheta(0,0)} = \frac{\sqrt{(a_0 - a_1)(a_0 - a_3)}}{\sqrt[4]{R'(a_0)}} = \sqrt[4]{\frac{(a_0 - a_1)(a_0 - a_3)}{(a_0 - a_2)(a_0 - a_4)}}$$

$$\frac{\vartheta(0,0)_2}{\vartheta(0,0)} = \frac{\sqrt{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}}{\sqrt[4]{R'a_2}} = \sqrt[4]{\frac{(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)}{(a_0 - a_2)(a_2 - a_4)}}$$

$$\frac{\vartheta(0,0)_4}{\vartheta(0,0)} = \frac{\sqrt{(a_1 - a_4)(a_3 - a_4)}}{\sqrt[4]{R'(a_4)}} = \sqrt[4]{\frac{(a_1 - a_4)(a_3 - a_4)}{(a_0 - a_4)(a_2 - a_4)}}$$

$$\vartheta(0,0)_1 = 0, \quad \vartheta(0,0)_3 = 0$$

$$\vartheta(0,0)_{13} = 0, \quad \vartheta(0,0)_{02} = 0, \quad \vartheta(0,0)_{04} = 0, \quad \vartheta(0,0)_{24} = 0;$$

$$\frac{\vartheta(0,0)_{2\alpha-1,\,2\beta}}{\vartheta(0,0)} = \sqrt[4]{\frac{-P(a_{2\beta})\,Q(a_{2\alpha-1})}{(a_{2\alpha-1}-a_{2\beta})^2\,P'(a_{2\alpha-1})\,Q'(a_{2\beta})}}$$

$$\frac{\vartheta(0,0)_{12}}{\vartheta(0,0)} = \sqrt[4]{\frac{(a_2-a_3)(a_0-a_1)(a_1-a_4)}{(a_1-a_3)(a_0-a_2)(a_2-a_4)}}.$$

II.

Zur Theorie der Transformation der elliptischen Functionen.

(Vortrag von Weierstraß.)

[illegible] $(2\omega, 2\omega')$ [illegible] $\wp(u, g_2, g_3)$; [illegible]

$w = \frac{2m\omega + 2m'\omega'}{n}$, ($m, m'$ [illegible]), n [illegible]

[illegible]

$$G_1 = \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_\nu\, \wp(\nu w)\,;\quad G_2 = g_2 + 20\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_\nu\, \wp''(\nu w)\,;\quad G_3 = g_3 + \tfrac{7}{3}\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_\nu\, \wp^{IV}(\nu w)$$

[illegible]

$$(1)\qquad \wp(u, G_2, G_3) = -2G_1 + \wp u + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_\nu \{\wp(u+\nu w) - \wp(u-\nu w)\}$$

$$(2)\qquad \sigma(u, G_2, G_3) = e^{G_1 u^2}\sigma^n u \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\{\wp u - \wp(\nu w)\}$$

([illegible] $\wp(u, g_2, g_3)$, $\sigma(u, g_2, g_3)$ [illegible] $\wp u$, σu [illegible])

[illegible] (2) [illegible]

$$(3)\qquad \frac{\sigma'(u, G_2, G_3)}{\sigma(u, G_2, G_3)} = 2G_1 u + n\frac{\sigma' u}{\sigma u} + \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_\nu \frac{\wp' u}{\wp u - \wp(\nu w)}$$

[illegible] n, m, m' [illegible] $\frac{2\nu m}{n}$, $\frac{2\nu m'}{n}$, [illegible] $\nu = 1, 2, \dots \frac{n-1}{2}$

[illegible] $\wp\nu w$ [illegible]

$$\infty,\ \wp(\omega),\ \wp(\omega+\omega')\ \wp(\omega')$$

[illegible] (3) $u = \omega_\alpha$ [illegible] (α [illegible] 1, 2, 3 [illegible])

$$(4)\qquad \omega_1 = \omega,\quad \omega_2 = -(\omega+\omega'),\quad \omega_3 = \omega'\,;\quad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0\,;$$

[illegible]

$$(5)\qquad \frac{\sigma'(\omega_\alpha, G_2, G_3)}{\sigma(\omega_\alpha, G_2, G_3)} = 2G_1\omega_\alpha + n\frac{\sigma'\omega_\alpha}{\sigma\omega_\alpha}$$

[illegible] $2\omega_\alpha$ [illegible] $\wp(u, G_2, G_3)$ [illegible]

$$(6)\qquad \wp\omega_\alpha = e_\alpha\qquad,\ \wp(\omega_\alpha, G_2, G_3) = e'_\alpha$$

[illegible] $\wp(u, g_2, g_3)$ [illegible] e_1, e_2, e_3 [illegible]
$e_1 e_2 e_3$ [illegible] $\wp u$ [illegible] $e_1' e_2' e_3'$ [illegible]
[illegible] $\wp(\omega_1, g_2 g_3) = \wp(\omega_2, g_2, g_3)$ [illegible] $\wp(\omega_1+\omega_2, g_2 g_3)$
$-\wp(\omega_3 g_2 g_3) = \infty$ [illegible]

(7) $4e_\alpha'^3 - g_2 e_\alpha' - g_3 = 0$ [illegible] $\alpha = 1, 2, 3$.

[illegible] α, β, γ [illegible] $1, 2, 3$ [illegible]

$$\wp u - \wp v = -\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\, \sigma^2 v}$$

[illegible] $u = \omega_\alpha$, $v = \omega_\beta$, [illegible] $u+v = -\omega_\gamma$, $u - v = \omega_\gamma + 2\omega_\alpha$ [illegible]

$$\wp\omega_\alpha - \wp\omega_\beta = \frac{\sigma\omega_\gamma\, \sigma(\omega_\gamma + 2\omega_\alpha)}{\sigma^2\omega_\alpha\, \sigma^2\omega_\beta} = \left(\frac{\sigma\omega_\gamma}{\sigma\omega_\alpha\, \sigma\omega_\beta}\right)^2 e^{-2\omega_\beta \frac{\sigma'\omega_\alpha}{\sigma\omega_\alpha}}.$$

[illegible] $\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma$ [illegible] $\omega_\alpha + \omega_\beta + \omega_\gamma = 0$ [illegible]
[illegible] $\wp\omega_\alpha, \wp\omega_\beta, \wp\omega_\gamma$ [illegible] e_1, e_2, e_3 [illegible]

$$\wp(\omega_\alpha; g) - \wp(\omega_\beta; g) = \left(\frac{\sigma(\omega_\gamma; g)}{\sigma(\omega_\alpha; g)\,\sigma(\omega_\beta; g)}\right)^2 e^{-2\omega_\beta \frac{\sigma'(\omega_\alpha g)}{\sigma(\omega_\alpha g)}}.$$

[illegible] (6, 2, 5):

(8) $$e_\alpha' - e_\beta' = (e_\alpha - e_\beta)^n \prod_{\nu}^{\frac{n-1}{2}} \left\{\frac{\wp(\nu w) - e_\gamma}{[\wp(\nu w) - e_\alpha][\wp(\nu w) - e_\beta]}\right\}^2 = (e_\alpha - e_\beta)^n \prod_{1\nu}^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{\wp\nu w - e_\gamma}{\frac{1}{4}\wp'\nu w}\right)^2$$

n [illegible] $w = \frac{2\omega}{n}$ [illegible] $\left(\frac{2\omega}{n}, 2\omega'\right)$ [illegible] $\wp(u, g_2, g_3)$ [illegible]

$$\vartheta(v|\tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{(n+\frac{1}{2})[2v - 1 + (n+\frac{1}{2})\tau]\pi i}$$

$$\sigma(u, g) = \frac{2\omega}{n} e^{cu^2} \frac{\vartheta\left(\frac{nu}{2\omega} \middle| \frac{n\omega'}{\omega}\right)}{\vartheta'\left(0 \middle| \frac{n\omega'}{\omega}\right)}$$

$$c = \frac{n}{2\omega} \frac{\sigma'\left(\frac{\omega}{n}\middle| g\right)}{\sigma\left(\frac{\omega}{n}\middle| g\right)} = \frac{1}{2\omega}\frac{\sigma'(\omega, g)}{\sigma(\omega, g)} = g_1 + \frac{n}{2\omega}\frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega}$$

$$\sigma u = 2\omega e^{\frac{u^2}{2\omega}\frac{\sigma'\omega}{\sigma\omega}} \frac{\vartheta\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)}{\vartheta'\left(0\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)}$$

[illegible]

(9) $\frac{2\omega}{n}\frac{\vartheta\left(\frac{nu}{2\omega}\middle|\frac{n\omega'}{\omega}\right)}{\vartheta\left(0\middle|\frac{n\omega'}{\omega}\right)} = \left(\frac{2\omega\vartheta\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)}{\vartheta'\left(0\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)}\right)^n \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{\nu}\left\{\wp(u)-\wp\left(\frac{2\nu\omega}{n}\right)\right\}.$

[illegible]

$\frac{(2\omega)^6}{\pi^2}(e_1-e_2)(e_1-e_3)(e_2-e_3) = \left(\vartheta'\left(0\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)\right)^4$

$\frac{(2\omega)^6}{n^6\pi^2}(e_1'-e_2')(e_1'-e_3')(e_2'-e_3') = \left(\vartheta'\left(0\middle|\frac{n\omega'}{\omega}\right)\right)^4$

[illegible]

$(e_1'-e_2')(e_1'-e_3')(e_2'-e_3') = (e_1-e_2)\dots \prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{\nu}\left(\frac{4}{\wp'\left(\frac{2\nu\omega}{n}\right)}\right)^4$

[illegible]

$\left(\vartheta'\left(0\middle|\frac{n\omega'}{\omega}\right)\right)^4 = \left(\vartheta'\left(0\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)\right)^{4n}\frac{\pi^{2n-2}}{n^6(2\omega)^{6(n-1)}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{\nu}\left\{\frac{4}{\wp'\left(\frac{2\nu\omega}{n}\right)}\right\}^4$

[illegible] $\omega, \frac{\omega'}{\omega i}$ [illegible] $\vartheta'\left(0\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right), \vartheta'\left(0\middle|\frac{n\omega'}{\omega}\right)$ [illegible] $\wp'\left(\frac{2\nu\omega}{n}\right)$,
$\frac{2\nu\omega}{n}$ [illegible]

(10) $\vartheta'\left(0\middle|\frac{n\omega'}{\omega}\right) = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n\sqrt{n}\,(2\omega)^{\frac{3(n-1)}{2}}}\left(\vartheta'\left(0\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)\right)^n\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{\nu}\left(\frac{4}{\wp'\left(\frac{2\nu\omega}{n}\right)}\right)^{*}$

$= \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2\omega}\right)^{n-1}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\vartheta'\left(0\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)\right)^n\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{4}{\wp'\left(\frac{2\nu\omega}{n}\right)}\right)^{*}$

[illegible] $\sqrt{n}$ [illegible]

[illegible] $\omega, \frac{\omega'}{\omega i}$ [illegible]

[illegible]

[illegible] ω, ω'. [illegible] (9, 10) [illegible]

(11) $\vartheta\left(\frac{nu}{2\omega}\middle|\frac{n\omega'}{\omega}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{\nu}\left(\frac{\wp\left(\frac{2\nu\omega}{n}\right)-\wp(u)}{\frac{1}{4}\wp'\left(\frac{2\nu\omega}{n}\right)}\right)\vartheta^n\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right).$

[illegible] $\omega', -\omega$ [illegible] ω, ω', [illegible]

$\vartheta\left(\frac{u}{2\omega'}, -\frac{\omega}{\omega'}\right) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega'}{\omega i}}\,e^{-\frac{\pi i u^2}{4\omega\omega'}}\vartheta\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)$ [illegible]

$\vartheta\left(\frac{nu}{2\omega'}, \frac{n\omega}{\omega'}\right) = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega'}{n\omega i}}\,e^{-\frac{n\pi i u^2}{4\omega\omega'}}\vartheta\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'}{n\omega}\right)$

[illegible]

(12) $\vartheta\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'}{n\omega}\right) = i^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{1}^{\frac{n-1}{2}}{}_{\nu}\left(\frac{\wp\left(\frac{2\nu\omega'}{n}\right)-\wp u}{\frac{1}{4}\wp'\left(\frac{2\nu\omega'}{n}\right)}\right)\vartheta^n\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)$

[illegible] $\omega'+8\nu\omega$ [illegible] $\vartheta(v|\tau+8\nu) = \vartheta(v|\tau)$

(13) $\vartheta\left(\frac{u}{2\omega}\Big|\frac{\omega'+8\nu\omega}{n\omega}\right)=i^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^{\frac{n-1}{2}}\prod_{1,\nu}^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{p\left(\frac{2\nu(\omega'+8\nu\omega)}{n}\right)-pu}{\frac{1}{4}p'\left(\frac{2\nu(\omega'+8\nu\omega)}{n}\right)}\right\}\vartheta\left(\frac{u}{2\omega}\Big|\frac{\omega'}{\omega}\right)$

[illegible] $\frac{n-1}{2}$

(14) $f(u,w) = \prod_{1,\nu}\left(\frac{p(\nu w)-pu}{\frac{1}{4}p'\nu w}\right)$

[illegible] $f^2(u,w)$ [illegible] $g_2 g_3$, pu [illegible] $(n+1)$ [illegible]

[illegible]

$w = \frac{2\omega}{n}, \frac{2\omega'}{n}, \frac{2(\omega'+n'\omega)}{n}, \frac{2(\omega'+2n'\omega)}{n}, \dots \frac{2(\omega'+(n-1)\omega)}{n}$

[illegible] (11, 12, 13) [illegible] $f(u,w)$

$\frac{n+1}{2}$ [illegible] $\vartheta(v|\tau)$ [illegible]

$\vartheta\left(v\Big|\frac{\tau+8\nu}{n}\right)=\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{(n+\frac{1}{2})\left[2v-1+(n+\frac{1}{2})\frac{\tau+8\nu}{n}\right]\pi i}$

[illegible] $nu+r$ [illegible] $0, 1, \dots n-1$; [illegible] $-\infty$

$+\infty$ [illegible]

$\vartheta\left(v\Big|\frac{\tau+8\nu}{n}\right)=\sum_{0,r}^{n-1}\sum_{-\infty,u}^{+\infty}e^{(nu+r+\frac{1}{2})\left[2v-1+(nu+r+\frac{1}{2})\frac{\tau+8\nu}{n}\right]\pi i}$

$=\sum_{0,r}^{n-1}e^{\frac{2\nu(2r+1)^2\pi i}{n}}\sum_{-\infty,u}^{+\infty}e^{(nu+r+\frac{1}{2})\left[2v-1+(nu+r+\frac{1}{2})\frac{\tau}{n}\right]\pi i}$

[illegible] $e^{\frac{2\nu(2r+1)^2\pi i}{n}}=e^{\frac{2\nu[2(n-r-1)+1]^2}{n}\pi i}$ [illegible]

(15) $\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{(nu+r+\frac{1}{2})\left[2v-1+(nu+r+\frac{1}{2})\frac{\tau}{n}\right]\pi i}=\theta_r$ [illegible]

(16) $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$ [illegible]

(17) $\vartheta\left(v\Big|\frac{\tau+8\nu}{n}\right)=\theta_{\frac{n-1}{2}}+\sum_{0,r}^{\frac{n-3}{2}}\varepsilon^{(2r+1)^2\nu}\left(\theta_r+\theta_{n-r-1}\right)$

(18) $\vartheta(nv|n\tau)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\theta_{\frac{n-1}{2}}$

[illegible] $(2r+1)$ [illegible] (17) [illegible]

[illegible]

(19) $\sum_{0,\nu}^{n-1}\vartheta\left(v\Big|\frac{\tau+8\nu}{n}\right)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\vartheta(nv|n\tau)$

[illegible] $1, 2, \dots n-1$, [illegible] $(2r+1)^2$ [illegible] mod n, [illegible]

[illegible] $(0), (1) \dots \left(\frac{n-3}{2}\right)$ [illegible]

$=\frac{n-1}{2}$ [illegible]

$\sum_{0,\nu}^{n-1}\varepsilon^{\nu([2r+1]^2-e)}=\sum_{0,\nu}^{n-1}\varepsilon^{\nu((r)-e)}=0$ [illegible]

(20) $\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\, \varepsilon^{-\nu\varrho}\, \vartheta\left(v \middle| \frac{\tau+8\nu}{n}\right) = 0$

(17)(20) … $v=\frac{u}{2\omega}$, $\tau=\frac{\omega'}{\omega}$ … (11)(12)(13)

$$(21)\begin{cases} \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\, f\left(u, \frac{2(\omega'+8\nu\omega)}{n}\right) = i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}\, f\left(u, \frac{2\omega}{n}\right) \\ \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\, \varepsilon^{-\nu\varrho} f\left(u, \frac{2(\omega'+8\nu\omega)}{n}\right) = 0 \end{cases}$$

… $(n+1)^2$ … $f\left(u, \frac{2\omega}{n}\right)$, $f\left(u, \frac{2(\omega'+8\nu\omega)}{n}\right)$ $(\nu=0,1\,..\,n-1)$

… g_2, g_3 … pu …

$n=5$ … $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ $\varrho = 2, 3,$ …

$$\frac{p\left(\frac{\omega}{5}\right)-pu}{\frac14 p'\left(\frac{2\omega}{5}\right)} \cdot \frac{p\left(\frac{4\omega}{5}\right)-pu}{\frac14 p'\left(\frac{4\omega}{5}\right)} \quad f,$$

$$\frac{p\left(\frac{2(\omega'+8\nu\omega)}{5}\right)-pu}{\frac14 p'\left(\frac{2(\omega'+8\nu\omega)}{5}\right)} \cdot \frac{p\left(\frac{4(\omega'+8\nu\omega)}{5}\right)-pu}{\frac14 p'\left(\frac{4(\omega'+8\nu\omega)}{5}\right)} \quad f_\nu$$

$$\sqrt5 f + f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0$$
$$f_0 + \varepsilon^2 f_1 + \varepsilon^4 f_2 + \varepsilon f_3 + \varepsilon^3 f_4 = 0$$
$$f_0 + \varepsilon^3 f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^4 f_3 + \varepsilon^2 f_4 = 0$$

(11, 13) …

$$f\left(u, \frac{2\omega}{n}\right) = \sqrt{n}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta\left(\frac{nu}{2\omega}\middle|\frac{n\omega'}{\omega}\right)}{\vartheta^n\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)}$$

$$(23)\quad f\left(u, \frac{2(\omega'+8\nu\omega)}{n}\right) = i^{-\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\vartheta\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'+8\nu\omega}{n}\right)}{\vartheta^n\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)}.$$

…

$$\mathfrak{F}_\kappa = \left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} i^{-\frac{n-1}{2}} \left(\theta_\kappa + \theta_{n-1-\kappa}\right) \quad \left(\kappa = 0, ..\, \frac{n-3}{2}\right)$$

$$(24)\quad \mathfrak{F} = \frac{\left(\frac{2\omega}{\pi}\right)^{\frac{n-1}{2}} i^{-\frac{n-1}{2}}}{\vartheta^n\left(\frac{u}{2\omega}\middle|\frac{\omega'}{\omega}\right)}\, \theta_{\frac{n-1}{2}}$$

…

$$(25)\quad f\left(u \middle| \frac{2\omega}{n}\right) = i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}\, \mathfrak{F}$$
$$f\left(u \middle| \frac{2(\omega'+8\nu\omega)}{n}\right) = \mathfrak{F} + \sum_{0}^{\frac{n-3}{2}}{}_{\kappa}\, \varepsilon^{\nu(2\kappa+1)^2} \mathfrak{F}_\kappa$$

[illegible]

$$(26)\quad (f^2+a)^5(f^2+5a)+10b(f^2+a)^3+4c(f^2+a)+5b^2-4ac=0$$

[illegible] a, b, c [illegible] F, F_1, F_2 [illegible] g, g_1, g_2 [illegible]
[illegible] 5 [illegible] ([illegible] 1861 [illegible])
[illegible] g_1, g_2 [illegible]
[illegible] 59 [illegible] 306) [illegible] Jordan Traité. 37[illegible]

[illegible] Weierstraß [illegible]

[illegible] $x_0, x_1, \dots x_\varrho$ [illegible]

$\sqrt{R(x_0)}, -\sqrt{R(x_1)}, \dots -\sqrt{R(x_\varrho)}$ [illegible] $(x-x_0)\,\mathfrak{L}(x)\,\mathfrak{M}(x)$,

[illegible] $\mathfrak{M}(x) = \dfrac{\sqrt{R(x_0)}}{(x-x_0)\mathfrak{L}(x_0)} + \sum_\alpha^1 \left\{ \dfrac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{(x-x_\alpha)(x_0-x_\alpha)\mathfrak{L}'(x_\alpha)} \right\}$, $\mathfrak{L}(x) = (x-x_1)\dots(x-x_\varrho)$.

[illegible]

$$R(x) - (x-x_0)^2\mathfrak{L}^2(x)\,\mathfrak{M}^2(x) = 0$$

[illegible] $x_0, x_1 \dots x_\varrho$ [illegible] $x_{\varrho+1} \dots x_{2\varrho}$ [illegible] $\bar{\mathfrak{L}}(x) = (x-x_{\varrho+1})\dots(x-x_{2\varrho})$ [illegible]

$$R(x) - (x-x_0)^2\mathfrak{L}^2(x)\,\mathfrak{M}^2(x) = A(x-x_0)\,\mathfrak{L}(x)\,\bar{\mathfrak{L}}(x)$$

[illegible]

$$\text{I.}\quad \frac{1}{2}\int_{a_0}^{x_0} \frac{P(x)}{(x-a_{2b-1})}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - \sum_\alpha{}^1 \frac{1}{2}\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{P(x)}{x-a_{2b-1}}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \sum_\alpha{}^1 \frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{x_{\varrho+\alpha}} \frac{P(x)}{x-a_{2b-1}}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = 0,$$

$$\text{II.}\quad \frac{1}{2}\int_{a_0}^{x_0} \frac{\sqrt{R(\xi)}}{P(\xi)}\frac{P(x)}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} - \sum_\alpha{}^1 \frac{1}{2}\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha} \frac{\sqrt{R(\xi)}}{P(\xi)}\frac{P(x)}{(x-\xi)}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} + \sum_\alpha{}^1 \frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{x_{\varrho+\alpha}} \frac{\sqrt{R\xi}}{P\xi}\frac{P(x)}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left\{ \frac{\sqrt{R\xi} - (\xi-x_0)\mathfrak{L}(\xi)\mathfrak{M}(\xi)}{\sqrt{R(\xi)} + (\xi-x_0)\mathfrak{L}(\xi)\mathfrak{M}(\xi)} \right\},\quad (\xi \gtrless a_0, a_1 \dots a_{2\varrho})$$ [illegible]

[illegible] $\sqrt{R(x_{\varrho+\alpha})} = (x_{\varrho+\alpha}-x_0)\,\mathfrak{L}(x_{\varrho+\alpha})\,\mathfrak{M}(x_{\varrho+\alpha})$ [illegible]

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R\xi}}{P\xi}\frac{Px_0}{x_0-\xi}\frac{dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} - \sum_\alpha{}^1 \frac{1}{2}\frac{\sqrt{R\xi}}{P\xi}\frac{Px_\alpha}{x_\alpha-\xi}\frac{dx_\alpha}{\sqrt{Rx_\alpha}} + \sum_\alpha{}^1 \frac{1}{2}\frac{\sqrt{R\xi}}{P\xi}\frac{Px_{\varrho+\alpha}}{x_{\varrho+\alpha}-\xi}\frac{dx_{\varrho+\alpha}}{\sqrt{R(x_{\varrho+\alpha})}}$$

$$= \frac{d\cdot(\xi-x_0)\mathfrak{L}\xi\,\mathfrak{M}\xi\,\sqrt{R\xi}}{(\xi-x_0)^2\mathfrak{L}^2\xi\,\mathfrak{M}^2\xi - R\xi}$$

$$\frac{1}{2}\frac{P(x_0)}{x_0-\xi}\frac{dx_0}{\sqrt{Rx_0}} - \sum_\alpha{}^1 \frac{1}{2}\frac{Px_\alpha}{x_\alpha-\xi}\frac{dx_\alpha}{\sqrt{Rx_\alpha}} + \sum_\alpha{}^1 \frac{1}{2}\frac{Px_{\varrho+\alpha}}{x_{\varrho+\alpha}-\xi}\frac{dx_{\varrho+\alpha}}{\sqrt{Rx_{\varrho+\alpha}}} =$$

$$\frac{d(\xi-x_0)\mathfrak{L}\xi\,\mathfrak{M}\xi\,P\xi}{(\xi-x_0)^2\mathfrak{L}^2\xi\,\mathfrak{M}^2\xi - R(\xi)}$$

[illegible] ξ [illegible] a_{2b-1} [illegible] $\xi - a_{2b-1}$ [illegible] $\xi - a_{2b-1}$ [illegible]

$$\frac{1}{2}\frac{Px_0}{(x_0-a_{2b-1})^2}\frac{dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} - \sum_\alpha{}^1 \frac{1}{2}\frac{Px_\alpha}{(x_\alpha-a_{2b-1})^2}\frac{dx_\alpha}{\sqrt{Rx_\alpha}} + \sum_\alpha{}^1 \frac{1}{2}\frac{P(x_{\varrho+\alpha})}{(x_{\varrho+\alpha}-a_{2b-1})^2}\frac{dx_{\varrho+\alpha}}{\sqrt{R(x_{\varrho+\alpha})}}\cdot$$

$$= \frac{d(\xi - x_0)\,\mathcal{L}(\xi)\,\mathfrak{M}(\xi)\,\mathfrak{P}(\xi)}{(\xi - x_0)^2 \mathcal{L}^2_\xi\, \mathfrak{M}^2(\xi) - \mathfrak{R}(\xi)}.$$ [illegible] ξ [illegible] a_{2b-1} [illegible] $\xi - a_{2b-1}$ [illegible] $\xi - a_{2b-1}$ [illegible] $d_{,n}$ [illegible]

$$\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{P}(x_0)}{(x_0 - a_{2b-1})^2}\frac{dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} - \sum_\alpha \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{P}x_\alpha}{(x_\alpha - a_{2b-1})^2}\frac{dx_\alpha}{\sqrt{R(x_\alpha)}} + \sum_\alpha \tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{P}x_{\rho+\alpha}}{(x_{\rho+\alpha} - a_{2b-1})^2}\frac{dx_{\rho+\alpha}}{\sqrt{R(x_{\rho+\alpha})}}$$

$$= \frac{d(a_{2b-1} - x_0)\,\mathcal{L}a_{2b-1}\,\mathfrak{M}a_{2b-1}\,\mathfrak{P}'(a_{2b-1})}{(a_{2b-1} - x_0)^2\mathcal{L}^2 a_{2b-1}\,\mathfrak{M}^2_{a_{2b-1}}}.$$

[illegible] : III $$\int_{a_0}^{x_0}\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{Q}a_{2b-1}}{\mathfrak{P}'_{a_{2b-1}}}\frac{\mathfrak{P}x_0}{(x - a_{2b-1})^2}\frac{dx_0}{\sqrt{R(x_0)}} - \sum_\alpha\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha}\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{Q}a_{2b-1}}{\mathfrak{P}'a_{2b-1}}\frac{\mathfrak{P}x_\alpha}{(x_\alpha - a_{2b-1})^2}\frac{dx_\alpha}{\sqrt{R x_\alpha}}$$

$$+ \sum_\alpha\int_{a_{2\alpha}}^{x_{\rho+\alpha}}\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{Q}a_{2b-1}}{\mathfrak{P}'a_{2b-1}}\frac{\mathfrak{P}x_{\rho+\alpha}}{(x_{\rho+\alpha} - a_{2b-1})^2}\frac{dx_{\rho+\alpha}}{\sqrt{R x_{\rho+\alpha}}} = -\frac{\mathfrak{Q}^2 a_{2b-1}}{(a_{2b-1} - x_0)\mathcal{L}a_{2b-1}\,\mathfrak{M}a_{2b-1}},$$

[illegible] $$-\tfrac{1}{2}\int_{a_{2b-1}}^{x_b}\frac{\mathfrak{Q}a_{2b-1}}{\mathfrak{P}'a_{2b-1}}\frac{\mathfrak{P}x_b}{(x_b - a_{2b-1})^2}\frac{dx_b}{\sqrt{R x_b}} - \frac{\sqrt{\mathfrak{Q}(a_{2b-1})}}{\sqrt{\mathfrak{P}'a_{2b-1}}}(x - a_{2b-1})^{-\frac{1}{2}}\sum_1^\infty c_m\left(\sqrt{x - a_{2b-1}}\right)^{2m}$$

[illegible] 9. —

[illegible]:

$$u_1 = \sum_\alpha\int_{a_{2\alpha-1}}^{x}\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{P}x}{x - a_1}\frac{dx}{\sqrt{Rx}}\,;\; u_2 = \sum_\alpha\int_{a_{2\alpha-1}}\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{P}x}{x - a_3}\frac{dx}{\sqrt{Rx}},\;\ldots\; u_\rho = \sum_\alpha\int_{a_{2\alpha-1}}^{x}\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{P}x}{x - a_{2\rho-1}}\frac{dx}{\sqrt{Rx}}$$

[illegible] $$\sqrt{\frac{\mathcal{L}(a_{2\alpha-1})}{-\mathfrak{Q}(a_{2\alpha-1})}} = al(u_1, \ldots u_\rho)_{2\alpha},\; \sqrt{\frac{\mathcal{L}a_{2\alpha}}{\mathfrak{P}a_{2\alpha}}} = al(u_1 \ldots u_\rho)_{2\alpha},\; \sqrt{\frac{\mathcal{L}a_0}{\mathfrak{P}a_0}} = al(u_1 \ldots)_0$$

[illegible]

$$al(u_1 \ldots)_{2\alpha-1} = u_\alpha + (u_1 \ldots)_3^{(2\alpha-1)} + (u_1 \ldots)_5^{(2\alpha-1)} + \ldots$$

$$al(u_1 \ldots)_{2\alpha} = 1 + (u_1 \ldots)_2^{(2\alpha)} + (u_1 \ldots)_4^{(2\alpha)} + \ldots$$

$$al(u_1 \ldots)_0 = 1 + (u_1 \ldots)_2^{(0)} + \ldots$$

[illegible] ; [illegible] $\sum_\beta \omega_{\alpha\beta} + \sum \bar{\omega}_{\alpha\beta} + \bar{a}^{2\rho}_\alpha - \int_{a_0}^{x_0}\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{P}(x)}{x - a_{2\alpha-1}}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} = v_\alpha$ [illegible]

$$\sum_\alpha\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_{\alpha+\rho}}\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{P}x}{x - a_{2\alpha-1}}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} = u_\alpha + v_\alpha.$$

$$R(x) - (x - x_0)^2\mathcal{L}^2_x\,\mathfrak{M}^2_x = A(x - x_0)\mathcal{L}_x\,\bar{\mathcal{L}}(x)$$ [illegible] a_α [illegible] $a_0, a_1, \ldots a_{2\rho}$

$$-(a_\alpha - x_0)\,\mathfrak{M}^2(a_\alpha)\,al^2(u_1 \ldots u_\rho)_\alpha = A\,al^2(u_1 + v_1, \ldots u_\rho + v_\rho)_\alpha$$ [illegible]

1.) $$\frac{al(u_1 + v_1, \ldots u_\rho + v_\rho)_\alpha}{al(u_1 \ldots u_\rho)_\alpha} = \frac{\sqrt{R x_0}}{A\sqrt{\frac{x_0 - a_\alpha}{A}}\,\mathcal{L}x_0} - \sqrt{\frac{x_0 - a_\alpha}{A}}\sum_\alpha\frac{\sqrt{R x_\alpha}}{(a_\alpha - x_\alpha)(x_0 - x_\alpha)\mathcal{L}'x_\alpha}$$

$\sqrt{\frac{x_0-a_\alpha}{A}}$ [illegible]; [illegible] $x_0=\infty$ [illegible] $v_\alpha=0$, $\frac{\sqrt{Rx_0}}{A\sqrt{\frac{x_0-a_\alpha}{A}}\,\mathfrak{L}x_0}=1$

[illegible] $x_0=a_\alpha$ [illegible] 1) $\mathfrak{L}a_\alpha = l_\alpha\, al^2(u_1\ldots u_\varrho)_\alpha$ [illegible]

2) $al\left(u_1+\sum_{\alpha}^{2\varrho}{}_{1}^{\gamma}\omega_1,\ldots u_\varrho+\sum_{\alpha}^{2\varrho}{}_{1}^{\gamma}\omega_\varrho\right) = \frac{\sqrt{\frac{1}{A}}\,R'(a_\alpha)}{l_\alpha\, al(u_1\ldots u_\varrho)_\alpha}$. [illegible] $x_0=a_\beta$ $(\beta\gtrless\alpha)$ [illegible]

3) $\frac{al(u_1+\sum_\beta^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_1,\ldots u_\varrho+\sum_\beta^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_\varrho)_\alpha}{al(u_1\ldots u_\varrho)_\alpha} = -\sqrt{\frac{a_\beta-a_\alpha}{A}}\sum_1^{\varrho}\frac{\sqrt{R(x_\nu)}}{(a_\alpha-x_\nu)(a_\beta-x_\nu)\mathfrak{L}'x_\nu}$

[illegible] α [illegible] β, [illegible]

4) $\sqrt{\frac{a_\alpha-a_\beta}{A}}\,\frac{al(u_1+\sum_\beta^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_1\ldots u_\varrho\ldots)_\alpha}{al(u_1\ldots u_\varrho)_\alpha} = \sqrt{\frac{a_\beta-a_\alpha}{A}}\,\frac{al(u_1+\sum_\alpha^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_1,\ldots)_\beta}{al(u_1\ldots)_\beta}$

[illegible] 2 u 3 [illegible] $\sqrt{Rx_1}, \sqrt{Rx_2}\ldots$ [illegible] $-\sqrt{Rx_1}, -\sqrt{Rx_2}\ldots$ [illegible] $u_1, u_2\ldots u_\varrho$ [illegible] $-u_1, -u_2\ldots -u_\varrho$; [illegible] 6 $al(u_1\ldots u_\varrho)_\alpha = (-1)^\alpha al(-u_1\ldots -u_\varrho)$:

$$al\left(u_1+\sum_\alpha^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_1,\ldots u_\varrho+\sum_\alpha^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_\varrho\right)_\alpha = al\left(u_1-\sum_\alpha^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_1\ldots\right)_\alpha$$

$$al\left(u_1+\sum_\beta^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_1\ldots\right)_\alpha = -al\left(u_1-\sum_\beta^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_1\ldots\right)_\alpha \quad k$$

5) $al\left(u_1+2\sum_\alpha^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_1,\ldots\right)_\alpha = al(u_1\ldots u_\varrho)_\alpha$

$al\left(u_1+2\sum_\beta^{2\varrho}{}_1^\gamma\omega_1\ldots\right)_\alpha = -al(u_1\ldots u_\varrho)_\alpha$. [illegible] 1) $u_1\ldots u_\varrho = v_\varrho$

6) $al(v_1\ldots v_\varrho)_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\frac{x_0-a_\alpha}{A}}}$ $\quad \alpha = 2\kappa-1$

$al(v_1\ldots)_\alpha = \frac{\sqrt{Rx_0}}{A\sqrt{\frac{x_0-a_\alpha}{A}}\,\mathfrak{P}(x_0)}$ $\quad \alpha = 0, 2\kappa.$

[illegible] $\omega_\alpha = \sum_1^{2\varrho}{}^\gamma\omega_\nu + \sum_3^{2\varrho}{}^\gamma\omega_\nu + \ldots + \sum_{2\varrho-1}^{2\varrho}{}^\gamma\omega_\nu - \sum_{\alpha_1}^{2\varrho}{}^\gamma\omega_\nu - \sum_{\alpha_2}^{2\varrho}{}^\gamma\omega_\nu \ldots - \sum_{\alpha_\varrho}^{2\varrho}{}^\gamma\omega_\nu.$

[illegible] $\alpha_1\ldots\alpha_\varrho, \beta$ [illegible] $0\ldots 2\varrho$ [illegible] α [illegible] $\alpha_1\ldots\alpha_\varrho, \beta$ [illegible]

$0, 1\ldots 2\varrho$. [illegible] 1) [illegible]

7) $\frac{al(u_1+\omega_1\ldots)_\beta}{al(u_1\ldots)_\beta} = \frac{\sqrt{Rx_0}}{R_1x_0\, A\sqrt{\frac{x_0-a_\beta}{A}}}$ $\quad (R_1(x_0) = (x_0-a_{\alpha_1})\ldots(x_0-a_{\alpha_\varrho}))$

1 $\frac{\mathfrak{L}(x_0)}{(x_0-x_\nu)R_1(x_0)} = \sum_\alpha\frac{\mathfrak{L}(a_\alpha)}{(a_\alpha-x_\nu)R_1'(a_\alpha)}\cdot\frac{1}{x_0-a_\alpha}$ [illegible]

$$\frac{\mathfrak{L}(x_0)}{R_1(x_0)}\,\frac{al(u_1+v_1\ldots)_\beta}{al(u_1\ldots)_\beta} = \frac{al(v_1+w_1\ldots)_\beta}{al(w_1\ldots)_\beta} - \sqrt{\frac{x_0-a_\beta}{A}}\sum_{\alpha,\alpha}\left\{\frac{\sqrt{R x_\alpha}-\mathfrak{L}a_\alpha}{(a_\beta-x_\alpha)\mathfrak{L}'(x_\alpha)(a_\alpha-x_\alpha)R_1'(a_\alpha)(x_0-a_\alpha)}\right.$$

$$\alpha = 1\ldots\varrho;\ \alpha=\alpha_1\ldots\alpha_\varrho$$

$1\ 3)$

$$\sum_\alpha \frac{\sqrt{R(x_\alpha)}}{(a_\alpha-x_\alpha)(a_\beta-x_\alpha)\mathfrak{L}'(x_\alpha)} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{a_\alpha-a_\beta}{A}}}\,\frac{al(u_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_{1}^{r}\ldots)_\beta}{al(u_1\ldots)_\beta}; \quad \mathfrak{L}(a_\alpha) = l_\alpha\, al^2(u_1\ldots\varrho)_\alpha;$$

$$\sqrt{\frac{\mathfrak{L}(a_\beta)}{l_\beta}} = al(u_1\ldots u_\varrho)_\beta$$

$$\frac{al(u_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r-v_1\ldots)_\beta}{al(\omega_1\ldots)_\beta} = \pm\frac{\sqrt{\frac{x_0-a_\beta}{A}}}{\sqrt{\frac{a_\alpha-a_\beta}{A}}}, \quad x_0 = a_\alpha, \quad \alpha = 1\ldots\varrho$$

$$8.)\quad \frac{al(\omega_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r-v_1\ldots)_\beta}{al(\omega_1\ldots)_\beta} = +\frac{\sqrt{\frac{x_0-a_\beta}{A}}}{\sqrt{\frac{a_\alpha-a_\beta}{A}}}.$$

$$\frac{\mathfrak{L}(x_0)}{R_1 x_0}\,\frac{al(u_1+v_1\ldots)_\beta}{al(u_1\ldots)_\beta} = \frac{al(v_1+w_1\ldots)_\beta}{al(\omega_1\ldots)_\beta} + \sum_\alpha \frac{l_\alpha al^2(u_1\ldots)_\alpha\, al(u_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r\ldots)_\beta\, al(v_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r-v_1)_\beta}{al(u_1\ldots)_\beta(x_0-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)\,al(\omega_1\ldots)_\beta}$$

$$\frac{\mathfrak{L}(x_0)}{R_1 x_0} = 1+\sum_\alpha\frac{\mathfrak{L}a_\alpha}{(x_0-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)} = 1+\sum_\alpha\frac{l_\alpha\, al^2(u_1\ldots)_\alpha}{(x_0-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)}$$

$$u_\alpha = \omega_\alpha + \sum_\alpha^{2\varrho}\omega_{\alpha}^{r} - v_\alpha, \quad \mathfrak{L}(x_0) = 0, \quad al(\omega_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r - v_1\ldots)_\alpha = 0$$

$$0 = 1+\frac{l_\alpha al^2(\omega_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r-v_1\ldots)_\alpha}{(x_0-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)} \quad al^2(\omega_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r-v_1\ldots)_\alpha = \frac{-\frac{1}{A}R' a_\alpha}{l_\alpha^2 al^2(\omega_1-v_1\ldots)_\alpha}$$

$$8a)\quad \frac{l_\alpha}{(x_0-a_\alpha)R_1'(a_\alpha)} = -\frac{A\, l_\alpha^2\, al^2(\omega_1-v_1\ldots)_\alpha}{R' a_\alpha}$$

$$al^2(\omega_1-v_1\ldots)_\alpha = al^2(v_1+\omega_1\ldots)_\alpha$$

$$al(v_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r-v_1\ldots)_\beta = (-1)^\beta al(v_1-\omega_1-\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r\ldots)_\beta = \pm al(v_1+\omega_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r\ldots)_\beta$$

$$al(\omega_1\ldots)_\beta = -al(\omega_1+2\sum^{2\varrho}\omega_1\ldots)_\beta$$

$$9)\quad \frac{\mathfrak{L}(x_0)}{R_1(x_0)} = 1 - A\sum_\alpha \frac{l_\alpha^2 al^2(v_1+\omega_1\ldots)_\alpha\, al^2(u_1\ldots)_\alpha}{R'(a_\alpha)}$$

$$10)\quad \frac{\mathfrak{L}x_0}{R_1 x_0}\,al(\omega_1\ldots)_\beta\, al(u_1+v_1\ldots)_\beta = al(v_1+\omega_1\ldots)_\beta\, al(u_1\ldots)_\beta$$

$$+A\sum_\alpha \frac{l_\alpha^2 al^2(u_1\ldots)_\alpha\, al^2(v_1+\omega_1\ldots)_\alpha\, al(u_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r\ldots)_\beta\, al(v_1+\omega_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\omega_1^r\ldots)_\beta}{R'(a_\alpha)}$$

[illegible] $\int_{a_{2b-1}}^{x_0} \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{P}(x)}{x-a_{2\alpha-1}}\frac{dx}{\sqrt{R(x)}} = u'_\alpha$ [illegible] $v_\alpha = \sum_{2b-1}^{2\varsigma} \omega_\alpha^\gamma - \omega'_\alpha$ [illegible]

$$\frac{d\,al(u_1+\sum_{2b-1}^{2\varsigma}\omega_1^\gamma - \omega'_1 \dots)_\alpha}{d\,al(u_1\dots)_\alpha} = \frac{\sqrt{R(x_0)}}{A\sqrt{\frac{x_0-a_\alpha}{A}}\,L(x_0)} - \sqrt{\frac{x_0-a_\alpha}{A}}\sum_\mu \frac{\sqrt{R x_\mu}}{(a_\alpha - x_\mu)(x_0-x_\mu)L'(x_\mu)}$$

[illegible] x_0 [illegible] a_{2b-1} [illegible] $\sqrt{\frac{\mathfrak{P}'a_{2b-1}}{Q a_{2b-1}}(x_0-a_{2b-1})} = \beta_{2b}$

[illegible] β_b [illegible] $\alpha \gtrless 2b-1$

$$\frac{1}{al(u_1\dots)_\alpha}\frac{\partial\, al(u_1+\sum_{2b-1}^{2\varsigma}\omega_1^\gamma\dots)_\alpha}{\partial u_{2b}} = -\frac{Q a_{2b-1}}{A\sqrt{\frac{a_{2b-1}-a_\alpha}{A}}\,L a_{2b-1}}$$

$$\frac{\partial\, al(u_1+\sum_{2b-1}^{2\varsigma}\omega_1^\gamma\dots)_\alpha}{\partial u_b} = \frac{+al(u_1\dots)_\alpha}{A\sqrt{\frac{a_{2b-1}-a_\alpha}{A}}\,al^2(u_1\dots)_{2b-1}}$$ [illegible] $u_\alpha + \sum_{2b-1}^{2\varsigma}\omega_\alpha^\gamma$ [illegible]

11) $$\frac{\partial\, al(u_1\dots)_\alpha}{\partial u_b} = \frac{-Q(a_{2b-1})}{\sqrt{\frac{a_{2b-1}-a_\alpha}{A}}\,\mathfrak{P}'a_{2b-1}}\, al(u_1\dots)_{2b-1}\, al(u_1+\sum_{2b-1}^{2\varsigma}\omega_1^\gamma\dots)_\alpha$$

[illegible] 12) $$\sum_\mu \frac{1}{2}\int_{a_{2\mu-1}}^{x_\mu}\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathfrak{P}\xi}\frac{\mathfrak{P}x}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} = Al(u_1\dots u_\varrho)$$

[illegible] $e^{2Al(u_1\dots u_\varrho)} = \overline{Al}(u_1\dots u_\varrho)$ [illegible] a_γ [illegible] $a_{\gamma+1}$ [illegible]

[illegible] $\int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}}$ [illegible] π [illegible]:

13) $$\sum_\mu \int_{a_{2\mu-1}}^{x_{\varrho+\mu}} \frac12 \frac{\sqrt{R\xi}}{\mathfrak{P}\xi}\frac{\mathfrak{P}x}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} - \sum_\mu\int_{a_{2\mu-1}}^{x_\mu}\frac12\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathfrak{P}\xi}\frac{\mathfrak{P}x}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} - \frac12\sum_0^{2\varsigma}\int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}}\frac12\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathfrak{P}\xi}\frac{\mathfrak{P}x}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{Rx}}$$

$$+\int_{a_0}^{x_0}\frac12\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathfrak{P}\xi}\frac{\mathfrak{P}x}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} = \frac12\lg\left\{-\frac{\sqrt{R\xi}-(\xi-x_0)L\xi\,M\xi}{\sqrt{R\xi}+(\xi-x_0)L\xi\,M\xi}\right\},$$

[illegible] $\int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}}$ [illegible] $\lg\{\ \}$ [illegible] $x_0 = a_0$, $x_\mu = a_{2\mu-1}$:

$\pm\frac{\pi}{2}i$ [illegible] $-\frac12\sum_0^{2\varsigma}\int_{a_\gamma}^{a_{2\gamma+1}} = \pm\frac{\pi}{2}i$. [illegible]

14) $$\overline{Al}(u_1+v_1\dots u_\varrho+v_\varrho) = \overline{Al}(u_1\dots)\,e^{\sum_0^{2\varsigma}\int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}} - \int_{a_0}^{x_0}}\cdot\left\{-\frac{\sqrt{R\xi}-(\xi-x_0)L\xi\,M\xi}{\sqrt{R\xi}+(\xi-x_0)L\xi\,M\xi}\right\};$$

[illegible] $\{\ \} = T$, $u_1\dots u_\varrho$ [illegible].

$$\mathfrak{T} = -\frac{\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathcal{L}\xi} - \frac{\sqrt{R\xi_0}}{\mathcal{L}\xi_0} - (\xi - x_0)\sum_\alpha \frac{\sqrt{R x_\alpha}}{(\xi - x_\alpha)(x_0 - x_\alpha)\mathcal{L}'x_\alpha}}{\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathcal{L}\xi} + \frac{\sqrt{R\xi_0}}{\mathcal{L}\xi_0} + (\xi - x_0)\sum_\alpha \frac{\sqrt{R x_\alpha}}{(\xi - x_\alpha)(x_0 - x_\alpha)\mathcal{L}'x_\alpha}}$$

[illegible] 11)

$$A\sqrt{\frac{x_0 - a_\alpha}{A}}\,\frac{al(u_1+v_1 \dots u_\rho + v_\rho)_\alpha}{al(u_1\dots u_\rho)_\alpha} = \frac{\sqrt{Rx_0}}{\mathcal{L}x_0} - A\left(\frac{x_0-a_\alpha}{A}\right)\sum_\alpha \frac{\sqrt{Rx_\alpha}}{(a_\alpha - x_\alpha)(x_0-x_\alpha)\mathcal{L}'(x_\alpha)}$$

[illegible] $v_1 = w_1$ [illegible] $x_0 = \xi$

$$A\sqrt{\frac{\xi-a_\alpha}{A}}\,\frac{al(u_1+w_1,\dots)_\alpha}{al(u_1\dots)_\alpha} = \frac{\sqrt{R\xi}}{\mathcal{L}\xi} - A\left(\frac{\xi-a_\alpha}{A}\right)\sum_\alpha \frac{\sqrt{Rx_\alpha}}{(a_\alpha-x_\alpha)(\xi-x_\alpha)\mathcal{L}'(x_\alpha)}.$$

[illegible] $\sqrt{Rx_\alpha}$ [illegible]

$$A\sqrt{\frac{\xi-a_\alpha}{A}}\,\frac{al(u_1-w_1,\dots)_\alpha}{al(u_1\dots)_\alpha} = \frac{\sqrt{R\xi}}{\mathcal{L}\xi} + A\left(\frac{\xi-a_\alpha}{A}\right)\sum_\alpha \frac{\sqrt{Rx_\alpha}}{(a_\alpha-x_\alpha)(\xi-x_\alpha)\mathcal{L}'(x_\alpha)}$$

15) [illegible]
$$\mathfrak{T} = -\frac{\sqrt{\frac{\xi-a_\alpha}{A}}\,al(u_1+w_1\dots)_\alpha - \sqrt{\frac{x_0-a_\alpha}{A}}\,al(u_1+v_1,\dots)_\alpha}{\sqrt{\frac{\xi-a_\alpha}{A}}\,al(u_1-w_1\dots)_\alpha + \sqrt{\frac{x_0-a_\alpha}{A}}\,al(u_1+v_1\dots)_\alpha}$$
, 11 · 6

$$\left(\frac{\sqrt{\frac{x_0-a_\beta}{A}}}{\sqrt{\frac{\xi-a_\beta}{A}}} = \frac{al\left(u_1 - \sum_\alpha^{2\rho}(\omega_1^\gamma - u_1\dots)\right)_\beta}{al\left(\omega_1 + \sum_\alpha^{2\rho}(\omega_1^\gamma - w_1\dots)\right)_\beta}\right) \text{ [illegible] } 8.a)\ \frac{\sqrt{\frac{x_0-a_\alpha}{A}}}{\sqrt{\frac{\xi-a_\alpha}{A}}} = \pm\frac{al(w_1+\omega_1\dots)_\alpha}{al(v_1+\omega_1\dots)_\alpha}$$
[illegible] $x_0 = \xi$ [illegible]

16)
$$\mathfrak{T} = \frac{al(w_1+\omega_1\dots)_\alpha\, al(\omega_1+v_1\dots)_\alpha - al(v_1+\omega_1\dots)_\alpha\, al(u_1+w_1\dots)_\alpha}{al(w_1+\omega_1\dots)_\alpha\, al(u_1+v_1\dots)_\alpha + al(v_1+\omega_1\dots)_\alpha\, al(u_1-w_1\dots)_\alpha}$$

[illegible] $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_\rho = 1, 3, \dots 2\rho-1$ [illegible] $\omega_1 \dots = 0$ [illegible]

17)
$$\mathfrak{T} = \frac{al(w_1\dots)_{2b-1}\, al(u_1+v_1\dots)_{2b-1} - al(v_1\dots)_{2b-1}\, al(u_1+w_1\dots)_{2b-1}}{al(w_1\dots)_{2b-1}\, al(u_1+v_1\dots)_{2b-1} + al(v_1\dots)_{2b-1}\, al(u_1-w_1\dots)_{2b-1}}$$

[illegible] $\int_{a_{2b-1}}^{x_0} i\,\frac{\mathfrak{T}_x}{x-a_{2b-1}}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} = u_\alpha'$ [illegible] $v_\alpha = \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_\alpha^\gamma - u_\alpha'$ [illegible] 14) [illegible] $u_\alpha - \sum \omega_\alpha^\gamma$

[illegible] u_α [illegible]
$$\overline{al}(u_1-u_1'\dots u_\rho-u_\rho') = \overline{al}\left(u_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho}\omega_1^\gamma\dots\right) e^{\sum_{a_{2b-1}}\int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}} i\frac{\mathfrak{T}_x}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} - 2\int_{a_{2b-1}}^{x_0} i\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathfrak{T}_\xi}\frac{\mathfrak{T}_x}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{Rx}}}$$

[illegible] 15) [illegible]

$$\overline{al}\left(u_1 + \sum_{a_\alpha}^{2\rho}\omega_1^\gamma\dots\right) = \overline{al}(u_1\dots)\, e^{\sum_{a_\alpha}\int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}} i\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathfrak{T}_\xi}\frac{\mathfrak{T}_x}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{Rx}}}\left\{-\frac{al(u_1+w_1\dots)_\alpha}{al(u_1-w_1\dots)_\alpha}\right\}$$

[illegible] $\overline{al}(-u_1-u_2\dots) = \frac{1}{\overline{al}(u_1\dots u_\rho)}$

[illegible]
$$\overline{al}(u_1-u_1'\dots) = \overline{al}(u_1\dots)\, e^{-2\int_{a_{2b-1}}^{x_0} i\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathfrak{T}_\xi}\frac{\mathfrak{T}_x}{x-\xi}\frac{dx}{\sqrt{Rx}}}\left\{-\frac{al(u_1+w_1\dots)_{2b-1}}{al(u_1-w_1\dots)_{2b-1}}\right\}$$

[illegible] $6\, al\left(\sum_{2b-1}^{2\varrho} \omega'_\nu - u'_1 \ldots\right)_{2b-1} al\left(u_1 - \sum_{2b-1}^{\varrho} \omega'_\nu \pm \omega_1 \ldots\right)_{2b-1} = \frac{R'(a_{2b-1})}{A\, l^2_{2b-1}\, al(-u'_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1 \pm \omega_1\ldots)_{2b-1}}$,

$$\left\{-\frac{al(u_1+\omega_1\ldots)_{2b-1}}{al(u_1-\omega_1\ldots)_{2b-1}}\right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1 + A\frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}}\, al(\omega_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1 - u'_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1+\omega_1\ldots)_{2b-1}\, al(u'_1\ldots)_{2b-1}}{1 - A\frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}}\, al(\omega_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1-u'_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1-\omega_1\ldots)_{2b-1}\, al(u'_1\ldots)_{2b-1}}$$

[illegible]

18) $\overline{Al}(u_1+u'_1\ldots) = \overline{Al}(u_1\ldots)\, e^{\frac{1}{2}\int_{a_{2b-1}}^{x_\alpha} \frac{\sqrt{R\xi}}{\partial\xi}\frac{Px}{x-\xi}\frac{dx}{Rx}}\cdot U$

$$\left(U = \frac{1 - A\frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}}\, al(\omega_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1+u'_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1+\omega_1\ldots)_{2b-1}\, al(u'_1\ldots)_{2b-1}}{1 + A\frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}}\, al(u_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1+u'_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1-\omega_1\ldots)_{2b-1}\, al(u'_1\ldots)_{2b-1}}\right.$$

[illegible] (11) [illegible]

19) $\frac{1}{\overline{Al}(u_1\ldots)}\frac{\partial \overline{Al}(u_1\ldots)}{\partial u_b} = -A\frac{Q(a_{2b-1})}{P'(a_{2b-1})}\, al(\omega_1\ldots)_{2b-1}\, al(u_1\ldots)_{2b-1}\left\{al(u_1+\omega_1\ldots)_{2b-1} + al(u_1-\omega_1\ldots)_{2b-1}\right\}$

[illegible] (15) [illegible]

$$\frac{1}{\overline{Al}(u_1\ldots)}\frac{\partial\overline{Al}(u_1\ldots)}{\partial u_b} = -al(\omega_1\ldots)_{2b-1}\, al^2(u_1\ldots)_{2b-1}\frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}}\cdot\frac{2\sqrt{R\xi}}{L\xi\sqrt{\frac{\xi-a_{2b-1}}{A}}}$$

[illegible] 16)

20) $\frac{1}{\overline{Al}(u_1\ldots)}\frac{\partial\overline{Al}(u_1\ldots)}{\partial u_b} = -2\frac{Q(a_{2b-1})}{P'(a_{2b-1})}\, al^2(u_1\ldots)_{2b-1}\frac{\sqrt{R\xi}}{L\xi(\xi-a_{2b-1})}$

[illegible] (III) $\sum_\alpha \int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{1}{2}\frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}}\frac{Px}{(x-a_{2b-1})^2}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} = Al(u_1\ldots u_\varrho)_b$

[illegible] $d\frac{\sqrt{Rx}}{P'(a_{2b-1})(x-a_{2b-1})} = \frac{\frac{1}{2}R'(x) - \frac{Rx}{x-a_{2b-1}}}{P'(a_{2b-1})(x-a_{2b-1})}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} = -\frac{1}{2}\frac{Q a_{2b-1}}{x-a_{2b-1}}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} + \frac{G_1 x}{2\sqrt{Rx}}dx$

$$\frac{1}{2}\frac{Q(a_{2b-1})}{P' a_{2b-1}}\frac{Px}{(x-a_{2b-1})^2}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} = \frac{1}{2}\frac{Q(a_{2b-1})}{x-a_{2b-1}}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} + \frac{G_2 x}{\sqrt{Rx}}dx$$

$$= -d\left\{\frac{\sqrt{Rx}}{P' a_{2b-1}(x-a_{2b-1})}\right\} + \frac{1}{2}\frac{G_1 x + G_2 x}{\sqrt{Rx}}dx$$

(G_1 [illegible] G_2 [illegible] $(2\varrho-1)$ [illegible] $\varrho-2$ [illegible]

$$\sum_\alpha\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{1}{2}\frac{Q(a_{2b-1})}{P' a_{2b-1}}\frac{Px}{(x-a_{2b-1})^2}\frac{dx}{\sqrt{Rx}} = -\sum_\alpha\frac{\sqrt{Rx}}{P' a_{2b-1}(x_\alpha - a_{2b-1})} + \sum_\alpha\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{g_1 x + g_2 x}{\sqrt{Rx}}dx$$

[illegible] $\sum_\alpha\{g_{\alpha b}\, Al^{(\alpha)}(u_1\ldots) + M_{\alpha b}\, [illegible]\}$ $\left(Al^{(\alpha)}(u_1\ldots) = \sum_b\int_{a_{2b-1}}^{x_b}\frac{1}{2}\frac{x^{\alpha-1}P(x)\,dx}{\sqrt{Rx}}\right.$

$\cdot\; -\sum_\alpha \frac{\sqrt{R x_\alpha}}{P'_{a_{2b-1}}(x_\alpha - a_{2b-1})} = \sum_\alpha \frac{\psi'(x_\alpha)}{(x_\alpha - a_{2b-1})\, P'_{a_{2b-1}}}$ ($\psi'(x) = \sum_i \frac{\partial L(x)}{\partial u_\alpha}$) [illegible]

[illegible] $x_1 \ldots x_\rho$ [illegible] $al(u_1 \ldots)_{2c-1}$ [illegible] $Al(u_1 \ldots)_b$ [illegible]

[illegible]

$$\sum_\alpha \int_{a_{2c-1}}^{x_{\rho+\alpha}} \frac{i\, Q_{a_{2b-1}}}{P'_{a_{2b-1}}} \frac{P_x}{(x-a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{Rx}} - \sum_\alpha \int_{a_{2c-1}}^{x_\alpha} \frac{i\, Q_{a_{2b-1}}}{P'_{a_{2b-1}}} \frac{P_x}{(x-a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{Rx}} - i\sum_0^{2\rho} \int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}} \frac{i\, Q_{a_{2b-1}}}{P'_{a_{2b-1}}} \frac{P_x}{(x-a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{Rx}}$$

$$+ \int_{a_0}^{x_0} \frac{i\, Q_{a_{2b-1}}}{P'_{a_{2b-1}}} \frac{P_x}{(x-a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{Rx}} = -\frac{Q(a_{2b-1})}{(a_{2b-1}-x_0)\, L(a_{2b-1})\, M(a_{2b-1})}$$ [illegible]

21) $$Al(u_1+v_1 \ldots)_b = Al(u_1 \ldots)_b + i\sum_0^{2\rho} \int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}} \frac{i\, Q_{a_{2b-1}}}{P'_{a_{2b-1}}} \frac{P_x}{(x-a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{Rx}} - \int_{a_0}^{x_0} \frac{i\, Q_{a_{2b-1}}}{P'_{a_{2b-1}}} \frac{P_x}{(x-a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{Rx}} + \frac{al(v_1 \ldots v_\rho)_{2b-1}}{al(u_1 \ldots)_{2b-1}\, al(u_1+v_1 \ldots)_{2b-1}}$$

22) $$Al(u_1 - v_1 \ldots)_b = \text{" " } - \text{ " " " " } + \text{ " " " } - \frac{al(v_1 \ldots)_{2b-1}}{al(u_1 \ldots)\, al(u_1 - v_1 \ldots)_{2b-1}}$$

[illegible] 18) $v_\alpha = \sum_{2c-1}^{2\rho} \omega_\alpha^{\gamma} - \omega'_\alpha$ [illegible]

[illegible] 6) [illegible] 11) [illegible]: $\frac{\partial Al(u_1 + \sum_{2c-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_b}{\partial u_c} = \frac{-1}{A(a_{2c-1}-a_{2b-1})\, al^2(u_1 \ldots)_{2c-1}\, al^2(u_1 + \sum_{2c-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_{2b-1}}$ $c \gtrless b$

23) $$\frac{\partial Al(u_1 \ldots)_b}{\partial u_c} = \frac{-Q(a_{2c-1})}{P'_{a_{2b-1}}(a_{2c-1}-a_{2b-1})} \frac{al^2(u_1 \ldots)_{2c-1}}{al^2(u_1 \ldots)_{2b-1}}$$ $c \gtrless b$. [illegible] 21) [illegible] 4). 6) [illegible]

24) $$Al(u_1 + \sum_\alpha^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_b = Al(u_1 \ldots)_b + i\sum_\alpha^{2\rho} i \int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}} \frac{Q_{a_{2b-1}}}{P'_{a_{2b-1}}} \frac{P_x}{(x-a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{Rx}} - \frac{\partial \lg al(u_1 + \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_\alpha}{\partial u_b}$$ ($\alpha = 0, 1, \ldots 2\rho - 1$)

25) $$Al(u_1 + \sum_\alpha^{2\rho} \omega_1^{\gamma} - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_b = Al(u_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_b + i\sum_\alpha^{2\rho} \int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}} \frac{i\, Q(a_{2b-1})}{P'_{a_{2b-1}}} \frac{P_x}{(x-a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{Rx}} - \frac{\partial \lg al(u_1 \ldots)_\alpha}{\partial u_b}$$

23) [illegible] 26) $$\frac{\partial Al(u_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_b}{\partial u_c} = \frac{\partial Al(u_1 - \sum_{2c-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_c}{\partial u_b}$$ [illegible]

$-\int_{a_\gamma}^{a_{\gamma+1}} \frac{i\, Q_{a_{2b-1}}}{P'_{a_{2b-1}}} \frac{P_x}{(x-a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{Rx}}$ [illegible] η_b^{γ} [illegible] 26) [illegible] $\sum_\alpha \left\{ -Al(u_1 - \sum_{2\alpha-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_\alpha + \sum_{2\alpha-1}^{2\rho} \eta_\alpha^{\gamma} \right\} du_\alpha$

[illegible] $At(u_1 \ldots u_\rho)$ [illegible]

27) $$d\, At(u_1 \ldots u_\rho) = \sum_\alpha \left\{ -Al(u_1 - \sum_{2\alpha-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_\alpha + \sum_{2\alpha-1}^{2\rho} \eta_\alpha^{\gamma} \right\} du_\alpha$$

[illegible] 24) [illegible] $Al(u_1 - \sum_{2\alpha-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_\alpha - \sum_{2\alpha-1}^{2\rho} \eta_\alpha^{\gamma} = Al(u_1 \ldots)_\alpha + \frac{\partial \lg al(u_1 \ldots)_{2\alpha-1}}{\partial u_\alpha}$

[illegible] $Al(u_1 \ldots)_\alpha + \frac{\partial \lg al(u_1 \ldots)_{2\alpha-1}}{\partial u_\alpha}$ [illegible] $s_1 \ldots s_\rho$ [illegible]

$(s_1 \ldots s_\rho)^1 + (s_1 \ldots s_\rho)^3 + \ldots$ [illegible]

$$Al(u_1 - \sum_{2\alpha-1}^{2\rho} \omega_1^{\gamma} \ldots)_\alpha - \sum_{2\alpha-1}^{2\rho} \eta_\alpha^{\gamma} = (u_1 \ldots u_\rho)^1 + (u_1 \ldots u_\rho)^3 + \ldots$$

[illegible] $\log Al(u_1 \dots u_\rho)$ [illegible] $c + (u_1 \dots)^2 + (u_1 \dots)^4 + \dots$. $w_1 = 0$ [illegible] 3

[illegible] 28) $Al(u_1 \dots u_\rho) = 1 + (u_1 \dots u_\rho)^2 + \dots + (u_1 \dots u_\rho)^{2m} + \dots$ [illegible]

29) $al(u_1 \dots)_\alpha = \frac{Al(u_1 \dots)_\alpha}{Al(u_1 \dots)}$, 1, 2 , 25)

30) $d \log Al(u_1 \dots)_\alpha = \sum_\alpha \left\{ - Al\left(u_1 + \sum_\alpha^{2\rho} \omega_1 - \sum_{2\alpha-1}^{2\rho} \omega_1 \dots\right) - \sum_\alpha^{2\rho} \eta_\alpha + \sum_{2\alpha-1}^{2\rho} \eta_\alpha \right\} du_\alpha$

[illegible] 21) – 22) [illegible] $x_0 = \xi$ [illegible] $u_\alpha - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_\alpha$ [illegible]

21) $Al\left(u_1 + w_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1 \dots\right)_b = Al\left(u_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1 \dots\right)_b - \sum_0^{2\rho} \eta_b - \int_0^{\xi} \frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}} \frac{P x}{(x - a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{R x}}$

$$+ A \frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}} al(w_1 \dots)_{2b-1}\, al(u_1 \dots)_{2b-1}\, al(u_1 + w_1 \dots)_{2b-1}$$

$Al\left(u_1 - w_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1 \dots\right)_b = Al\left(u_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1 \dots\right)_b + \sum_0^{2\rho} \eta_b + \int_0^{\xi} \frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1} (x - a_{2b-1})^2} \frac{P x}{} \frac{dx}{\sqrt{R x}}$

$$- A \frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}} al(w_1 \dots)_{2b-1}\, al(u_1 \dots)_{2b-1}\, al(u_1 - w_1 \dots)_{2b-1} .$$

[illegible]: $Al\left(u_1 + w_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1 \dots\right)_b - Al\left(u_1 - w_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1 \dots\right)_b + 2 \sum_0^{2\rho} \eta_b + 2 \int_0^{\xi} \frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}} \frac{P x}{(x - a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{R x}}$

$$= A \frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}} al(w_1 \dots)_{2b-1}\, al(u_1 \dots)_{2b-1} \left\{ al(u_1 + w_1 \dots)_{2b-1} + al(u_1 - w_1 \dots)_{2b-1} \right\}$$

$\frac{\partial \log Al(u_1 - w_1 \dots)}{\partial u_b} - \frac{\partial \log Al(u_1 + w_1 \dots)}{\partial u_b} + 2 \sum_0^{2\rho} \eta_b + 2 \int_0^{\xi} \frac{Q(a_{2b-1})}{P'(a_{2b-1})} \frac{P x}{(x - a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{R x}}$

$$= - \frac{\partial \log \overline{Al}(u_1 \dots)}{\partial u_b}$$

32) $\overline{Al}(u_1 \dots) = \frac{Al(u_1 + w_1 \dots)}{Al(u_1 - w_1 \dots)}\, e^{-\sum_b \left\{ 2 \sum_0^{2\rho} \eta_b + 2 \int_0^{\xi} \frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}} \frac{P x}{(x - a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{R x}} \right\} u_b}$

[illegible] 31) $u_1 = u_2 = \dots = 0$ [illegible] $Al\left(- \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1 \dots\right)_b - \sum_{2b-1}^{2\rho} \eta_b = 0$;

$Al\left(w_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1 \dots\right)_b = \sum_{2b-1}^{2\rho} \eta_b - \sum_0^{2\rho} \eta_b - \int_0^{\xi} \frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}} \frac{P x}{(x - a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{R x}}$

[illegible] $Al\left(u_1 - \sum_{2b-1}^{2\rho} \omega_1 \dots\right)_b - \sum_{2b-1}^{2\rho} \eta_b = - \frac{\partial Al(u_1 \dots)}{\partial u_b}$ [illegible]

$\sum_0^{2\rho} \eta_b + \int_0^{\xi} \frac{Q a_{2b-1}}{P' a_{2b-1}} \frac{P x}{(x - a_{2b-1})^2} \frac{dx}{\sqrt{R x}} = \frac{\partial \log Al(w_1 \dots)}{\partial w_b}$ [illegible]

33) $\overline{Al}(u_1 \dots) = \frac{Al(u_1 + w_1 \dots)}{Al(u_1 - w_1 \dots)}\, e^{-\sum_b 2 \frac{\partial \log Al(w_1 \dots)}{\partial w_b} u_b}$

[illegible] $\dfrac{d\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{L}\xi} = +\sum_{\alpha}\dfrac{dx_\alpha}{x_\alpha-\xi}$; $dx_\alpha = -2\sum_{b}\dfrac{\mathfrak{L}a_{1,b-1}\sqrt{R x_\alpha}\,du_b}{\mathfrak{P}'a_{1,b-1}\,\mathfrak{L}'x_\alpha(x_\alpha-a_{1,b-1})}$ [illegible]

$$\frac{d\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{L}\xi} = -2\sum_{\alpha,b}\frac{\mathfrak{L}a_{1,b-1}\sqrt{Rx_\alpha}\,du_b}{\mathfrak{P}'a_{2,b-1}\,\mathfrak{L}'x_\alpha(x_\alpha-a_{1,b-1})(x_\alpha-\xi)}$$ [illegible]

$$\frac{d\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{L}\xi} = -\sum_{b}\frac{\mathfrak{L}a_{2,b-1}\{al(u_1-w_1\ldots)_{2b-1} - al(u_1+w_1\ldots)_{2b-1}\}du_b}{\mathfrak{P}'a_{2,b-1}\,al(u_1\ldots)_{2b-1}\sqrt{\frac{\xi-a_{2,b-1}}{A}}}$$

$$\frac{d\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{L}\xi} = -\sum_{b}\frac{A\,\mathfrak{L}a_{2b-1}\,al(w_1\ldots)_{2b-1}\{al(u_1-w_1\ldots)_{2b-1} - al(u_1+w_1\ldots)_{2b-1}\}du_b}{\mathfrak{P}'a_{2b-1}\,al(u_1\ldots)_{2b-1}}$$

[illegible] 31 [illegible]

$$\frac{\partial\log Al(u_1+w_1\ldots)}{\partial u_b} = \frac{\partial\log Al(u_1\ldots)}{\partial u_b} + \sum_{0}^{\varrho}\eta_b^{r} + \int_{a}^{\xi}\frac{1}{2}\frac{\mathfrak{Q}a_{1,b-1}}{\mathfrak{P}'a_{2,b-1}}\frac{\mathfrak{P}x}{(x-a_{2,b-1})^2}\frac{dx}{\sqrt{Rx}}$$

$$- A\frac{\mathfrak{Q}a_{1,b-1}}{\mathfrak{P}'a_{1,b-1}}\,al(w_1\ldots)_{2b-1}\,al(u_1\ldots)_{2b-1}\,al(u_1+w_1\ldots)_{2b-1}$$

$$\frac{\partial\log Al(u_1-w_1\ldots)}{\partial u_b} = \quad \text{"} \quad \text{"} \quad - \quad \text{"} \quad - \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$+$ " " $\quad al(u_1-w_1\ldots)_{2b-1}$

[illegible] $\dfrac{d\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{L}\xi} = -\sum d\log Al(u_1\ldots) + d\log Al(u_1+w_1\ldots) + d\log Al(u_1-w_1\ldots)$

(34) $\dfrac{\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{P}\xi} = \dfrac{Al(u_1+w_1\ldots)\,Al(u_1-w_1\ldots)}{Al^2(u_1\ldots)\,Al^2(w_1\ldots)}$; $\dfrac{\mathfrak{L}\xi}{\mathfrak{P}\xi} = e^{\sum_\alpha\int_{a_{\alpha}}^{x_\alpha}\frac{dx_\alpha}{x_\alpha-\xi}}$ [illegible] 33/34

35) $e^{\sum_\alpha\int_{a_{2\alpha-1}}^{x_\alpha}\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{R\xi}}{\mathfrak{P}\xi}\frac{\mathfrak{P}x}{\sqrt{Rx}}\right)\frac{dx}{x-\xi}} = \dfrac{Al(u_1+w_1\ldots)}{Al(u_1\ldots)\,Al(w_1\ldots)}\,e^{-\sum_\alpha\frac{\partial\log Al(w_1\ldots)}{\partial w_\alpha}u_\alpha}$

[illegible] 30) [illegible] $d\log Al(u_1-\sum_{\alpha}^{\varrho}\omega_1^{r}\ldots)_\alpha = d\log Al(u_1\ldots) - \sum_\alpha\sum_\alpha^{\varrho}\int\eta_\alpha^{r}\,du_\alpha$ [illegible]

$Al(u_1-\sum_\alpha^{\varrho}\omega_1^{r}\ldots)_\alpha = c\,e^{-\sum_\alpha\sum_\alpha^{\varrho}\eta_\alpha^{r}u_\alpha}Al(u_1\ldots)$; [illegible]

$Al(a_1\ldots)_\alpha = (-1)^\alpha Al(a_1\ldots)_\alpha$ [illegible]

$Al(u_1+\sum_\alpha^{\varrho}\omega_1^{r}\ldots)_\alpha = (-1)^\alpha e^{+2\sum_\alpha\sum_\alpha^{\varrho}\eta_\alpha^{r}u_\alpha}Al(u_1-\sum_\alpha^{\varrho}\omega_1^{r}\ldots)_\alpha$. 16

$al(u_1+\sum_\alpha^{\varrho}\omega_1^{r}\ldots)_\alpha = al(u_1-\sum_\alpha^{\varrho}\omega_1^{r}\ldots)_\alpha$, [illegible]

(36) $Al(u_1+\sum_\alpha^{\varrho}\omega_1^{r}\ldots) = (-1)^\alpha e^{2\sum_\alpha\sum_\alpha^{\varrho}\eta_\alpha u_\alpha}Al(u_1-\sum_\alpha^{\varrho}\omega_1^{r}\ldots)$

$= (-1)^\alpha e^{2\sum_\alpha\sum_\alpha^{\varrho}\eta_\alpha^{r}(u_\alpha+\sum_\alpha^{\varrho}\omega_\alpha)}Al(u_1\ldots)$

[illegible] $\sum_{n} \left\{ \overset{\beta}{\eta}_n \overset{\alpha}{\omega}_n - \overset{\alpha}{\eta}_n \overset{\beta}{\omega}_n \right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} i & \alpha = \beta - 1 \\ -\frac{\pi}{2} i & \alpha = \beta + 1 \\ 0 & \alpha \gtrless \beta \pm 1 \end{cases}$ [illegible]

$$\sum_{n} \left\{ \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n \sum_{\beta}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n - \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n \sum_{\beta}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n \right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} i & \alpha < \beta \\ -\frac{\pi}{2} i & \alpha > \beta \\ 0 & \alpha = \beta \end{cases}$$ [illegible]

$$\omega_n = m_0 \sum_{0}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n + m_1 \sum_{1}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n + \dots + m_{2\varrho-1} \sum_{2\varrho-1}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n + m_{2\varrho} \overset{2\varrho}{\omega}_n$$

$$\eta_n = m_0 \sum_{0}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n + \dots \qquad + m_{2\varrho} \overset{2\varrho}{\eta}_n$$ [illegible]

$2 \sum' m_\alpha m_\beta$ [illegible] $(m_0 m_1 + m_0 m_2 + \dots + m_0 m_{2\varrho}) + (m_1 m_2 + \dots + m_1 m_{2\varrho}) + \dots + (m_{2\varrho-1} m_{2\varrho})$ [illegible]

[illegible] $\mathfrak{Al}(u_1 + 2\omega_1, \dots) = (-1)^{\sum_n m_{2n-1} + \sum' m_\alpha m_\beta} e^{2\sum_n \eta_n (u_n + \omega_n)} \cdot \mathfrak{Al}(u_1 \dots)$

[illegible] $\sum_n m_{2n-1} + \sum' m_\alpha m_\beta = \varphi(m_0\, m_1 \dots)$ [illegible]

$$(-1)^{\varphi(m_0\, m_1 \dots)} e^{-2\sum_n \eta_n (u_n + \omega_n)} \frac{\mathfrak{Al}(u_1 + 2\omega_1 \dots)}{\mathfrak{Al}(u_1 \dots)}$$ [illegible] $m_0 = m_1 = \dots = m_{2\varrho} = 0$ [illegible]

[illegible] m_α [illegible] $m_{\alpha+1}$ [illegible]

$\omega_\alpha, \eta_\alpha$ [illegible] $\omega_n + \sum_{0}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n,\ \eta_n + \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n$; $\sum' m_\alpha m_\beta \cdot \sum' m_\alpha m_\beta + (m_0 + m_1 + \dots + m_{2\varrho} - m_\alpha)$

$\sum_n m_{2n-1}$ [illegible] $\sum_n m_{2n-1} + \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ [illegible] $(-1)^{\varphi} \dots (-1)^{\varphi} (-1)^{\alpha} (-1)^{m_0 + \dots + m_{2\varrho} - m_\alpha}$

$$e^{-2\sum_n \eta_n (u_n + \omega_n)} \mathfrak{Al}(u_1 + 2\omega_1 \dots) \cdot e^{-2\sum_n (\eta_n + \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n)(u_n + \omega_n + \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n)} \mathfrak{Al}(u_1 + 2\omega_1 + 2\sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_1 \dots)$$

[illegible] $(-1)^{\alpha} e^{-2\sum_n \{ (\eta_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n - \omega_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n) \}} e^{-2\sum_n \eta_n (u_n + \omega_n)} \mathfrak{Al}(u_1 + 2\omega_1 \dots)$

$$(-1)^{\alpha} e^{-2\sum_n (\eta_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n - \omega_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n)} e^{-2\sum_n \eta_n (u_n + \omega_n)} \mathfrak{Al}(u_1 + 2\omega_1 \dots)$$ [illegible]

$$2\sum_n \left(\eta_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n - \omega_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n \right) = \sum_\beta \left\{ 2\sum_n \left(m_\beta \sum_{\beta}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n - \sum_{\beta}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n \right) \right\}$$ [illegible]

$$e^{-2\sum_n (\eta_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n - \omega_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n)} = (-m_0 - m_1 - \dots - m_{\alpha-1} + m_{\alpha+1} + \dots + m_{2\varrho})\pi i = -(m_0 + \dots + m_{2\varrho} - m_\alpha)\pi i + 2(m_{\alpha+1} + \dots + m_{2\varrho})\pi i$$

$= (-1)^{m_0 + \dots + m_{2\varrho} - m_\alpha}$ [illegible]

[illegible] $\mathfrak{Al}(u_1 - \sum_{\alpha} \omega_1 \dots)_\alpha = C e^{-\sum_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n u_n} \mathfrak{Al}(u_1 \dots)$ [illegible]

$$\mathfrak{Al}(u_1 \dots)_\alpha = C e^{-\sum_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n (u_n + \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n)} \mathfrak{Al}(u_1 + \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_1 \dots)$$ [illegible] $\mathfrak{Al}(-u_1 \dots)_\alpha = (-1)^{\alpha} \mathfrak{Al}(u_1 \dots)$

[illegible] $\mathfrak{Al}(u_1 + \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_1 \dots)_\alpha = (-1)^{\alpha} C \cdot e^{\sum_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n u_n} \mathfrak{Al}(u_1 \dots)$. [illegible]

$$\mathfrak{Al}(u_1 \dots)_\alpha \mathfrak{Al}(u_1 + \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_1 \dots)_\alpha = (-1)^{\alpha} C^2 e^{-\sum_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_n \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\eta}_n} \mathfrak{Al}(u_1 \dots) \mathfrak{Al}(u_1 + \sum_{\alpha}^{2\varrho} \overset{\gamma}{\omega}_1 \dots)$$

$-\,\circ\,\mathfrak{al}(u_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\gamma\,\omega_1\ldots)_\lambda = \dfrac{\sqrt{\tfrac{1}{\lambda}}\,\Pi\,\sqrt{a_\alpha}}{l_\alpha\,\mathfrak{al}(u_1\ldots)_\alpha}$ [illegible] $\dfrac{\sqrt{\tfrac{1}{\lambda}}\,\Pi\,a_\alpha}{l_\alpha} = (-1)^\alpha\, e^{-\sum_n\sum_\alpha \omega'_n \sum_\alpha^{\varrho}\gamma\,\eta_n}$ [illegible]

38) $\mathfrak{Al}(u_1\ldots)_\lambda = (-1)^\alpha \dfrac{\sqrt{\tfrac{1}{\lambda}}\,\Pi\,a_\alpha}{l_\alpha}\, e^{-\sum_n\sum_\alpha^{\alpha}\gamma\,\eta_n(u_n+\frac{1}{2}\sum_\alpha^{2\varrho}\gamma\,\omega_n)}\,\mathfrak{Al}(u_1+\sum_\alpha^{2\varrho}\gamma\,\omega_1\ldots)$.

[illegible]

39) $\omega_{nb} = \omega_n^{2b-1}$, $\omega'_{nb} = \sum_1^{b}\omega_n^{2\gamma-2}$, $\eta_{nb} = \eta_n^{2b-1}$, $\eta'_{nb} = \sum_1^{b}\eta_n^{2\gamma-2}$ $(b = 1\ldots\varrho)$, [illegible]

$\omega_{nb} = \sum_{2b-1}^{2\varrho}\gamma\,\omega_n - \sum_{2b}^{2\varrho}\gamma\,\omega_n$, $\omega'_{nb} = \sum_0^{2\varrho}\gamma\,\omega_n - \sum_1^{2\varrho}\gamma\,\omega_n + \sum_2^{2\varrho}\gamma\,\omega_n - \sum_3^{2\varrho}\gamma\,\omega_n + \ldots + \sum_{2b-2}^{2\varrho} - \sum_{2b-1}^{2\varrho}\gamma\,\omega_n$

$\eta_{nb} = \sum_{2b-1}^{2\varrho}\gamma\,\eta_n - \sum_{2b}^{2\varrho}\gamma\,\eta_n$, $\eta'_{nb} = \sum_0^{2\varrho}\gamma\,\eta_n - \ldots\ldots - \sum_{2b-1}^{2\varrho}\gamma\,\eta_n$

[illegible] ω_{nb} [illegible] ω_n [illegible] $m_0 = 0,\ m_1 = 0, \ldots m_{2b-2} = 0,\ m_{2b-1} = 1,\ m_{2b} = -1,\ m_{2b+1} = 0 \ldots m_{2\varrho} = 0$

ω'_{nb} [illegible] ω_n [illegible] $m_0 = m_2 = \ldots m_{2b-2} = 1,\ m_1 = m_3 = \ldots m_{2b-1} = -1,\ m_{2b} = m_{2b+1} = \ldots = m_{2\varrho} = 0$

[illegible]

$\mathfrak{Al}(u_1+2\omega_{1b}\ldots u_\varrho+2\omega_{\varrho b}) = e^{2\sum_n \eta_{nb}(u_n+\omega_{nb})}\,\mathfrak{Al}(u_1\ldots u_\varrho)$

40) $\mathfrak{Al}(u_1+2\omega'_{1b}\ldots u_\varrho+2\omega'_{\varrho b}) = e^{2\sum_n \eta'_{nb}(u_n+\omega'_{nb})}\,\mathfrak{Al}(u_1\ldots u_\varrho)$ $\quad b = 1\ldots\varrho$

[illegible] $\sum_1^{\varrho+1}\omega_n^{2\gamma-2} = 0$ [illegible] $\omega_n^{2\varrho} = -\omega'_{n\varrho}$

$\sum_\alpha^{2\varrho}\gamma\,\omega_n = \sum_\alpha^{2\varrho-1}\gamma\,\omega_n - \sum_1^{\varrho}\omega_n^{2\gamma-2} = \omega_{nb}+\omega_{n(b+1)}+\ldots+\omega_{n\varrho} - \begin{cases}\omega'_{nb} & \alpha = 2b-1\\ \omega'_{n(b-1)} & \alpha = 2b-2\end{cases}$ [illegible]

[illegible]

41) $\mathfrak{Al}(u_1\ldots u_\varrho)_\lambda = (a)_\lambda\,\mathfrak{Al}(u_1+\hat{\omega}_1\ldots u_\varrho+\hat{\omega}_\varrho)\,e^{-\sum_n\{\hat{\eta}_n(u_n+\frac{1}{2}\hat{\omega}_n) - \lambda_n\lambda'_n\frac{\pi}{4}i\}}$

[illegible] $(a\lambda)$ [illegible] $a_n\ldots a_\varrho$ [illegible] $e^{-\sum_n \lambda_n\lambda'_n\frac{\pi}{4}i}\,(-1)^\lambda \dfrac{\sqrt{\tfrac{1}{\lambda}}\,\Pi\,a_\lambda}{l_\lambda}$ [illegible]

[illegible] $\hat{\omega}_n,\ \hat{\eta}_n$ [illegible] $\hat{\omega}_n = \sum_b(\lambda_b\,\omega_{nb}+\lambda'_b\,\omega'_{nb})$, $\hat{\eta}_n = \sum_b(\eta_{nb}\,\lambda_b + \lambda'_b\,\eta'_{nb})$

[illegible] $\lambda_1\ldots\lambda_\varrho$ [illegible] 0 [illegible] $+1$, $\lambda'_1\ldots\lambda'_\varrho$, 0 [illegible] -1 [illegible].

Bestimmung der Normalform der algebraischen Gebilde für die Fälle $\varrho = 1, 2, 3$.–

(Nach Ausarbeitung von E. Jürgens.)

Die Aufgabe, die einfachste Gleichung zu finden, durch die eine gegebene algebraische Gleichung ersetzt werden kann, hängt damit zusammen, diejenigen Gleichungen vom Range ϱ zu bilden, aus welchen alle Gleichungen desselben Ranges ermittelt werden können. Wir behandeln die Fälle $\varrho = 1, 2, 3$; $\varrho = 4$ kann hiernach leicht behandelt werden. $\varrho = 5$ giebt schon weitläufige Rechnungen. Weierstraß hat den Fall noch behandelt und es scheint, als ob die Methode allgemein durchgeht.

Wir haben gesehen, daß es rationale Functionen des Paares x, y giebt, die nur an einer einzigen Stelle unendlich werden und zwar, daß sich mit Ausnahme von ϱ Graden $\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_\varrho$ rationale Functionen jedes Grades dieser Beschaffenheit bilden lassen. Eine solche rationale Function ersten Grades existirt niemals, wenn nicht $\varrho = 0$ ist. Wir nehmen jetzt die Fälle $\varrho = 1, 2, 3$ successive durch.

$\varrho = 1.$

Die rationale Function niedrigsten Grades, die für $\varrho = 1$ überhaupt existirt, ist vom zweiten Grade. Außer diesem ersten darf nun kein anderer Grad mehr fehlen.

Es seien ξ_2 und ξ_3 zwei Functionen, die an derselben Stelle unendlich werden und zwar vom zweiten resp. dem dritten Grade. Dann können wir 6 Constanten a, b, c, d, e, f

so bestimmen, daß

$$\xi_3^2 - a\xi_2^3 - b\xi_2\xi_3 - c\xi_2^2 - d\xi_3 - e\xi_2 - f = 0$$

ist. Zu dem Ende brauchen wir nur für die Umgebung jener Stelle, für die ξ_2, ξ_3 unendlich werden, die linke Seite nach Potenzen von t zu entwickeln und $a, b, \dots e$ so zu bestimmen, daß die 6 negativen Potenzen $t^{-6}, t^{-5}, \dots t^{-2}$ herausfallen; t^{-1} fällt dann von selbst weg, da es keine Function giebt die von der ersten Ordnung unendlich wird. Also wird die linke Seite an der betreffenden Stelle nicht mehr unendlich; an einer andern kann sie es auch nicht werden, folglich ist sie eine Constante. Wir können daher f so bestimmen, daß diese 0 wird. Aus der Gleichung folgt

$$\xi_3^2 - (b\xi_2 + d)\xi_3 = a\xi_2^3 + c\xi_2^2 + e\xi_2 + f$$

und setzen wir

$$\xi_3 - \tfrac{1}{2}(b\xi_2 + d) = \eta$$

so ergiebt sich

$$\eta^2 = a\xi_2^3 + c'\xi_2^2 + e'\xi_2 + f';$$

$$c' = c - \tfrac{1}{4}b^2, \quad e' = e - bd, \quad f' = f - \tfrac{1}{4}d^2.$$

Die Gleichung zwischen η und ξ_2 ist vom Range 1. Wir können jede algebraische Gleichung durch eine rationale Substitution in diese Normalform überführen, denn durch die Substitution

$$\xi_2 = R_2(xy) \quad , \quad \xi_3 = R_3(xy)$$

geht dieselbe in eine irreducible Gleichung zwischen ξ_2 und ξ_3 über und diese läßt sich durch die Substitution $\eta = \xi_3 - \frac{1}{2}(b\xi_2 + d)$ stets auf jene Form bringen.

Setzen wir $\xi_2 = \alpha\xi + \beta$

und bestimmen α und β so, daß in

$$\eta^2 = a(\alpha^3\xi^3 + 3\alpha^2\beta\xi^2 + 3\alpha\beta^2\xi + \beta^3) + c'(\alpha^2\xi^2 + 2\alpha\beta\xi + \beta^2) + e'(\alpha\xi + \beta) + f'$$

$$a\alpha^3 = 4 \quad , \quad 3a\alpha^2\beta + c'\alpha^2 = 0$$

ist, so nimmt die Gleichung zwischen η und ξ die Form

$$\eta^2 = 4\xi^3 - g_2\xi - g_3$$

an, welche Weierstraß in der Theorie der elliptischen Functionen zu grunde legt.

Aus dieser Normalform läßt sich noch ein Coëfficient herausbringen. Für

$$\eta = m\bar{\eta} \qquad \text{und} \qquad \xi = n\bar{\xi}$$

wird die Gleichung

$$\bar{\eta}^2 = 4\frac{n^3}{m^2}\bar{\xi}^3 - g_2\frac{n}{m^2}\bar{\xi} - g_3\frac{1}{m^2}$$

und bestimmen wir n und m aus den Gleichungen

$$n = \frac{g_3}{g_2} \quad , \quad m^2 = n^3$$

und setzen $g = \frac{g_3}{m^2} = \frac{n g_2}{m^2}$

so wird die Normalgleichung

$$\bar{\eta}^2 = 4\bar{\xi}^3 - g\bar{\xi} - g.$$

Da die Specialisirung $g_2 = 0$ in diesem Falle aber ausgeschlossen ist, so nimmt Weierstraß diese Gleichung nicht als Normalgleichung an. —

$$\rho = 2.$$

Im Falle $\rho = 2$ existiren keine Functionen erster und im allgemeinen auch keine Functionen zweiten Grades.

Wir wählen aber die ausgezeichnete Stelle, an welcher allein die Function unendlich werden soll so, dass eine Function vom zweiten Grade existirt. Dann muss an dieser Stelle notwendig der dritte Grad fehlen. Denn wäre dieser gleichfalls vorhanden, dann könnte durch Multiplication jeder höhere Grad zusammengesetzt werden, während doch noch ein Grad fehlen muss. Es kommen daher wirklich vor

$$\xi_2,\ \xi_4,\ \xi_5,\ \xi_6, \dots$$

Wir wälen nun zwei Functionen ξ aus. Wenn wir ξ_2 und ξ_4 nehmen, so können wir nicht nachweisen, dass die aus $f(x,y)$ durch diese Substitution entstehende Gleichung zwischen ξ_2, ξ_4 irreducibel ist. Daher wälen wir ξ_2 und ξ_5, aus denen wir auch alle übrigen Functionen wirklich zusammensetzen können. Es lassen sich dann, analog wie für $\rho = 1$, wieder die 9 Coefficienten $a, b, \dots i$ so bestimmen, dass

$$\xi_5^2 - a\xi_2^5 - b\xi_2^2\xi_5 - c\xi_2^4 - d\xi_2\xi_5 - e\xi_2^3 - f\xi_5 - g\xi_2^2 - h\xi_2 - i = 0$$

oder

$$\xi_5^2 - \xi_5(b\xi_2^2 + d\xi_2 + f) = a\xi_2^5 + c\xi_2^4 + e\xi_2^3 + g\xi_2^2 + i$$

identisch besteht. Aus derselben folgt, wenn wir

$$\eta = \xi_5 - \tfrac{1}{2}(b\xi_2^2 + d\xi_2 + f)$$

setzen

$$\eta^2 = R(\xi_2),$$

wo $R(\xi_2)$ vom fünften Grade ist. Durch eine änliche Transformation wie oben können wir in $R(\xi_2)$ dem Coefficienten von ξ_2^5 einen beliebigen Wert beilegen und den vom ξ_2^4 gleich 0 machen und erhalten so

$$\eta^2 = 4\xi^5 + g_1\xi^3 + g_2\xi^2 + g_3\xi + g_4.$$

Diese Gleichung ist vom Range $\rho = 2$. Wir können jede Gleichung $f(x,y) = 0$ vom Range 2 durch

$$\xi_2 = R_2(xy), \quad \xi_5 = R_5(xy)$$

in eine irreducible Gleichung zwischen ξ_2 und ξ_5 transformiren und diese in die vorstehende Normalform. An derselben könnten wir noch eine Constante wegschaffen indem wir zwei Coefficienten einander gleich machen; wir müßten dann aber verschiedene Fälle unterscheiden.

$\rho = 3.$

Im allgemeinen wird eine Function dritten Grades, welche an einer Stelle unendlich wird, nicht existiren. Wir wälen aber die Stelle so, daß die Determinante für dieselbe verschwindet, um eine Function ξ_3 herzustellen. Dabei kann es indessen vorkommen, daß wir von selbst auf eine Function zweiten Grades ξ_2 geführt werden. Wir unterscheiden nun die beiden Fälle: erstens ξ_2 existirt nicht, zweitens ξ_2 existirt.

1) Es existire ξ_2 nicht, dann existirt für die gewälte Stelle sicher ξ_3. Wir unterscheiden nun die Fälle

a) die Functionen $\xi_3, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \dots$
b) " " " $\xi_3, \xi_4, \xi_6, \xi_7, \dots$

kommen vor.

a) Es seien die Functionen $\xi_3, \xi_5, \xi_6, \xi_7 \dots$ vorhanden.

Wir nehmen die Function niedrigsten Grades und die der nächst niedrigen zum ersten relativ primen Grades, also ${\int_3^{\xi}}$ und ${\int_5^{\xi}}$. Mit diesen beiden Functionen kommen wir aber jetzt nicht mehr aus, wir müssen noch ${\int_7^{\xi}}$ zu Hülfe nehmen. Wir können ${\int_5^{\xi}}^2$ auf die Form bringen

$$ {\int_5^{\xi}}^2 = a \int_3^{\xi}\int_7^{\xi} + b {\int_3^{\xi}}^3 + c \int_3^{\xi}\int_5^{\xi} + d \int_7^{\xi} + e {\int_3^{\xi}}^2 + f \int_5^{\xi} + g \int_3^{\xi} + h $$

oder

$$ {\int_5^{\xi}}^2 = \alpha_1 \int_7^{\xi} + \beta_1 \int_5^{\xi} + \gamma_1 , $$

wo $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ unbekannte Functionen von $\int_3^{\xi}$ sind. Ebenso läßt sich darstellen

$$ \int_5^{\xi}\int_7^{\xi} = \alpha_2 \int_7^{\xi} + \beta_2 \int_5^{\xi} + \gamma_2 $$

$$ {\int_7^{\xi}}^2 = \alpha_3 \int_7^{\xi} + \beta_3 \int_5^{\xi} + \gamma_3 . $$

Dabei sind die Grade der Functionen α, β, γ in $\int_3^{\xi}$ höchstens $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$; $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 2$, $\beta_3 = 3$; $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 4$, $\gamma_3 = 4$.
Um die Functionen α, β, γ zu bestimmen, bilden wir die beiden Gleichungen

$$ {\int_5^{\xi}}^2 \cdot \int_7^{\xi} = \int_5^{\xi}\int_7^{\xi} \cdot \int_5^{\xi} ; \quad {\int_7^{\xi}}^2 \int_5^{\xi} = \int_5^{\xi}\int_7^{\xi} \cdot \int_7^{\xi} $$

und erhalten so Relationen unter den Größen α, β, γ. Denn jeder der Ausdrücke ${\int_5^{\xi}}^2 \int_7^{\xi}$, $\int_5^{\xi} {\int_7^{\xi}}^2$ läßt sich nur auf eine einzige Weise auf die Form $\alpha \int_7^{\xi} + \beta \int_5^{\xi} + \gamma$ bringen. Denn gesetzt, es ließe sich dies auf zwei verschiedene Weisen erreichen, so müßte die Differenz der beiden Ausdrücke identisch 0 sein; wir wollen aber zeigen, daß dann die einzelnen Coefficienten selbst identisch 0 sein müssen. Sind nämlich $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ resp.

die Grade der drei Coefficienten α, β, γ in ζ_3; sie haben, wenn wir nach Potenzen von t entwickeln, die drei Glieder

$$\alpha\zeta_7^{\varepsilon}, \quad \beta\zeta_5^{\varepsilon}, \quad \gamma\zeta^{\varepsilon''}$$

resp. die Grade

$$3\varepsilon+7, \quad 3\varepsilon'+5, \quad 3\varepsilon'';$$

sie können sich demnach nicht fortheben. Es kann also indem wir $\zeta_5^{\varepsilon\,2}\zeta_7^{\varepsilon}$, $\zeta_5^{\varepsilon}\zeta_7^{\varepsilon\,2}$ auf zweierlei Weise in die Form $\alpha\zeta_7^{\varepsilon}+\beta\zeta_5^{\varepsilon}+\gamma$ bringen, die Gleichheit der entsprechenden Coefficienten angenommen werden.

In der zweiten Gleichung

$$\zeta_5^{\varepsilon}\zeta_7^{\varepsilon} = \alpha_2\zeta_7^{\varepsilon} + \beta_2\zeta_5^{\varepsilon} + \gamma_2$$

können wir one Beschränkung $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ annehmen. Denn wir können diese Gleichung auch schreiben

$$(\zeta_5^{\varepsilon} - \alpha_2)(\zeta_7^{\varepsilon} - \beta_2) = \gamma_2 + \alpha_2\beta_2$$

und statt ζ_5^{ε}, ζ_7^{ε} die Functionen $\zeta_5^{\varepsilon} - \alpha_2$, $\zeta_7^{\varepsilon} - \beta_2$, welche die gleichen charakteristischen Eigenschaften haben, einfüren. Unter dieser Annahme liefert die Gleichung

$$\zeta_5^{\varepsilon\,2}\cdot\zeta_7^{\varepsilon} = \zeta_5^{\varepsilon}\zeta_7^{\varepsilon}\cdot\zeta_5^{\varepsilon}$$

$$\zeta_5^{\varepsilon\,2}\cdot\zeta_7^{\varepsilon} = \alpha_1(\alpha_3\zeta_7^{\varepsilon} + \beta_3\zeta_5^{\varepsilon} + \gamma_3) + \beta_1\gamma_2 + \gamma_1\zeta_7^{\varepsilon} = (\alpha_1\alpha_3 + \gamma_1)\zeta_7^{\varepsilon} + \alpha_1\beta_3\zeta_5^{\varepsilon} + \alpha_1\gamma_3$$
$$+ \beta_1\gamma_2 = \gamma_2\zeta_5^{\varepsilon}$$

mithin ergiebt sich

$$\alpha_1\alpha_3 + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_1\beta_3 - \gamma_2 = 0, \quad \alpha_1\gamma_3 + \beta_1\gamma_2 = 0$$

oder

$$\gamma_1 = -\alpha_1\alpha_3, \quad \gamma_2 = \alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3 = -\beta_1\beta_3$$

Die andere Gleichung $\xi_7^2 \cdot \xi_5 = \xi_5 \xi_7 \cdot \xi_7$ giebt genau dieselben Relationen. $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3$ bleiben also willkürlich, nur ist die obige Gradbestimmung zu beachten.

Eliminiren wir jetzt ξ_7 aus den beiden Gleichungen

$$\xi_5^2 = \alpha_1 \xi_7 + \beta_1 \xi_5 + \gamma_1 \quad , \quad \xi_5 \xi_7 = \gamma_2 \; ,$$

so erhalten wir

$$\xi_5^3 = \alpha_1 \gamma_2 + \beta_1 \xi_5^2 + \gamma_1 \xi_5$$

oder

$$\xi_5^3 - \beta_1 \xi_5^2 + \alpha_1 \alpha_3 \xi_5 - \alpha_1^2 \beta_3 = 0 .$$

Dies ist die Normalgleichung; in dieser Form war sie noch nicht bekannt. Bisher haben wir bewiesen: wenn es für $\rho = 3$ eintritt, daß für irgend eine ausgezeichnete Stelle die Functionen ξ_3, ξ_5, ξ_7 existiren, so muß die obige Gleichung bestehen, und außerdem muß sein

$$\xi_7 = \frac{\gamma_2}{\xi_5} = \frac{\alpha_1 \beta_3}{\xi_5} .$$

Jetzt müssen wir zeigen, daß jene Gleichung auch alle Bedingungen einer Normalgleichung für $\rho = 3$ erfüllt, besonders aber zeigen, daß dieselbe wirklich vom Range 3 ist, beziehungsweise die Bedingungen dafür aufstellen. Zu dem Zwecke werden wir die Bedingungen ableiten dafür, daß die Functionen $\xi_3, \xi_5, \xi_6, \xi_7 \dots$ wirklich existiren; da der Annahme nach ξ_1, ξ_2, ξ_4 nicht existiren, so folgt dann, daß $\rho = 3$ ist. Für die Umgebung der ausgezeichneten

Stelle ist

$$\xi_3 = c_0 t^{-3} + \dots$$

und es muss nun gezeigt werden, dass durch die Gleichung

$$\xi_5^3 - \beta_1 \xi_5^2 + \alpha_1 \alpha_3 \xi_5 - \alpha_1^2 \beta_3 = 0$$

eine Function ξ_5 definirt wird, welche nur unendlich wird, wenn ξ_3 unendlich wird, und deren Entwicklung für die Umgebung der ausgezeichneten Stelle beginnt

$$\xi_5 = c_1 t^{-5} + \dots\dots$$

Setzen wir in der Gleichung

$$\xi_5 = \eta \xi_3^{\frac{5}{3}} \quad , \quad \xi_3^{-\frac{1}{3}} = u \, ,$$

so müssen wir nachweisen, dass sich aus der Gleichung

$$\eta = \mathfrak{P}(u)$$

ergiebt, wo $\mathfrak{P}(u)$ mit einer Constanten beginnt.

Da die Functionen $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3$ höchstens vom 1, 2, 3, 1$^{\text{ten}}$ Grade in ξ_3 sind, so können wir die obige Gleichung schreiben

$$0 = \xi_5^3 - (g\xi_3 + h)\xi_5^2 + (g_1 \xi_3 + h_1)(g_2 \xi_3^2 + h_2 \xi_3 + k_2)\xi_5 - (g_1 \xi_3 + h_1)^2 (g_3 \xi_3^3 + h_3 \xi_3^2 + k_3 \xi_3 + l_3)$$

oder nach Einführung jener Substitution

$$\eta^3 \xi_3^5 - (g\xi_3 + h)\eta^2 \xi_3^{\frac{10}{3}} + (g_1 \xi_3 + h_1)(g_2 \xi_3^2 + h_2 \xi_3 + k_2)\eta \xi_3^{\frac{5}{3}}$$
$$- (g_1 \xi_3 + h_1)^2 (g_3 \xi_3^3 + h_3 \xi_3^2 + k_3 \xi_3 + l_3) = 0.$$

Dividiren wir durch ξ_3^5 so folgt

$$\eta^3 - (g\xi_3^{-\frac{2}{3}} + h\xi_3^{-\frac{5}{3}})\eta^2 + (g_1 g_2 \xi_3^{-\frac{1}{3}} + \dots)\eta - (g_1^2 g_3 + \dots) = 0$$

oder

$$\eta^3 + u^2 f_1(u) \cdot \eta^2 + u f_2(u) \cdot \eta - g_1^2 g_3 - u \cdot f_3(u) = 0.$$

Dabei sind $f_1(u)$, $f_2(u)$, $f_3(u)$ Potenzreihen von u.

Diese Gleichung haben wir nun unter der Voraussetzung zu lösen, daß u hinreichend klein ist. Dies giebt

$$\eta = \sqrt[5]{g_1^2 g_3} + \mathfrak{P}(u);$$

soll diese Potenzreihe demnach mit einem constanten Gliede beginnen, so darf weder g_1 noch g_3 gleich 0 sein; es muß daher α_1 wirklich vom Grade 1 und β_3 wirklich vom Grade 3 sein. Umgekehrt, wenn dieses der Fall ist, so erhalten wir wirklich aus der Gleichung für ξ_5 in der Umgebung der ausgezeichneten Stelle eine Reihe von der Form

$$\xi_5 = c_1 t^{-5} + \ldots$$

und da ξ_3 in der Umgebung keiner andern Stelle unendlich wird, so folgt dasselbe für ξ_5.

Jetzt weisen wir die Existenz von ξ_7 nach. Es erscheint ξ_7 in Bruchform

$$\xi_7 = \frac{\alpha_1 \beta_3}{\xi_5},$$

es könnte also ξ_7 noch unendlich werden, wenn ξ_5 verschwindet. Eliminiren wir jedoch ξ_5 aus der obigen zweiten und dritten Gleichung, so folgt

$$\xi_7^3 = \alpha_3 \xi_7^2 + \beta_3 \gamma_2 + \gamma_3 \xi_7.$$

Da hier der Coefficient des höchsten Gliedes eins ist, die Coefficienten der übrigen Glieder aber alle ganze Functionen von ξ_3 sind, so kann ξ_7 nur an der Stelle unendlich werden, wo ξ_3 es wird. Aus

$$\xi_7 = \frac{\alpha_1 \beta_3}{\xi_5}$$

daſs ξ_7 eine rationale Function von ξ_3 und ξ_5 ist, und die Entwicklung für die Umgebung der ausgezeichneten Stelle hat die Form

$$\xi_7 = \frac{c\,t^{-12}+\cdots}{c'\,t^{-5}+\cdots} = C\,t^{-7}+\cdots .$$

Demnach existirt in der Tat eine Function siebenten Grades, die nur an der ausgezeichneten Stelle unendlich wird.

Daraus folgt, das Gebilde

$$\eta^3 - \beta_1\eta^2 + \alpha_1\alpha_3\eta - \alpha_1^2\beta_3 = 0,$$

wo $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3$ ganze rationale Functionen von ξ sind, u. zwar α_1, β_3 vom Grade 1, 3; α_3, β_1 höchstens vom Grade 2, 1, hat nur ein einziges unendlich fernes Element, u. es giebt Functionen vom $3^{\text{ten}}, 5^{\text{ten}}, 7^{\text{ten}}$ Grade für dieses Gebilde, welche nur für dieses Element unendlich werden.

Denn es wird η nur unendlich, wenn ξ unendlich wird, und zwar läſst sich dann η nach gebrochenen Potenzen von ξ mit dem Nenner 3 entwickeln; die eine Reihe liefert also alle unendlich groſsen η. Die Function dritten Grades ist $\xi_3 = \xi$, die fünften Grades $\xi_5 = \eta$, die siebenten Grades $\xi_7 = \frac{\alpha_1\beta_3}{\xi_5}$. Ferner existirt für das Gebilde jede Function von höherem als dem siebenten Grade, da sich jede Zal > 7 durch 3λ oder $3\lambda+5$ oder $3\lambda+7$ darstellen läſst. Daſs keine Functionen ersten, zweiten, vierten Grades existiren läſst sich aus der gemachten Annahme leicht beweisen; es ist also das aufgestellte Gebilde vom Range 3. Um wirklich nachzuweisen, daſs $\xi_0, \xi_1, \xi_2,$

nicht existiren, haben wir zu zeigen, daß jede existirende Function auf die Form $P + Q\xi_5 + R\xi_7$ gebracht werden kann, wo P, Q, R Functionen von ξ_3 sind.

Die Irreducibilität der Gleichung zwischen η und ξ ist klar. Denn da der Grad 3 eine Primzal ist, so müßte, falls die Gleichung reducibel wäre, dieselbe auf die Form

$$(\eta + \text{ganze Funct. von } \xi)^3 = 0$$

gebracht werden können; es wäre demnach η selbst eine ganze Function von ξ. Da aber für große Werte von ξ die Entwicklung von η nach Potenzen von ξ, wie wir sahen, gebrochene Potenzen enthält, so ist das nicht möglich u. die Gleichung ist also irreducibel.

Dieser Irreducibilitätsbeweis gilt ganz allgemein. Es sei zwischen ξ u. η eine Gleichung $n$ten Grades gegeben, welche die Eigenschaft hat, daß für große Werte ξ

$$\eta = \mathfrak{P}(\xi^{-\frac{1}{n}})$$

ist, wo die eine Potenzreihe n verschiedene Werte η liefert. Dann läßt sich zeigen, daß die Gleichung zwischen ξ u. η $f(\xi\,\eta) = 0$ irreducibel ist. Denn angenommen, man hätte

$$f(\xi\,\eta) = f_1(\xi\,\eta) \cdot f_2(\xi\,\eta),$$

so nehmen wir ξ hinreichend groß u. setzen für η jene Entwicklung ein; so muß f_1 oder f_2 identisch 0 werden, da das Product es ist; $f_1(\xi\,\eta)$ sei dieser Factor. Dann müssen in f_1, wenn wir nach Potenzen von $\xi^{-\frac{1}{n}}$ entwickeln, die einzelnen Coefficienten 0 sein. Da für ein bestimmtes ξ die Reihe $\eta = \mathfrak{P}(\xi^{-\frac{1}{n}})$ die n Werte η

liefert, indem wir ξ mit den Einheitswurzeln multiplicieren so folgt, daß $f_1(\xi, \eta)$, wenn die Coefficienten jener Entwicklung einzeln 0 sind, nicht nur für einen Wert η, sondern für alle n Werte η identisch verschwindet. Der Factor $f_1(\xi\, \eta)$ ist also von niedrigerem Grade als n und verschwindet für n Werte η, die sämmtlich verschieden sind. Das ist aber nicht möglich; $f(\xi, \eta)$ ist also irreducibel.

Die Gleichung

$$\eta^3 - \beta_1 \eta^2 + \alpha_1 \alpha_3 \eta - \alpha_1^3 \beta_3 = 0$$

ist demnach irreducibel vom Range $\rho = 3$, und da jedes Gebilde desselben Ranges, für welches die Functionen ξ_1, ξ_2, ξ_4 nicht existiren auf diese Form gebracht werden kann, so nehmen wir dieselbe als Normalform.

Wir ermitteln jetzt die Anzahl der wesentlichen Constanten in jener Gleichung. Wir können ξ mit einer Constante multipliciren und um eine Constante vermehren, also statt $\alpha_1 = g\xi_0 + h$, auch direct ξ setzen; dadurch erhalten wir

$$0 = \eta^3 - (\alpha\xi + \beta)\eta^2 + \xi(\gamma\xi^2 + \delta\xi + \varepsilon)\eta - (\zeta\xi^3 + \vartheta\xi^2 + \kappa\xi + \lambda)\xi^2$$

Von den neun Constanten dieser Gleichung lassen sich drei durch die Substitution

$$\eta = a\eta' + b\xi + c$$

beseitigen; die Normalgleichung enthält daher nur 6 wesentliche Constanten. Wir wollen jedoch nicht darauf eingehen, wie über diese Constanten am besten verfügt wird. Wir können auch die ursprüngliche allgemeine Form der Gleichung beibehalten, wenn wir nur wissen, wie die wesentlichen Constanten zu zälen sind.

Die obige Normalgleichung entspringt aus einer Gleichung vierter Dimension. Denn setzen wir

$$\eta = \alpha_1 \xi,$$

so geht dieselbe über in

$$\alpha_1 \xi^3 - \beta_1 \xi^2 + \alpha_3 \xi - \beta_3 = 0$$

und da α_1, β_1 vom ersten, α_3, β_3 vom dritten Grade in ξ sind, so ist diese Gleichung von der vierten Dimension. Nehmen wir wie oben $\alpha_1 = \xi$, so wird die Gleichung

$$\xi \xi^3 - \beta_1 \xi^2 + \alpha_3 \xi - \beta_3 = 0.$$

Fassen wir dies Gebilde als Curve auf, so läßt sich ihr geometrischer Charakter leicht erkennen. Die Curve hat im Unendlichen eine Wendetangente. Die Asymptoten erhalten wir durch

$$\xi \cdot \xi^3 = 0$$

$$\xi = 0, \quad \xi^3 = 0.$$

Die Graden $\xi = 0, \xi = 0$ haben also einen unendlich fernen Punkt mit der Curve gemein, der mit $\xi = 0$ ist also dreimal zu zälen, $\xi = 0$ ist also Wendetangente.

Da jede Curve 4ten Grades Wendetangenten hat, so brauchen wir nur eine solche Projection zu machen, daß die Wendetangente im Endlichen liegt, der Berürungspunkt aber ins Unendliche fällt, dann hat die Curve die obige

Gestalt. Jede Curve vierten Grades, welche eine solche Wendetangente hat repräsentirt ein Gebilde vom Range 3; Doppelpunkte darf dagegen die Curve nicht haben. Es wäre zu untersuchen ob jede Curve 4ten Grades one Doppelpunkte eine Wendetangente hat; denn es wäre noch möglich daß 4 Punkte zusammenfallen, in welchem Falle eine Doppeltangente auftritt. Dies tritt bei dem zweiten Fall für $\rho = 3$ ein, wo ξ_3, ξ_4 existiren. Die Gleichung ist dann viel einfacher.

b) Es seien die Functionen

$$\xi_3,\ \xi_4,\ \xi_6,\ \xi_7, \dots$$

vorhanden. Die Function

$$\xi_3^{\lambda}\,\xi_4^{\mu}$$

wird an einer ausgezeichneten Stelle unendlich vom Grade $3\lambda + 4\mu$ und da sich alle Zalen > 6 in dieser Form darstellen lassen, so bestehen wirklich $\xi_6, \xi_7, \dots$. Da drei Functionen fehlen, so fehlt noch ξ_5 ausser ξ_1, ξ_2. Es können die 10 Constanten so bestimmt werden, daß die Gleichung

$$\xi_4^3 - a\xi_3^4 - b\xi_4^2\xi_3 - c\xi_4\xi_3^2 - d\xi_3^3 - e\xi_4^2 - f\xi_3\xi_4 - g\xi_3^2 - h\xi_4 - k\xi_3 - l = 0$$

identisch besteht. Dieselbe kann auch auf die Form

$$\xi_4^3 - \alpha_1\xi_4^2 - \alpha_2\xi_4 - \alpha_4 = 0$$

gebracht werden, wo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ Functionen von ξ_3 der Grade 1, 2, 4 sind. Setzen wir

$$\xi_4 + \tfrac{1}{3}\alpha_1 = \eta,$$

so ist auch η eine Function 4ten Grades die nur an der ausgezeichneten Stelle unendlich wird, und man hat

$$\eta^3 - \alpha_2'\eta - \alpha_4' = 0$$

oder

$$\eta^3 + (\alpha\xi_3^2 + \beta\xi_3 + \gamma)\eta + \delta\xi_3^4 + \varepsilon\xi_3^3 + \zeta\xi_3^2 + \vartheta\xi_3 + \kappa = 0.$$

Die Constante δ darf hierbei nicht 0 sein, damit für große ξ_3 die Entwicklung von η nach Potenzen von ξ mit dem Gliede $c\xi_3^{\frac{4}{3}}$ beginnt, die Gleichung zwischen ξ_3 und η also irreducibel ist. Es lässt sich ferner leicht nachweisen, daß diese Gleichung vom Range $\rho = 3$ ist.

Die Anzahl der Constanten in dieser Gleichung lässt sich noch verringern. Denn wir können statt ξ_3 eine beliebige lineare Function von ξ_3 einführen u η noch mit einer Constanten multipliciren, so daß wir noch 3 Constanten wegschaffen können. Die Gleichung enthält demnach nur 5 wesentliche Constanten; es ist dies also nicht der allgemeine Fall.

Nur in particulären Fällen stimmen beide Normalformen überein, nämlich nur wenn in der ersten

$$\alpha = \beta = \gamma = \zeta = 0, \quad \vartheta \gtrless 0$$

ist; freilich war der specielle Fall $\zeta = 0$ oben ausdrücklich ausgeschlossen. Für den Fall $\rho = 3$ existiren daher im allgemeinen Falle ξ_3 u. ξ_5 in speciellen Fällen nur ξ_3 u ξ_4.

Weierstraß hat nicht genau untersucht, ob sich nicht dieser Fall auf dieselbe Form bringen lässt, wie der erstere. Denn wenn auch an einer Stelle ξ_5 nicht existirt, so kann es doch vielleicht an einer andern Stelle existiren. Die durch die Gleichung vierten Grades dargestellte Curve hat eine Wendetangente die gleichzeitig Doppeltangente ist.

2) Es existire die Function ξ_2. Es muss dann eine andere Function derselben Art geben, die mit ξ_2 durch eine Gleichung 2ten Grades verbunden ist. Ausser ξ_1 müssen noch ξ_3 u ξ_5 fehlen, da $\xi_4, \xi_6, \xi_8, ..$ durch ξ_2 darstellbar sind. Man hat daher eine Gleichung zwischen ξ_2 u ξ_7, u. kann die 12 Constanten $a, b, .. n$ so bestimmen, dass

$$\xi_7^2 - a\xi_2^7 - b\xi_2^3\xi_7 - c\xi_2^6 - d\xi_2^2\xi_7 - e\xi_2^5 - f\xi_2\xi_7 - g\xi_2^4 - h\xi_7 - k\xi_2^3 - l\xi_2^2 - m\xi_2 - n = 0$$

identisch besteht, oder dass

$$\xi_7^2 - \xi_7(b\xi_2^3 + d\xi_2^2 + f\xi_2 + h) = a\xi_2^7 + c\xi_2^6 + e\xi_2^5 + g\xi_2^4 + k\xi_2^3 + l\xi_2^2 + m\xi_2 + n$$

ist. Setzen wir nun

$$\eta = \xi_7 - \tfrac{1}{2}(b\xi_2^3 + d\xi_2^2 + f\xi_2 + h)$$

so geht die Gleichung über in

$$\eta^2 = a\xi_2^7 + c'\xi_2^6 + e'\xi_2^5 + g'\xi_2^4 + k'\xi_2^3 + l'\xi_2^2 + m'\xi_2 + n'.$$

Diese Gleichung ist irreducibel und vom Range $\rho = 3$. Sie bildet die Normalform für den Fall, dass ξ_2 besteht. Von den 8 in ihr enthaltenen Constanten können wir wieder noch 3 fortschaffen, so dass die Normalgleichung noch fünf wesentliche Constanten enthält. Dieser Fall ist demnach wieder ein particulärer.

Somit haben wir die Fälle $\rho = 1, 2, 3$ vollständig behandelt. So oft eine Function ξ_2 existirt, lässt sich das Gebilde auf ein hyperelliptisches reduciren.

Allgemein ist es nicht schwer zu zeigen, dass wir Normalgleichungen erhalten, viel mehr dass die Constanten rational in die Schlussformeln eingehen, wie dies in den behandelten Fällen stattfindet u. was von grossem Vorteil ist. Der Fall $\rho = 5$ erfordert schon weitläufige Rechnungen; es muss da noch allgemeine Prinzipien geben, die wenigstens die Existenz zweier Normalgleichungen, welche die wesentlichen Constanten rational enthalten, beweisen.

Bestimmung der canonischen Gleichungsformen zwischen $x\,y$ für $\varrho = 3,\ 4,\ 5.$ –

(Nach Manuscript von Weierstraß.)

Bezeichnet man mit x_2 eine rationale Function von x und y, die nur an einer Stelle unendlich groß mit der entsprechenden Ordnungszahl λ wird, so existirt für $\varrho = 3$ im allgemeinen Falle I x_3, x_5, x_7 ; x_4 aber fehlt.
Aber es sind auch folgende zwei Fälle möglich

I$_a$ es existirt x_3, x_4, x_6 ; es fehlt x_5

II " " x_2, x_7 ; " " x_3, x_5.

Im Falle I hat man die Gleichungen

$$x_5^2 = \alpha_1 x_7 + \beta_1 x_5 + \gamma_1\,,\quad x_5 x_7 = \alpha_2 x_7 + \beta_2 x_5 + \gamma_2\,,\quad x_7^2 = \alpha_3 x_7 + \beta_3 x_5 + \gamma_3$$

Indem man statt x_5 und x_7 nimmt

$$x_5 + p\quad,\quad c x_7 + l x_5 + q$$

wo c, l Constanten bezeichnen, p, q lineare Functionen von x_3, so kann man p, q so bestimmen, daß $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 0$ wird, und außerdem erhält dann x_7 noch 2 Constanten, denen man vorgeschriebene Werte beilegen kann.

$\alpha_1, \beta_1, \ldots$ sind ganze Functionen von x_3 resp. vom Grade

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2 ; & \beta_1, & \beta_3 ; & \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 ; \\ 1, & 2 ; & 1, & 2 ; & 3, & 4, & 4. \end{matrix}$$

Unter diesen Functionen bestehen folgende Gleichungen, die man erhält, indem man $x_5^2 \cdot x_7 = x_5 \cdot x_5 x_7$ setzt

$$\alpha_1\alpha_3 + \gamma_1 = 0\,,\quad \alpha_1\beta_3 - \gamma_2 = 0\,,\quad \alpha_1\gamma_3 + \beta_1\gamma_2 = 0$$

$$\gamma_1 = -\alpha_1\alpha_3\,,\quad \gamma_2 = \alpha_1\beta_3\,,\quad \gamma_3 = -\beta_1\beta_3\,.$$

$x_5^2 = \alpha_1 x_7 + \beta_1 x_5 - \alpha_1\alpha_3$

$x_5 x_7 = \alpha_1\beta_3$

$x_7^2 = \alpha_3 x_7 + \beta_3 x_5 - \beta_1\beta_3\,.$

$\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3$ sind die allgemeinsten Functionen ihres Grades. Durch Elimination von x_7 erhält man

$$0 = x_5^3 - \beta_1 x_5^2 + \alpha_1\alpha_3 x_5 - \alpha_1^2\beta_3\,.$$

Die Discriminante dieser Gleichung hat α_1 zum außerwesentlichen Factor. Der wesentliche Teiler derselben ist vom $\gamma(8)$ten Grade. Im Falle Ia hat man die Gleichungen

$$x_4^2 = \alpha_1 x_8 + \beta_1 x_4 + \gamma_1$$
$$x_4 x_8 = \alpha_2 x_8 + \beta_2 x_4 + \gamma_2$$
$$x_8^2 = \alpha_3 x_8 + \beta_3 x_4 + \gamma_3\,.$$

Man kann aber nehmen

$$x_4^2 = x_8\,,\quad x_4 x_8 = \beta_2 x_4 + \gamma_2\,,\quad x_8^2 = \alpha_3 x_8 + \beta_3 x_4 + \gamma_3\,,$$

wo dann $\alpha_3, \beta_2, \beta_3, \gamma_2, \gamma_3$ ganze Functionen von x_3 resp. vom Grade 2, 2, 4, 4, 5 sind. Dann hat man

$$x_4^2 x_8 = x_8^2 = \beta_2 x_4^2 + \gamma_2 x_4$$

folglich

$$\alpha_3 = \beta_2\,,\quad \beta_3 = \gamma_2\,,\quad \gamma_3 = 0$$

Durch Elimination von x_8 erhält man die Gleichung

$$0 = x_4^3 - \beta_2 x_4 - \gamma_2\,.$$

In β_2 u. γ_2 sind 8 Constanten enthalten; indem man aber für x_3 eine lineare Function dieser Größe u. für x_4 cx_4 setzt, kann man dreien derselben vorgeschriebene

Werte beilegen. Die Gleichung enthält also in diesem Falle nur 5 Constanten, gegen 6 im allgemeinen Falle.

Im Falle II hat man die Gleichung

$$x_7^2 = \alpha x_7 + \beta,$$

wo α, β Functionen 3, 7$^{\text{ten}}$ Grades bedeuten. –

Der allgemeine Fall für $\rho = 4$.

$$x_4,\ x_6,\ x_7,\ x_9.$$

$$x_6^2 = \alpha x_9 + \beta x_7 + \gamma x_6 + \delta\ ;\ x_6 x_7 = \alpha_1 x_9 + \beta_1 x_7 + \gamma_1 x_6 + \delta_1;$$
$$x_6 x_9 = \alpha_2 x_9 + \beta_2 x_7 + \gamma_2 x_6 + \delta_2\ ;\ x_7^2 = \alpha_3 x_9 + \beta_3 x_7 + \gamma_3 x_6 + \delta_3;$$
$$x_7 x_9 = \alpha_4 x_9 + \beta_4 x_7 + \gamma_4 x_6 + \delta_4\ ;\ x_9^2 = \alpha_5 x_9 + \beta_5 x_7 + \gamma_5 x_6 + \delta_5.$$

Die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind ganze Functionen von x_4 resp. der Grade

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\ ;\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \delta_1;\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \delta_2;\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3,\ \delta_3;$$
$$0,\ 1,\ 1,\ 3\ ;\ 1,\ 1,\ 1,\ 3;\ 1,\ 2,\ 2,\ 3;\ 1,\ 1,\ 2,\ 3;$$
$$\alpha_4,\ \beta_4,\ \gamma_4,\ \delta_4;\ \alpha_5,\ \beta_5,\ \gamma_5,\ \delta_5.$$
$$1,\ 2,\ 2,\ 4;\ 2,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Setzt man aber

$$\xi_6 = x_6 + p\ ;\ \xi_7 = x_7 + l x_6 + q\ ,\ \xi_9 = x_9 + m x_7 + n x_6 + r,$$

wo l, m, n Constanten, p, q lineare Functionen von x_4, r eine Function 2$^{\text{ten}}$ Grades von x_4 bedeuten, so kann man mit Hülfe der neun willkürlichen Constanten bewirken daß

$$\beta_1 = \gamma_1 = \alpha_2 = \gamma_2 = 0$$

wird. Wir betrachten daher das System.

$$x_6^2 = \alpha x_9 + \beta x_7 + \gamma x_6 + \delta\ ;\ x_6 x_7 = \alpha_1 x_9 + \delta_1;\ x_6 x_9 = \beta_2 x_7 + \delta_2$$
$$x_7^2 = \alpha_3 x_9 + \beta_3 x_7 + \gamma_3 x_6 + \delta_3;\ x_7 x_9 = \alpha_4 x_9 + \beta_4 x_7 + \gamma_4 x_6 + \delta_4;\ x_9^2 = \alpha_5 x_9 + \beta_5 x_7 + \gamma_5 x_6 + \delta_5.$$
$$x_6^2 - \gamma x_6 - \delta = \alpha x_9 + \beta x_7\ ;\ x_6^3 - \gamma x_6^2 - \delta x_6 = \alpha(\beta_2 x_7 + \delta_2) + \beta(\alpha_1 x_9 + \delta_1)$$
$$x_6^3 - \gamma x_6^2 - \delta x_6 - \beta\delta_1 - \alpha\delta_2 = \alpha_1\beta x_9 - \alpha\beta_2 x_7.$$

Unter den $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bestehen folgende Relationen

$x_6^2 \cdot x_7 = x_6 \cdot x_6 x_7$; $x_6^2 \cdot x_9 = x_6 \cdot x_6 x_9$; $x_6 x_7 \cdot x_9 = x_6 \cdot x_7 x_9$; …

Es folgen daraus die Gleichungen

1) $0 = \alpha\alpha_4 + \beta\alpha_3 + \gamma\alpha_1$. 2) $0 = \alpha\beta_4 + \beta\beta_3 - \alpha\beta_2 + \delta$. 3) $0 = \alpha\gamma_4 + \beta\gamma_3 - \delta_1$

4) $0 = \alpha\delta_4 + \beta\delta_3 - \alpha_1\delta_2 + \gamma\delta_1$. 5) $0 = \alpha\alpha_5 + \beta\alpha_4 - \beta_2\alpha_1 + \delta$. 6) $0 = \alpha\beta_5 + \beta\beta_4 + \gamma\beta_3$

7) $0 = \alpha\gamma_5 + \beta\gamma_4 - \delta_2$. 8) $0 = \alpha\delta_5 + \beta\delta_4 + \gamma\delta_2 - \beta_2\delta_1$ 9) $0 = \alpha_1\alpha_5 - \beta_2\alpha_3 + \delta_1$

10) $0 = \alpha_1\beta_5 - \beta_2\beta_3 - \delta_2$. 11) $0 = \alpha_1\gamma_5 - \beta_2\gamma_3$ 12) $0 = \alpha_1\delta_5 - \beta_2\delta_3$.

Diese Gleichungen müssen so befriedigt werden, dass die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Functionen von x_4 von bestimmten Grade sind.

Bei der Lösung dieser Gleichungen kann man zwei Fälle unterscheiden.

1.) Die Constante α ist $\gtrless 0$ und kann $= 1$ angenommen werden. Die Gleichungen werden dann befriedigt, wenn man setzt

$\alpha_4 = -\gamma\alpha_1 - \beta\alpha_3$; $\beta_4 = \alpha_5 - \beta\beta_3 - \beta^2\alpha_3$; $\beta_5 = -\gamma\beta_2 + \beta(\beta\beta_3 - \alpha_5 + \beta(\gamma\alpha_1 + \beta\alpha_3))$;

$\gamma_5 = -\beta_2(\beta_3 + \gamma\alpha_1 + \beta\alpha_3)$; $\gamma_3 = -\alpha_1(\beta_3 + \gamma\alpha_1 + \beta\alpha_3)$; $\delta = \alpha_1\beta_2 - \beta\beta_3 - \beta_2$;

$\delta_1 = \beta_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_5$; $\delta_2 = \alpha_1\beta_5 - \beta_2\beta_3$; $\delta_3 = \alpha_1\gamma_4 - \gamma\gamma_3$;

$\delta_5 = \beta_2\gamma_4 - \gamma\gamma_5$; $\gamma_4 = \delta_1 - \beta\gamma_3$; $\delta_4 = \alpha_1\delta_2 - \beta\delta_3 - \gamma\delta_1$;

$\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \beta, \beta_2, \beta_3, \gamma$ können willkürlich angenommen werden. Damit aber alle diese Functionen den vorgeschriebenen Grad haben, müssen die $\alpha_1, \alpha_3, \ldots$ den Bedingungen

$$\gamma\alpha_1 + \beta\alpha_3 = \text{lineare Function von } x_4$$

$$\beta(\beta_3 + \gamma\alpha_1 + \beta\alpha_3) - \alpha_5 = \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

unterworfen sein. Die Functionen $\alpha_1, \ldots \gamma$, wenn man sie vom angegebenen Grade annimmt, enthalten zusammen 16

Constanten unter denen zwei Gleichungen bestehen müssen. Über zwei derselben können wir dadurch disponiren, dass wir x_7 u. x_9 mit Constanten multipliciren. Es bleiben also 12 willkürliche Constanten. Durch Elimination von x_7 u. x_9 erhält man die Gleichung

$$\{\gamma x_6^2 + (\delta + \alpha\gamma_2)x_6 + \delta_1\}\{x_6^2 - \alpha_1\beta_2\} - \{\gamma_2 x_6 + \delta_2\}\{x_6^2 - \alpha\beta_2 - \beta x_6\} = 0$$

Es ergiebt sich aber auch

$$(\beta_3 - \alpha_1\beta)^3 x_7 = x_6^3 - (\gamma + \alpha_1\beta)x_6^2 + (\alpha_1\beta\gamma - \delta)x_6 + (\alpha_1\delta - \delta_1)\beta - \delta_2$$

Es muss folglich $\beta_2 - \alpha_1\beta^2$ ein ausserwesentlicher Factor der Discriminante der Gleichung zwischen x_6 u x_4 sein

2.) Wenn $\alpha = 0$ ist, erhält man

$$\delta = \alpha_1\beta_2 - \beta\beta_3;\ \delta_1 = \beta\gamma_3;\ \delta_2 = \beta\gamma_4,\ \delta_3 = \alpha_1\gamma_4 - \gamma\gamma_5,\ \delta_4 = \alpha_1\gamma_5 - \gamma\gamma_4,\ \delta_5 = \beta_2\gamma_4 - \gamma\gamma_5$$

$$\beta\alpha_3 + \gamma\alpha_1 = 0,\ \beta\beta_4 + \gamma\beta_2 = 0,\ \beta\gamma_5 - \beta_2(\beta_4 - \alpha_5) = 0,\ \beta\gamma_3 - \alpha_1(\beta_4 - \alpha_5) = 0,\ \beta\gamma_4 - \alpha_1\beta_5 + \beta_2\beta_3 = 0$$

$$2 \qquad 3 \qquad 4 \qquad 3 \qquad 3\ (\beta_3 = \alpha_4)$$

Setzt man in diese letzte Gleichung für die $\beta_1\ \alpha_1$.. ganze Functionen von bestimmten Grade von x_4 u setzt den Coefficienten von jeder Potenz von x_4 gleich 0, so erhält man 19 Gleichungen unter den sämmtlichen 32 Constanten. Die Anzal der wirklichen Constanten ist in diesem Falle 11, da über 2 derselben durch Multiplication von x_7, x_9 mit willkürlichen Constanten disponirt werden kann. $\alpha_1\beta$ ist ein ausserwesentlicher Factor der Discriminante.

Für $\rho = 4$ sind folgende Fälle möglich:

I Der allgemeine Fall:

x_1, x_3, x_3, x_5 fehlen; aus $x_4, x_6, x_8\ x_9$ kann aller übrige

zusammengesetzt werd.

II. $x_1 x_2 x_3 x_6$ fehlen; aus $x_4 x_5 x_7 x_{10}$ kann man alle übrigen zusammensetzen
III $x_1 x_2 x_3 x_7$ " " $x_4 x_5 x_6 x_{11}$ " " " " "
IV $x_1 x_2 x_4 x_5$ " " $x_3 x_7 x_8$ " " " " "
V $x_1 x_2 x_4 x_7$ " " $x_3 x_5 x_{10}$ " " " " "
VI $x_1 x_3 x_5 x_7$ " " $x_2 x_9$ " " " " "

Im Falle II kann man nehmen

$$x_5^2 = x_{10}\,,\quad x_5 x_7 = \alpha_1 x_{10} + \delta_1\,,\quad x_5 x_{10} = \alpha_2 x_{10} + \beta_2 x_7 + \gamma_2 x_5 + \delta_2$$
$$x_7^2 = \alpha_3 x_{10} + \beta_3 x_7 + \gamma_3 x_5 + \delta_3\,,\quad x_{10}^2 = \alpha_4 x_{10} + \dots\;;\quad x_7 x_{10} = \alpha_5 x_{10} + \dots\,.$$

x_{10} ist dann vollkommen bestimmt; x_7 enthält aber noch 2 Constanten, über die man disponiren kann. Es sind $\alpha_1, \dots$ ganze Functionen von x_4 vom Grade

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\,;\ \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5\,;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5\,;\ \delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5$
$0\ 1\ 1\ 2\ 1\,;\quad 2\ 1\ 3\ 2\,;\quad 2\ 2\ 3\ 3\,;\ 3\ 3\ 3\ 5\ 4.$

Es ist

$$x_5^2 x_7 = x_7 \cdot x_{10} = \alpha_1 x_5 x_{10} + \delta_1 x_5\,,\quad x_5^2 x_{10} = x_{10}^2 = \alpha_2 x_5 x_{10} + \beta_2 x_5 x_7 + \gamma_2 x_5^2 + \delta_2 x_5\,.$$
$$x_5 x_7 x_{10} = \alpha_2 x_7 x_{10} + \beta_2 x_7^2 + \gamma_2 x_5 x_7 + \delta_2 x_7 = \alpha_1 x_{10}^2 + \delta_1 x_{10}\,.$$

Unter den $\alpha, \beta, \dots$ müssen also folgende Relationen bestehen:

$\alpha_4 = \alpha_2^2 + \alpha_1\beta_2 + \gamma_2\;;\quad \alpha_5 = \alpha_1\alpha_2\;;\quad \beta_2\alpha_3 = \alpha_1\alpha_4 + \delta_1 - \alpha_2\alpha_5 - \gamma_2\alpha_1$
$\beta_4 = \alpha_2\beta_2\;;\quad \beta_5 = \alpha_1\beta_2\;;\quad \beta_2\beta_3 = \alpha_1\beta_4 - \delta_2 - \alpha_2\beta_5$
$\gamma_4 = \alpha_2\gamma_2 + \delta_2\;;\quad \gamma_5 = \alpha_1\gamma_2 + \delta_1\;;\quad \beta_2\gamma_3 = \alpha_1\gamma_4 - \alpha_2\gamma_5$
$\delta_4 = \alpha_2\delta_2 + \beta_2\delta_1\;;\quad \delta_5 = \alpha_1\delta_2\;;\quad \beta_2\delta_3 = \alpha_1\delta_4 - \alpha_2\delta_5 - \gamma_2\delta_1\,.$

Setzt man in den letzten 4 Gleichungen für $\alpha_4, \alpha_5, \dots$ aus den 8 ersten die Werte ein, so ergiebt sich

$$\delta_1 = \beta_2(\alpha_3 - \alpha_1^2)\;;\quad \delta_2 = -\beta_2\beta_3$$
$$\beta_2\gamma_3 = \alpha_1\delta_2 - \alpha_2\delta_1\;;\quad \beta_2\delta_3 = (\alpha_1\beta_2 - \gamma_2)\delta_1\,.$$

$\alpha_1\, \alpha_2\, \beta_2\, \gamma_3\, \alpha_3\, \beta_3$ können beliebig genommen werden. Sie enthalten 13 Constanten. Zwei derselben kann man mit Hülfe der 2 in x_7 noch übrig gebliebenen Constanten fortschaffen. Die Anzahl der willkürlichen Constanten ist also 11.

Durch Elimination von x_7, x_{10} erhält man die Gleichung zwischen x_4 u. x_5.

$$\underline{II} \qquad 0 = x_5^4 - \alpha_2 x_5^3 - (\alpha_1\beta_2 + \gamma_2) x_5^2 + \beta_2\beta_3 x_5 - \beta_2^2(\alpha_3 - \alpha_1^2)$$

Die Discriminante dieser Gleichung ist vom 15. Grade und hat β_2 zum ausserwesentlichen Factor.

Im Falle $\underline{III}$ hat man die Gleichungen

$$x_5^2 = \beta_1 x_6 + \gamma_1 x_5 + \delta, \quad x_5 x_6 = x_{11}, \quad x_5 x_{11} = \beta_2 x_6 + \gamma_2 x_5 + \delta_2$$

$$x_6^2 = \alpha_3 x_{11} + \beta_3 x_6 + \gamma_3 x_5 + \delta_3; \; x_{11}^2 = \alpha_4 x_{11} + \beta_4 x_6 + \cdots; \; x_6 x_{11} = \alpha_5 x_{11} + \cdots$$

Man kann noch statt x_6 setzen $x_6 + l x_5 + p_1$, wo l eine Constante und p_1 eine lineare Function von x_4 bezeichnet. Es bleiben also noch 3 Constanten über die man disponiren kann; α, β, γ sind ganze Functionen von den Graden

α_3,	α_4,	α_5;	β_1,	β_2,	β_3,	β_4,	β_5;	γ_1,	γ_2,	γ_3,	γ_4,	γ_5;	δ_1,	δ_2,	δ_3,	δ_4,	δ_5.
0,	2,	1;	1,	1,	1,	4,	2;	1,	2,	1,	4,	3;	2,	4,	3,	5,	4.

Es ist

$$x_5^2 x_6 = \beta_1 x_6^2 + \gamma_1 x_5 x_6 + \delta_1 x_6 = x_5 \cdot x_{11}.$$

$$x_5^2 x_{11} = \beta_1 x_6 x_{11} + \gamma_1 x_5 x_{11} + \delta_1 x_{11} = \beta_2 x_5 x_6 + \gamma_2 x_5^2 + \delta_2 x_5$$

$$x_5 x_6 x_{11} = x_{11}^2 = \beta_2 x_6^2 + \gamma_2 x_5 x_6 + \delta_2 x_6$$

$$\beta_1\alpha_3 + \gamma_1 = 0, \quad \beta_1\beta_3 = \beta_2 - \delta_1, \quad \beta_1\gamma_3 = \gamma_2, \quad \beta_1\delta_3 = \delta_2$$

$$\alpha_4 = \beta_2\alpha_3 + \gamma_2, \quad \beta_4 = \beta_2\beta_3 + \delta_2, \quad \gamma_4 = \beta_2\gamma_3, \quad \delta_4 = \beta_2\delta_3$$

$$\beta_1\alpha_5 = \beta_2 - \delta_1, \quad \beta_1\beta_5 = \gamma_2\beta_1 - \gamma_1\beta_2, \quad \beta_1\gamma_5 = \delta_2 - \gamma_1\gamma_2, \quad \beta_1\delta_5 = \gamma_2\delta_1 - \gamma_1\delta_2.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$\gamma_2 = \beta_1\gamma_3\,,\quad \delta_2 = \beta_1\delta_3\,,\quad \gamma_1 = -\alpha_3\beta_1\,,\quad \delta_1 = -\beta_1\beta_3 + \beta_2\,;$

$\alpha_4 = \beta_2\alpha_3 + \beta_1\gamma_3\,,\quad \beta_4 = \beta_2\beta_3 + \beta_1\delta_3\,,\quad \gamma_4 = \beta_2\gamma_3\,,\quad \delta_4 = \beta_2\delta_3$

$\alpha_5 = \beta_3\,,\quad \beta_5 = \beta_1\gamma_3 + \alpha_3\beta_2\,,\quad \gamma_5 = \delta_3 - \alpha_3\beta_1\,,\quad \delta_5 = \gamma_3\delta_1 + \alpha_3\delta_2.$

$\alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_3, \delta_3$ können beliebig angenommen werden. Sie Sie enthalten 13 Constanten. Über drei können wir aber noch disponiren, so daß nur 10 übrig bleiben.

Durch Elimination von x_6, x_{11} ergiebt sich

III. $0 = x_5^4 - \gamma_1 x_5^3 + (\beta_1\beta_3 - 2\beta_2)x_5^2 - \beta_1^2\gamma_3 x_5 + \gamma_1\beta_2 x_5 + \beta_2^2 - \beta_1\beta_2\beta_3 + \beta_1^2\delta_3$

Die Discriminante ist vom 17 Grade und hat β_1 zum außerwesentlichen Factor.

Im Falle IV hat man

$x_7^2 = \alpha_1 x_8 + \beta_1 x_7 + \gamma_1\,,\quad x_7 x_8 = \alpha_2 x_8 + \beta_2 x_7 + \gamma_2\,,\quad x_8^2 = \alpha_3 x_8 + \beta_3 x_7 + \gamma_3$

$\alpha_1\,,\ \alpha_2\,,\ \alpha_3\,;\ \beta_1\,,\ \beta_2\,,\ \beta_3\,;\ \gamma_1\,,\ \gamma_2\,,\ \gamma_3.$

$2\,,\ 2\,,\ 2\,;\ 2\,,\ 2\,,\ 3\,;\ 4\,,\ 5\,,\ 5.$

Man kann aber, indem man für x_7 u x_8 setzt $x_7 - p_2$ u. $x_8 - l x_5 - q_2$, wo l eine Constante, p_2, q_2 Functionen vom zweiten Grade sind

$$\alpha_2 = 0\,,\quad \beta_2 = 0$$

machen, und behält noch zwei willkürliche Constanten.

Unter den x bestehen die Relationen

$\gamma_1 = -\alpha_1\alpha_3\,,\quad \gamma_2 = \alpha_1\beta_3\,,\quad \gamma_3 = -\beta_1\beta_3.$

Die Discriminante ist vom 14 Grade u. hat α_1 zum außerwesentlichen Factor

IV. $0 = x_7^3 - \beta_1 x_7^2 + \alpha_1\alpha_3 x_7 - \alpha_1^2\beta_3$

ist die Gleichung zwischen x_7 u. x_3. Sie enthält 13 Constanten; fünf derselben kann man mit Hülfe der in x_7 noch enthaltenen willkürlichen Constanten u. dadurch, daß man für x_3 eine lineare Function, für x_7 aber cx_7 setzt, vorgeschriebene Werte beilegen. Die Anzahl der willkürlichen Constanten ist also in diesem Falle 8.

Im Falle V sind die Gleichungen

$$x_5^2 = x_{10}\,, \quad x_5 x_{10} = \beta_1 x_5 + \gamma_1\,, \quad x_{10}^2 = \alpha_2 x_{10} + \beta_2 x_5 + \gamma_2$$
$$x_5^2 x_{10} = x_{10}^2 = \beta_1 x_5^2 + \gamma_1 x_5\,, \quad \alpha_2 = \beta_1\,, \quad \beta_2 = \gamma_1\,, \quad \gamma_2 = 0.$$

β_1 u. γ_1 können beliebig gewählt werden.

Die Gleichung zwischen x_5 u. x_3 ist

$$\text{V.} \qquad 0 = x_5^2 - \beta_1 x_5 - \gamma_1$$

wo β_1, γ_1 beliebige Functionen 3, 5ten Grades sind. Sie enthält 10 Constanten. 3 derselben können vorgeschriebene Werte annehmen, so daß nur 7 zurückbleiben. Die Discriminante ist vom 10. Grade.

Der Fall VI. führt auf Quadratwurzeln.

Zu $\rho = 4$ hat Weierstraß noch folgende Aufzeichnungen gemacht. Das x vor den Buchstaben bedeutet, daß die betreffende Function von dem bezeichneten Grade sein muß. Ferner findet sich die Bemerkung Weierstraß habe später gefunden, der Fall $\alpha = 0$ in $\rho = 4$ führe nicht auf $\rho = 4$.

Es folgt also für $\rho = 4$:

$$x_6^2 = a_1x_9 + b_1x_7 + c_1x_6 + d_1, \quad x_7^2 = a_2x_9 + b_2x_7 + c_2x_6 + d_2.$$
$$x_9^2 = a_3x_9 + b_3x_7 + c_3x_6 + d_3, \quad x_6x_7 = a_4x_9 + d_4$$
$$x_6x_9 = b_5x_7 + d_5 \qquad , \quad x_7x_9 = a_6x_9 + b_6x_7 + c_6x_6 + d_6,$$

daraus folgt

$$x_6^2x_7 = a_1(a_6x_9 + b_6x_9 + c_6x_6 + d_6) + b_1(a_2x_9 + \dots) + c_1(a_4x_9 + d_4) + d_1x_7.$$
$$x_6^2x_9 = a_1(a_3x_9 + \dots) + b_1(a_6x_9 + \dots) + c_1(b_5x_7 + d_5) + d_1x_9.$$
$$x_7^2x_9 = a_2(a_3x_9 + \dots) + b_2(a_6x_9 + \dots) + c_2(b_5x_7 + d_5) + d_2x_9.$$
$$x_7^2x_6 = a_2(b_5x_7 + d_5) + b_2(a_4x_9 + d_4) + c_2(a_1x_9 + \dots) + d_2x_6.$$
$$x_9^2x_6 = a_3(b_5x_7 + d_5) + b_3(a_4x_9 + d_4) + c_3(a_1x_9 + \dots) + d_3x_6.$$
$$x_9^2x_7 = a_3(a_6x_9 + \dots) + b_3(a_2x_9 + \dots) + c_3(a_4x_9 + d_4) + d_3x_7$$
$$x_6x_7x_6 = a_4(b_5x_7 + d_5) + d_4x_6$$
$$x_6x_9x_6 = b_5(a_4x_9 + d_4) + d_5x_6$$
$$x_6x_7x_7 = a_4(a_6x_9 + \dots) + d_4x_7$$
$$x_7x_9x_7 = a_6(a_6x_9 + \dots) + b_6(a_2x_9 + \dots) + c_6(a_4x_9 + d_4) + d_6x_7$$
$$x_6x_9x_9 = b_5(a_6x_9 + \dots) + d_5x_9$$
$$x_7x_9x_9 = a_6(a_3x_9 + \dots) + b_6(a_6x_9 + \dots) + c_6(b_5x_7 + d_5) + d_6x_9$$
$$x_6x_7x_9 = a_4(a_3x_9 + \dots) + d_4x_9 = b_5(a_2x_9 + \dots) + d_5x_7 =$$
$$= a_6(b_5x_7 + d_5) + b_6(a_4x_9 + d_4) + d_6x_6 + c_6(a_1x_9 + \dots)$$

1. $a_1a_6 + b_1a_2 + c_1a_4 = 0.$ 2. $a_1b_6 + b_1b_2 + d_1 = a_4b_5.$ 3. $a_1c_6 + b_1c_2 = d_4.$
4. $a_1d_6 + b_1d_2 + c_1d_4 = a_4d_5.$ 5. $a_1a_3 + b_1a_6 + d_1 = b_5a_4.$ 6 $a_1b_3 + b_1b_6 + c_1b_5 = 0.$
7. $a_1c_3 + b_1c_6 = d_5.$ 8. $a_1d_3 + b_1d_6 + c_1d_5 = b_5d_4.$ 9. $b_2a_4 + c_2a_1 = a_3a_6.$
10. $a_2b_5 + c_2b_1 = a_4b_6 + d_4.$ 11. $c_1c_2 + d_2 = a_4c_6$ 12. $a_2d_5 + b_2d_4 + c_2d_1 = a_4d_6$
13. $a_2a_3 + b_2a_6 + d_2 = a_6^2 + b_6a_2 + c_2a_4.$ 14. $a_2b_3 + c_2b_5 = a_6b_6 + d_6.$
15. $a_2c_3 + b_2c_6 = a_6c_6 + b_6c_2$ 16. $a_2d_3 + b_2d_6 + c_2d_5 = a_6d_6 + b_6d_2 + c_6d_4.$
17. $b_3a_4 + c_3a_1 = b_5a_6 + d_5.$ 18. $a_3b_5 + c_3b_1 = b_5b_6.$ 19. $c_3c_1 + d_3 = b_5c_6$

20. $a_3 d_5 + b_3 d_4 + c_3 d_1 = b_5 d_6$. 21. $a_2 b_3 + c_3 a_4 = b_6 a_6 + d_6$

22. $a_3 b_6 + b_3 b_2 + a_3 = a_6 b_3 + b_6^2 + c_6 b_5$, 23. $a_3 c_6 + b_3 c_2 = a_6 c_3 + b_6 c_6$.

24. $a_3 d_6 + b_3 d_2 + c_3 d_4 = a_6 d_3 + b_6 d_6 + c_6 d_5$. 25. $d_4 + a_3 a_4 = a_2 b_5 = a_4 b_6 + a_1 c_6$

26. $a_4 b_3 = b_2 b_5 + d_5 = a_6 b_5 + b_1 c_6$. 27. $a_4 c_3 = b_5 c_2 = c_1 c_6 + d_6$. 28. $a_4 d_3 = b_5 d_3 = a_6 d_5 + b_6 d_3 + c_6 a_1$

Man erhält aus diesen Gleichungen

(1) $a_1 a_6 + a_2 b_1 + a_4 c_1 = 0$. (6) $a_1 b_3 + b_1 b_6 + b_5 c_1 = 0$. (25) $a_1 c_6 - a_2 b_5 + a_4 b_6 = 0$.

(2) $a_4 b_5 - a_1 b_6 + b_1 b_2 = d_1$. (5) $a_1 b_5 - a_1 a_3 - b_1 a_6 = a_1$. (11) $d_2 = a_4 c_6 - c_1 c_2$

(19) $d_3 = b_5 c_6 - c_1 c_3$. (26) $d_5 = a_4 b_3 - b_2 b_5 = a_6 b_5 + b_1 c_6 - b_1 b_5 = a_4 b_3 + a_1 c_3 - a_6 b_5 = a_1 c_3 + b_1 c_6$. (17; 7)

(23; 3; 10) $a_4 = a_2 b_5 - a_3 a_4 = a_1 c_6 - a_3 a_4 + a_4 b_6 = a_1 c_6 + b_1 c_1 = a_2 b_5 + c_2 b_1 - a_4 b_6$

(27, 21) $d_6 = a_4 c_3 - c_1 c_6 = b_5 c_2 - c_1 c_6$; (21) $d_3 = b_3 a_2 + c_3 a_4 - b_6 a_6$.

(22) $d_3 = b_3 (a_6 - b_2) + b_6 (b_6 - a_3) + c_6 b_5$. (14) $d_6 = a_2 b_3 + c_2 b_5 - a_6 b_6$

(15) $d_2 = b_6 (a_6 - b_2) + a_2 (b_6 - a_3) + c_6 a_4$,

oder wenn man zusammenzieht.

(1) $a_1 a_6 + a_2 b_1 + a_4 c_1 = 0$. (6) $a_1 b_3 + b_1 b_6 + b_5 c_1 = 0$ (25) $a_1 c_6 - a_2 b_5 + a_4 b_6 = 0$

(9) $a_1 c_2 - a_4 (a_6 - b_2) = 0$ (17, 26) $a_1 c_3 - b_5 (a_6 - b_2) = 0$

(25) $a_1 (a_3 - b_6) - b_1 (b_2 - a_6) = 0$ (2, 7) $d_1 = a_4 b_5 - a_1 b_6 - b_1 b_2$

(11) $d_2 = a_4 c_6 - c_1 c_2$, (19) $d_3 = b_5 c_6 - c_1 c_3$, (23) $d_4 = a_2 b_5 - a_3 a_4$.

(26) $d_5 = a_4 b_3 - b_2 b_5$, (27) $d_6 = a_4 c_3 - c_1 c_6$)

(2, 1) $a_1 d_1 = a_4 (a_1 b_5 + c_1 b_1) + a_2 b_1^2 - a_1^2 a_3$.

(2, 5) $a_6 - b_2 = \varkappa a_1$, $b_6 - a_3 = \varkappa b_1$, (9) $c_2 = \varkappa a_4$

$a_6 = b_2 + \varkappa a_1$ $c_2 = \varkappa b_5$, $b_6 = a_3 + \varkappa b_1$

(1) $-a_1 b_2 = a_2 b_1 + c_1 a_4 + a_1^2 \varkappa$, (6) $a_1 b_3 = -a_3 b_1 - c_1 b_5 - b_1^2 \varkappa$

(25) $a_1 c_6 = a_2 b_5 - a_3 a_4 - b_1 a_4 \varkappa$, (1) $a_1^2 b_6 + a_1 b_1 b_2 = -c_2 b_1^2 - c_1 b_1 a_4 + a_1^2 a_3$

(25) $a_1 (c_6 - c_1 \varkappa) = a_2 b_5 - a_3 a_4 - \varkappa (b_1 a_4 + a_1 c_1)$ (11) $d_2 = a_4 (c_6 - c_1 \varkappa)$

(19) $d_3 = b_5 (c_6 - c_1 \varkappa)$, (23) $d_4 = a_2 b_5 - a_3 a_4$. (2, 5, 11) $a_1 d_2 = a_4 (a_1 c_6 - c_1 (a_6 - b_2))$

(19, 17, 26) $a_1 d_3 = b_5 (a_1 c_6 - c_1 (a_6 - b_2))$.

$$y^2 = az + by + c, \quad yz = a_1 z + b_1 y + c_1.$$

I $\quad y = x_5, \quad z = x_4, \quad x = x_3$

$a = Ax + A_1, \quad b = Bx + B_1, \quad c = Cx^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3.$

$a_1 = A'x + A_1', \quad b_1 = B'x^2 + B_1'x + B_2', \quad c_1 = C'x^4 + C_1'x^3 + C_2'x^2 + C_3'x + C_4'$

A u. C' sind nicht Null.

II. $\quad y = x_4, \quad z = x_8, \quad x = x_3.$

$a = A_1, \quad b = Bx + B_1, \quad c = C_1x^2 + C_2x + C_3$

$a_1 = A'x + A_1', \quad b_1 = B'x^2 + B_1'x + B_2', \quad c_1 = C_1'x^4 + C_1'x^3 + C_2'x^2 + C_4'.$

A_1 u. C' sind nicht Null.

$\eta = y + \alpha, \quad \zeta = z + \beta y + \gamma$, also $y = \eta - \alpha, \quad z = \zeta - \beta\eta + \alpha\beta - \gamma.$

$$\eta^2 = az + (b + 2\alpha)y + c + \alpha^2$$

$$\eta\zeta = yz + \beta y^2 + \alpha z + (\alpha\beta + \gamma)y + \alpha\gamma.$$

$$\eta^2 = a\zeta + (b - a\beta + 2\alpha)\eta + c'$$

$$\eta\zeta = (a_1 + a\beta + \alpha)z + (b_1 + b\beta + \alpha\beta + \gamma)y + c_1 + c\beta + \alpha\gamma$$

$$= (a_1 + a\beta + \alpha)\zeta + (b_1 + (b - a_1)\beta - a\beta^2 + \gamma)\eta + c_1'$$

$a_1 + a\beta + \alpha = 0, \quad b_1 + (b - a_1)\beta - a\beta^2 + \gamma = 0, \quad b - a\beta + 2\alpha = b'$

$b - 2a_1 - 3a\beta = b', \quad \alpha = -a_1 - a\beta = -a_1 - \frac{b - a_1}{3} + \frac{b'}{3}, \quad \gamma = a\beta^2 - (b - a_1)\beta - b_1$

$$\eta^2 = a\zeta + b'\eta + c', \quad \eta\zeta = c_1'.$$

I, β, α, γ sind vom 0., 1., 2. Grade in x. II β, α, γ vom 1., 1., 2. Gr.

I. a, b', c' " " 1., 3., 4., " " II a, c', c_1', " 0, 2, 4. $-$ $b' = 0$.

$$\begin{array}{ll} \eta^2\zeta = b'c_1' + a\zeta^2 + c'\zeta = c_1'\eta \qquad & \eta^2 = a\zeta + b'\eta - aa' \\ a\zeta^2 = -c'\zeta + c_1'\eta - b'c_1' & \eta\zeta = aa'' \\ c' = -aa', \quad c_1' = aa'' & \zeta^2 = a'\zeta + a''\eta - b'a'' \end{array}$$

$$\eta^3 - b'\eta^2 + aa'\eta - a^2a'' = 0$$

I b', a, a', a'' sind vom 1, 1, 2, 3. Grade. II. a, a', a'' vom 0, 2, 4, $-$ $b' = 0$.

I. $a = x$, $b' = 0$, $a' = 3X_2$, $a'' = X_3$.

Es wird wieder y für η eingeführt.

$X_2 = \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3$. $\quad X_3 = x^3 + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x + \alpha_6$.

$$y^2 = xz + 3y - 3x X_2.$$
$$yz = x X_3.$$
$$z^2 = 3X_2 z + X_3 y - 3X_3.$$
$$y^3 - 3y^2 + 3x X_2 y - x^2 X_3 = 0.$$

I a) $a = x$, $b' = 0$, $a' = 3X_2$, $a'' = X_3$.

$$y^2 = xz - 3x X_2.$$
$$yz = x X_3.$$
$$z^2 = 3X_2 z + X_3 y.$$
$$y^3 + 3x X_2 y - x^2 X_3 = 0.$$

II. $a = 1$, $b' = 0$, $a' = 3X_2$, $a'' = X_4 = x^4 + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x + \alpha_6$.

$$y^2 = z - 3X_2$$
$$yz = X_4$$
$$z^2 = 3X_2 z + X_4 y$$
$$y^3 + 3X_2 y - X_4 = 0.$$

$\rho = 5$. Für $\rho = 5$ existirt im allgemeinen $x_5, x_7, x_8, x_9, x_{11}$. Durch diese 5 Functionen kann jede andere rationale Function von xy, die nur an der einen betrachteten Stelle unendlich wird, in der Weise ausgedrückt werden, daß x_7, x_8, x_9, x_{11} in der ersten Potenz vorkommen u. die Coefficienten ganze Functionen von x_5 sind.

Es wird

$x_7^2 = \alpha_1 x_{11} + \beta_1 x_9 + \gamma_1 x_8 + \delta_1 x_7 + \varepsilon_1$; $x_8^2 = \alpha_2 x_{11} + \cdots$

$x_9^2 = \alpha_3 x_{11} + \cdots$; $x_{11}^2 = \alpha_4 x_{11} + \cdots$; $x_7 x_8 = \alpha_5 x_{11} + \cdots$; $x_7 x_9 = \alpha_6 x_{11} + \cdots$

$x_8 x_9 = \alpha_8 x_{11} + \cdots$; $x_8 x_{11} = \alpha_9 x_{11} + \cdots$; $x_9 x_{11} = \alpha_{10} x_{11} + \cdots$; $x_7 x_{11} = \alpha_7 x_{11} + \cdots$

Die ganzen Functionen $\alpha, \beta, ..$ von x_5 haben die Grade

α_1	${}^\times\alpha_2$	α_3	α_4	α_5	${}^\times\alpha_6$	α_7	α_8	α_9	α_{10} ;	${}^\times\beta_1$,	β_2	β_3	β_4	β_5	
0	1	1	2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	
β_6	β_7	β_8	${}^\times\beta_9$	β_{10} ;	γ_1	γ_2	${}^\times\gamma_3$	γ_4	γ_5	γ_6	${}^\times\gamma_7$	γ_8	γ_9	γ_{10} ;	δ_1
1	1	1	2	1	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

δ_2	δ_3	${}^\times\delta_4$	δ_5	δ_6	δ_7	${}^\times\delta_8$	δ_9	δ_{10} ;	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	${}^\times\varepsilon_5$	ε_6	ε_7	ε_8	ε_9	${}^\times\varepsilon_{10}$.
1	2	3	1	1	2	2	2	2	2	3	3	4	3	3	3	3	3	4

Dadurch daß man statt x_7, x_8, x_9, x_{11} setzt

$\xi_7 = x_7 + p$, $\xi_8 = c_1 x_8 + l x_7 + q$, $\xi_9 = c x_9 + m x_8 + n x_7 + r$, $\xi_{11} = c x_{11} + g x_9 + h x_8 + k x_7 + u$

wo $c..$, l, m, n, g, h, k ; p, q, r ; u Functionen 0.; 1.; 2. Grades sind, kann man p, q, r so bestimmen, daß $\delta_5 = \gamma_5 = \delta_6 = \delta_7 = 0$ wird u. es bleiben dann noch 9 Constanten $c..$ k übrig.

Außerdem nehme man an, daß die beiden Constanten α_1 α_5 nicht gleichzeitig Null sind, denn dieses würde der Fall sein für $\rho = 6$, wenn $x_5\, x_7\, x_8\, x_9\, x_{10}$ existirten. Zwischen α, β, γ müssen folgende Gleichungen bestehen, welche sich aus

$x_8 x_7^2 = x_7 \cdot x_7 x_8$, $x_9 x_7^2 = x_7 \cdot x_7 x_9$, $x_{11} x_7^2 = x_7 \cdot x_7 x_{11}$

$x_8 \cdot x_7 x_9 = x_9 \cdot x_7 x_8$, $x_8 \cdot x_7 x_{11} = x_{11} \cdot x_7 x_8$, $x_9 \cdot x_7 x_{11} = x_{11} \cdot x_7 x_9$

ergeben.

(α) $\quad \alpha_1 \alpha_9 + \beta_1 \gamma_8 + \gamma_1 \alpha_2 = \alpha_5 \alpha_7 + \beta_5 \alpha_6 - \delta_1 \alpha_5$

$\quad \alpha_1 \alpha_{10} + \beta_1 \alpha_3 + \gamma_1 \alpha_8 = \alpha_6 \alpha_7 + (\beta_6 - \delta_1)\alpha_6 + \gamma_6 \alpha_5$

$\quad \alpha_1 \alpha_4 + \beta_1 \alpha_{10} + \gamma_1 \alpha_9 = \alpha_7(\alpha_1 - \delta_1) + \alpha_8 \beta_4 + \alpha_5 \gamma_7 - \varepsilon_1$

$$\alpha_5 \alpha_{10} - \alpha_6 \alpha_9 - \beta_6 \alpha_8 + \beta_5 \alpha_3 - \gamma_6 \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_5 \alpha_7 + \beta_5 \alpha_{10} - \alpha_7 \alpha_9 - \beta_7 \alpha_8 - \gamma_7 \alpha_2 = -\varepsilon_5$$

$$\alpha_6 \alpha_1 + (\beta_6 - \alpha_7)\alpha_{10} - \alpha_3 \beta_7 + \gamma_6 \alpha_9 - \gamma_7 \alpha_8 = -\varepsilon_6$$

(β).
$$\alpha_1 \beta_9 + \beta_1 \beta_8 + \gamma_1 \beta_2 = \alpha_5 \beta_7 + \beta_5 \beta_6 - \delta_1 \beta_5.$$

$$\alpha_1 \beta_{10} + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \beta_8 = \alpha_6 \beta_7 + (\beta_6 - \delta_1)\beta_6 + \gamma_6 \beta_5 - \varepsilon_1$$

$$\alpha_1 \beta_4 + \beta_1 \beta_{10} + \gamma_1 \beta_9 = \beta_7(\alpha_7 - \delta_1) + \beta_7 \beta_6 + \gamma_7 \beta_5$$

$$\alpha_5 \beta_{10} + \beta_9 \alpha_1 - \beta_6 \beta_8 + \beta_3 \beta_5 - \beta_2 \beta_6 = -\varepsilon_5$$

$$\alpha_5 \beta_4 + \beta_5 \beta_{10} - \alpha_7 \beta_9 - \beta_7 \beta_8 - \gamma_7 \beta_2 = 0$$

$$\alpha_6 \beta_4 + (\beta_6 - \alpha_7)\beta_{10} - \beta_3 \beta_7 + \beta_9 \gamma_6 - \beta_8 \gamma_2 = \varepsilon_7$$

(γ)
$$\alpha_1 \gamma_9 + \beta_1 \gamma_8 + \gamma_1 \gamma_2 = \alpha_5 \gamma_7 + \beta_5 \gamma_6 - \varepsilon_1$$

$$\alpha_1 \gamma_{10} + \beta_1 \gamma_3 + \gamma_1 \gamma_8 = \alpha_2 \gamma_7 + \gamma_6(\beta_6 - \delta_1)$$

$$\alpha_1 \gamma_4 + \beta_1 \gamma_{10} + \gamma_1 \gamma_9 = (\alpha_7 - \delta_1)\gamma_7 + \beta_7 \gamma_6$$

$$\alpha_5 \gamma_{10} - \alpha_6 \gamma_9 + \beta_6 \gamma_8 + \beta_5 \gamma_3 - \gamma_2 \gamma_6 = \varepsilon_6$$

$$\alpha_5 \gamma_4 + \beta_5 \gamma_{10} - \alpha_7 \gamma_9 - \beta_7 \gamma_8 - \gamma_2 \gamma_7 = \varepsilon_7$$

$$\alpha_6 \gamma_4 + (\beta_6 - \alpha_7)\gamma_{10} - \beta_7 \gamma_3 + \gamma_6 \gamma_9 - \gamma_7 \gamma_8 = 0.$$

(δ)
$$\alpha_1 \delta_9 + \beta_1 \delta_8 + \gamma_1 \delta_2 = \varepsilon_5; \quad \alpha_1 \delta_{10} + \beta_1 \delta_3 + \gamma_1 \delta_8 = \varepsilon_6$$

$$\alpha_1 \delta_4 + \beta_1 \delta_{10} + \gamma_1 \delta_9 = \varepsilon_7; \quad \alpha_5 \delta_4 + \beta_5 \delta_{10} - \alpha_7 \delta_9 - \beta_7 \delta_8 - \gamma_7 \delta_2 = 0$$

$$\alpha_5 \delta_{10} - \alpha_6 \delta_9 - \beta_6 \delta_8 + \beta_5 \delta_3 - \gamma_6 \delta_2 = 0; \quad \alpha_6 \delta_5 + (\beta_6 - \alpha_7)\delta_{10} - \beta_7 \delta_3 + \gamma_6 \delta_9 - \gamma_7 \delta_8 = 0$$

(ε)
$$\alpha_1 \varepsilon_9 + \beta_1 \varepsilon_8 + \gamma_1 \varepsilon_2 = \alpha_5 \varepsilon_7 + \beta_5 \varepsilon_6 - \delta_1 \varepsilon_5$$

$$\alpha_1 \varepsilon_{10} + \beta_1 \varepsilon_3 + \gamma_1 \varepsilon_8 = \alpha_6 \varepsilon_7 + (\beta_6 - \delta_1)\varepsilon_6 + \gamma_6 \varepsilon_5$$

$$\alpha_5 \varepsilon_{10} - \alpha_6 \varepsilon_9 - \beta_6 \varepsilon_8 + \beta_5 \varepsilon_3 - \gamma_6 \varepsilon_2 = 0$$

$$\alpha_5 \varepsilon_4 + \beta_5 \varepsilon_{10} - \alpha_7 \varepsilon_9 - \beta_7 \varepsilon_8 - \gamma_7 \varepsilon_2 = 0$$

$$\alpha_6 \varepsilon_4 + (\beta_6 - \alpha_7)\varepsilon_{10} - \beta_7 \varepsilon_3 + \gamma_6 \varepsilon_9 - \gamma_7 \varepsilon_8 = 0.$$

Alle die anderen Gleichungen, die man erhält, indem man $x_9 \cdot x_8 =$ $x_8 \cdot x_9$, u. s. w. setzt, sind nur eine Folge dieser 30 Gleichungen.

Diese Gleichungen sind linear in

II. $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_8, \alpha_9\ \alpha_{10};\ \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_8\ \beta_9\ \beta_{10};\ \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_8\ \gamma_9\ \gamma_{10};$
$\delta_2, \delta_3, \delta_4,\ \delta_8\ \delta_9\ \delta_{10};\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4,\ \varepsilon_8\ \varepsilon_9\ \varepsilon_{10}.$

Jedenfalls erhält man also diese 30 Functionen rational durch

$\alpha_1\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7, \beta_1 \beta_5 \beta_6 \beta_7, \gamma_1 \gamma_5 \gamma_6 \gamma_7, \delta_1\ \delta_5\ \delta_6\ \delta_7,\ \varepsilon_1\ \varepsilon_5\ \varepsilon_6\ \varepsilon_7.$

Es ist zu zeigen, daß man diese letzten Größen so wählen kann, daß die 30 ersten ganze Functionen von vorgeschriebenem Gr. werden.

Die Gleichungen sind in solcher Folge geschrieben, daß wenn man die Größen I als gegeben II als Unbekannte betrachtet, die ersten 6 Gleichungen nur $\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4\ \alpha_8 \alpha_9 \alpha_{10}$ die 6 folgenden $\beta_2 \beta_3 \beta_4 \ldots$ u. s. w. enthalten. Wenn man in den ersten 12 Gleichungen für

$\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7\ \alpha_8\ \alpha_9\ \alpha_{10},\ \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_{10}$

u. für die Größen I ganze Functionen von dem vorgeschriebenen Grad einsetzt, die Gleichungen dann nach Potenzen von α^5 ordnet u. die einzelnen Coefficienten 0 setzt, so enthält man 42 Gleichungen welche linear sind in den 43 Constanten die in

$\alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4\ \alpha_8\ \alpha_9\ \alpha_{10},\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4\ \beta_8\ \beta_9\ \beta_{10},\ \varepsilon_1\ \ \varepsilon_5\ \varepsilon_6\ \varepsilon_7$

enthalten sind. Diese Constanten kann man also rational durch eine derselben u. durch die Constanten

I.a) $\alpha_1 \alpha_5\ \alpha_6 \alpha_7,\ \beta_1\ \beta_5\ \beta_6\ \beta_7,\ \gamma_1\ \gamma_5\ \gamma_6\ \gamma_7,\ \delta_1\ \delta_5\ \delta_6\ \delta_7.$

Man erhält nun durch $x_8 \cdot x_7\, x_8 = x_7 \cdot x_8^2$ u. s. w.

$\varepsilon_2 = \alpha_5 \alpha_9 - \beta_5 \alpha_8 - \alpha_2 \alpha_7 - \beta_2 \alpha_6 - \gamma_2 \alpha_5 - \delta_2 \alpha_1$

$\varepsilon_3 = \alpha_6 \alpha_{10} + \beta_6 \alpha_3 + \gamma_6 \alpha_8 - \alpha_3 \alpha_7 - \beta_3 \alpha_6 - \gamma_3 \alpha_5 - \delta_3 \alpha_1$

$\varepsilon_4 = \alpha_7 \alpha_4 + \beta_7 \beta_{10} + \gamma_7 \alpha_9 - \alpha_4 \alpha_7 - \beta_4 \alpha_6 - \gamma_4 \alpha_5 - \delta_4 \alpha_1$

$\varepsilon_8 = \alpha_5 \alpha_{10} + \beta_5 \alpha_3 - \alpha_8 \alpha_7 - \beta_8 \alpha_6 - \gamma_8 \alpha_5 - \delta_8 \alpha_1$

$\varepsilon_9 = \alpha_5 \alpha_4 + \beta_5 \alpha_{10} - \alpha_9 \alpha_7 - \beta_9 \alpha_6 - \gamma_9 \alpha_5 - \delta_9 \alpha_1$

$\varepsilon_{10} = \alpha_6 \alpha_4 + \beta_6 \alpha_{10} - \alpha_{10} \alpha_7 - \beta_{10} \alpha_6 - \gamma_{10} \alpha_5 - \delta_{10} \alpha_1$

B

$\alpha_1\delta_2 = \alpha_8\beta_5 - \beta_2\alpha_6 - \alpha_2\alpha_7 - \alpha_5\gamma_2$

$\alpha_1\delta_3 = \alpha_6\alpha_{10} + \alpha_3\beta_6 + \alpha_8\gamma_6 - \alpha_3\alpha_7 - \alpha_6\beta_9 - \alpha_5\gamma_3$

$\alpha_1\delta_4 = \alpha_4\alpha_7 + \alpha_{10}\beta_7 + \alpha_9\gamma_7 - \alpha_4\alpha_7 - \beta_4\alpha_6 - \gamma_4\alpha_5 + \varepsilon_7$

$\alpha_1\delta_5 = \alpha_5\alpha_{10} + \beta_5\alpha_3 - \alpha_7\alpha_8 - \beta_8\alpha_6 - \gamma_8\alpha_5$

$\alpha_1\delta_9 = \alpha_5\alpha_4 + \beta_5\alpha_{10} - \alpha_7\alpha_9 - \beta_9\alpha_6 - \gamma_9\alpha_5$

$\alpha_1\delta_{10} = \alpha_4\alpha_6 + \beta_6\alpha_{10} - \alpha_7\alpha_{10} - \beta_{10}\alpha_6 - \alpha_5\gamma_{10} - \alpha_9\gamma_6$

C

$\beta_5\gamma_2 = \alpha_5\beta_9 + \beta_5\beta_8 - \alpha_2\beta_7 - \beta_2\beta_6 - \delta_2\beta_1$

$\beta_5\gamma_3 = \alpha_6\beta_{10} + \beta_3\beta_6 + \varepsilon_6 - \alpha_3\beta_7 - \beta_3\beta_6 - \delta_4\beta_1$

$\beta_5\gamma_4 = \alpha_3\beta_4 + \beta_7\beta_{10} + \gamma_7\beta_9 - \alpha_4\beta_7 - \beta_4\beta_6 - \delta_4\beta_1$

$\beta_5\gamma_8 = \alpha_5\beta_{10} + \beta_4\beta_5 + \varepsilon_5 - \alpha_8\beta_7 - \beta_6\beta_8 - \delta_8\beta_1$

$\beta_5\gamma_9 = \alpha_5\beta_4 + \beta_5\beta_{10} + \beta_6\beta_9 - \alpha_9\beta_7 - \delta_9\beta_1$

$\beta_5\gamma_{10} = \alpha_6\beta_4 + \beta_6\beta_{10} - \gamma_6\beta_9 - \alpha_{10}\beta_3 - \beta_1\beta_{10} - \delta_{10}\beta_1$

Also die Größen

$$\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{10}, \quad \delta_2 \ldots \delta_{10}, \quad \gamma_2 \ldots \gamma_{10}$$

ausgedrückt durch

$$\alpha_2 \ldots \alpha_{10}, \quad \beta_2 \ldots \beta_{10}$$

u. durch die Größen I. Dies sind die Lösungen der 18 übrigen Gleichungen (1).

Nun unterscheide man 2 Fälle. Wenn α_1 nicht $= 0$ ist, so kann man immer mit Hülfe der in x_7, x_8, x_9, x_{10} enthaltenen Constanten bewirken, daß $\alpha_5 = \gamma_1 = \alpha_7 = 0$ wird. Aus (B) ergeben sich

$$\delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_8, \delta_9, \delta_{10}$$

als ganze Functionen von vorgeschriebenem Grade, wenn man für

$$\alpha_2, \ldots \alpha_{10}, \beta_2, \ldots \beta_{10}$$

u. die Größen (1) solche einsetzt. Damit

$$\gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4\ \gamma_8\ \gamma_9\ \gamma_{10}$$

auch ganz seien müssen die Größen I a) so bestimmt werden, daß die linken Seiten der Gleichungen C durch β_5 teilbar werden. Dies giebt aber nur eine Bedingungsgleichung; denn wenn man in die Gleichungen (7) für die Größen (1) u. für γ_8 ganze Functionen von vorgeschriebenem Grade einsetzt, so ergeben sich $\gamma_4\ \gamma_2\ \gamma_7$ u. $(\alpha_4\beta_1^2 + (\beta_6 - \alpha_7)\beta_1 - \beta_7)\gamma_3$ auch als ganze Functionen. Folglich, da nach C die Größen γ nur β_5 im Nenner haben können, so sind auch $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_9, \gamma_{10}$ ganze

Functionen, sobald γ_1 u. die Grössen (1) es sind. Es muss also nur eine Bedingungsgleichung erfüllt werden.

Aus (A) u. (B) erhält man dann für

$$\varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_4\ \varepsilon_8\ \varepsilon_9\ \varepsilon_{10},\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4\ \delta_8\ \delta_9\ \delta_{10}$$

auch ganze Functionen.

In diesem Falle kann man also (1) befriedigen, indem man

$$\alpha_1, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7;\ \beta_1, \beta_5, \beta_6, \beta_7;\ \gamma_1, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7;\ \delta_1, \delta_5, \delta_6, \delta_7$$

als allgemeinste Functionen von vorgeschriebenem Grade annimmt. Sie enthalten 24 Constanten. 9 derselben kann man aber mit Hülfe der in $x_8\ x_9\ x_{11}$ noch enthaltenen Constanten beliebige Werte beilegen. Es bleiben dann nur noch 15 willkürliche Constanten.

Wenn $\alpha_1 = 0$, α_5 aber von 0 verschieden ist, so erhält man aus den Gleichungen (B) für $\beta_2 \dots \gamma_{10}$ ganze Functionen vom vorgeschriebenem Grade; aus (C) ergeben sich $\delta_2 \dots \delta_{10}$ als ganze Functionen, wenn eine Bedingungsgleichung zwischen den Constanten der Grössen II a) befriedigt wird. Es können also wieder die Functionen

$$\alpha_1\ \alpha_5\ \alpha_6\ \alpha_7;\ \beta_1\ \beta_5\ \beta_6\ \beta_7;\ \gamma_1\ \gamma_5\ \gamma_6\ \gamma_7$$

willkürlich angenommen werden.

muss also nur

indem man

E_2

Grade annimmt

aber mit Hülfe

beliebige Werte

liche Constanten

erhält man aus

von vorgeschrie-

Functionen,

Constanten bei

wieder die

Abel'sche

Functionen

II.