

Handschr.

N.F.

706

Aus der Bücherei von
Eugen Netto
(1846—1919)

Lehrbuch der Abulffian Functionen

Von Prof. Dr. J. Weierstraß

überarbeitet

MATHEMATISCHES KABINETT
DER UNIVERSITÄT GIESSEN

758

Winter 1869.

Eugen Netto

Faint handwritten text at the top of the page.

Faint handwritten text in the upper middle section.



Faint printed text, likely a title or header, centered on the page.

Faint handwritten text at the bottom left of the page.

Fragment of handwritten text visible on the right edge of the page.

Y. Theorie der abelschen Functionen.

1. Leitungen.

(28. u. 69)

Es sei $R(x)$ eine ganze Function 3. oder 4. Grades von x ,
 dann kann man eine L. $\psi(x)$ finden, welche die Leitung

$$d\psi(x) = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

gibt. Der Werth von ψ muß für einen bestimmten Werth
 von x fest werden, daher das Zeichen der Wurzel. Lief. L. ψ
 ist für alle Werth von x , wo für $x = \infty$ definiert, bleibt fast unendlich und
 ist für jeden Werth von x unendlich viele Werthe. Ist jener Werth so fest,
 daß ψ für $x = x_0$ den Werth 0 annimmt, so ist

$$u = \psi(x) - \psi(x_0)$$

I.

Die unendlich vielen Werthe von u lassen sich mit $2\pi m$ zusammen, denn wenn
 u und $u + 2\pi m$ ist, sind Addition von $2\pi m$ ungetrennt sein.
 Es ableiten. Umgekehrt geht zu jedem Werth von u ein Werth
 von x , d. h. man läßt sich eine F. $f(u)$ bestimmen, daß

$$x = R'(f(u), f'(u)) = f(u),$$

II

wo R' eine rationale d. h. bedeutet. Sie aber entsprechende Periodicität
 erscheint also unter der Form

$$f(u + 2\pi m \omega + 2\pi n \omega') = f(u)$$

III

Zwischen $f(u + \omega)$, $f(u)$, $f(u)$ besteht eine Gleichung

$$f(u + \omega) = R''(f(u), f'(u), f(u), f'(u))$$

IV

Euler'sches Theorem für
Lull. 2. und 3. der Gattung.

Geht man allgemeinere an seinen Satz folgendermaßen:
Es möge $\Psi(x)$ irgend ein algebraisches Polynom sein, dann ist
$$\sum_{i=1}^n (\Psi(x_i) - \Psi(x_{i-1})) = \Psi(x_n) - \Psi(x_0) = R(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n) + C_1 \log R_1 + C_2 \log R_2 + \dots$$

wobei x der Wert von x gemäß der vorher gegebenen Abzählung
Abzählungssysteme bezieht sich auf Lull 2. und 3. der Gattung, das obige
auf solche von der Gattung.

Durch die Analogie dieses Gll. mit denen für $\log^2$ arc cos, betrachtet
das mehr Euler nach Legendre & abh. d. wiew. Das ist dann zuerst
Abel & Jacobi.

Die Folge der Euler'schen Formeln ist die Multiplikationsformel

$$x(\Psi(x) - \Psi(x_0)) = \Psi(x) - \Psi(x_0)$$

u. die Umkehrung derselben, die Zerlegungsvollen.

Man kann sich Abel's Untersuchungen so vorstellen, daß für ein
unbestimmtes x die Zerlegung dann möglich sei, wenn die entsprechende
Zerlegung des Faktors bekannt wäre.

Jacobi ging von dem Gedanken einer Formelierung des Legendre'schen
Transformationsproblems aus. Er suchte die Relationen zwischen R & R_1
zu bestimmen, damit:

$$\Psi(x) - \Psi(x_0) = \Psi_1(x) - \Psi_1(x_0),$$

sind sind die Zerlegungsvollen unter dem Log.

Abel'scher Satz.

Der Lindemann'sche Satz für alle Untersuchungen lautet: Geht man
aus der Abel. so folgt, daß wenn $R(x)$ eine d. 2. oder 3. der
Gattung bezieht, so dann selbst d. Lull. von der Gattung gilt, nicht
unter folgender Form aufzuweisen.

$$d\Psi_1(x) = \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$d\Psi_2(x) = \frac{x dx}{\sqrt{R(x)}},$$

$$d\Psi_3(x) = \frac{x^2 dx}{\sqrt{R(x)}},$$

VI

Akt wurde sein Geistesvermögen 1828 der Pariser Akademie ein.
Es blieb aber unbekannt, ob die Wissenschaften irgend etwas von ihm wissen.
Seine letzten Tage waren sehr ruhig. Er starb am 1. März 1828.
Seine letzten Worte waren: "Ich bin glücklich, dass ich die Wissenschaften
kann." Seine letzten Worte waren: "Ich bin glücklich, dass ich die Wissenschaften
kann."

Jacobi's Untersuchungen
Problem.

Die folgenden mögen die ersten Schritte der Untersuchung des Problems
die Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ... p bezeichnen. Man lässt die Zahlen der
Reihe 1, 2, 3, ... p bezeichnen. Man lässt die Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ... p
bezeichnen. Man lässt die Zahlen der Reihe 1, 2, 3, ... p bezeichnen.

$$u_p = \sum_{\alpha} G_p(x, y_{\alpha}) dx_{\alpha}.$$

XII

Es sollen die x als z der u dargestellt werden, z ganz sollen
den Massen $u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0$ die Masse von

$$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_p, b_p$$

entfernen. Wir wissen nun

$$u_p = \sum_{\alpha} [\psi_p(x, y_{\alpha}) - \psi_p(a, b_{\alpha})].$$

Deren lässt sich zeigen, dass für u unterhalb gewisser Grenzen $g, g_1, \dots, g_p$
sämmliche x und y sich als z der u entwickeln lassen, in dem
Fall. Dieser Fall kommt nur vor, wenn u eine Funktion von z ist, so dass die
 x eindeutig definiert sind. Wir haben oben angegeben, lässt sich das
Definitum auf über die Grenzen g hinaus bis zu jedem beliebigen
ausgehen. Man muss jedoch die Abhängigkeit zwischen x und y beachten. Die
Folgerung, dass die x bestimmt werden soll, kann man aber, die u von

$$x^p + \frac{F_1}{F_0} x^{p-1} + \frac{F_2}{F_0} x^{p-2} + \dots + \frac{F_p}{F_0} = 0$$

XIII

wobei die F ganze x der x sind. Diese sind aber als z der u
ausgedrückt, muss unterhalb der g vorausgesetzt. Wir wissen nun
nicht, ob die u von z abhängen oder nicht.

$$u_p = n \sum_{\alpha} [\psi_p(x, y_{\alpha}) - \psi_p(a, b_{\alpha})] = \sum_{\alpha} [\psi_p(x, y_{\alpha}) - \psi_p(a, b_{\alpha})]$$

Setzt man also in XIII die u für x, y_{α} ein, so kann man x be-
stimmen. Es fragt sich nun, ob die u von z abhängen oder nicht.

$$f(x, y) = 0; \quad f_p(x, y, \dots, x, y) = 0; \quad F = \frac{P}{Q};$$

so werden diese 2g+1 Gl. zwischen 2g Unbekannten eine Gl. zwischen
 F u. den Ableitungen $f_p, f_{pp}, \dots, f_{pp}$ geben. Wenn wir zeigen, dass die
 2g Gl., welche noch erfüllt sein müssen:

$$F = x_1^s + x_2^s + \dots + x_g^s = 0,$$

wird befriedigt werden. eliminieren wir mit den 2g ersten Gl. die
 y u. x, bei x, so wird

$$L(x, f_p, f_{pp}, \dots, f_{pp}) = 0.$$

zerlegen wir L in jenes Factor, so wird eines derselben mit F eine
 Anzahl gemeinsamer Factoren, welche identisch; die Gl. F u. L sind also ident.
 Es ist, u. wir können die Loeff von F rational durch die p. ausdrücken,
 folglich sind alle symmetrische fct der p. von x, y, also sind F. Wir haben
 daher die Gl.

$$F(p; p, p, \dots, p) = 0.$$

XIV.

Somit eine solche F. ist die allgemeine Abh. F. definiert. (7.5)
 Sind, welche mit Hilfe der allgem. O. gegeben wird, ist die Lösungsaufgabe der
 Auflösung.

$$\text{Es sei eine solche abh. F. } F(u, \dots, u) = L(x, y, \dots, x, y),$$

$$\text{wobei: } u = \sum (\psi_p(x, y) - \psi_p(a, b)),$$

$$x^s + P_1 x^{s-1} + \dots + P_g = 0; \quad Q_1 x^s + Q_2 x^{s-1} + \dots + Q_g = y.$$

Die P. haben den Grad von F, während die Q. algebraisch zusammenge-
 setzt sind. Die Ableitungen von F sind gleichmäßig; es besteht
 zwischen ihnen u. F eine alg. Gl., so lassen sich alg. durch die
 P. u. Q. ausdrücken.

Es sei daher dieser Eigenschaften ist das Additionstheorem. Dann sind

Additionstheorem.

$$u_p = \sum (\psi_p(x, y) - \psi_p(a, b)); \quad v_p = \sum (\psi_p(x', y') - \psi_p(a', b'));$$

$$u_p + v_p = \sum (\psi_p(x'' y'') - \psi_p(a'', b''));$$

Aus dem Abelschen Theorem folgt dann

$$x_1^{n_1} + P_1 x_2^{n_2} + \dots + P_r x_r^{n_r} = 0 \quad y_1^n = Q_1 x_1^{n_1} + \dots + Q_r x_r^{n_r}$$

$$\text{es ist} \quad S(x_1^{n_1}, \dots, x_r^{n_r}) = P(u_1, u_2, \dots, u_r, v_1)$$

$$\text{oder} \quad \sum (\psi_i(x_i, y_i) + \psi_i(x_i', y_i')) = \sum \psi_i(u_i, v_i) + \sum \psi_i(x_i', y_i')$$

so sind die P_i & Q_i rational & symmetrisch auf den x_i & y_i folglich
auch auf den P_i & Q_i in $P(u)$ & $Q(v)$; die P_i & Q_i setzen aber auch auf constanten Platz

$S(x_1^{n_1}, \dots, x_r^{n_r})$ zusammen; folglich ist

$$S(P(u), \dots, P_r(u), v_1) = S(x_1^{n_1}, \dots, x_r^{n_r}) = \text{Rat}(P_1, Q_1, \dots, P_r, Q_r, \dots) \\ = \text{Rat}(P(u), P_1, \dots, P_r; P(v), P_1', \dots, P_r')$$

Dieses Abelsche Theorem ist also die Grundlage von S mit p Variabeln.
ausgewiesen, die ebenfalls eindeutig sind & ein Additionstheorem be-
sitzen. Folglich besitzt gewissermaßen S selbst & seine p partiellen Ab-
leitungen eine algel. Gl. Alle signifikanten Locus S sind in dem
Additionstheorem begründet.

Wir fügen zum Theoreme hier einen Satz an, der eigentlich in
der Entwicklung des Abelschen S selbst seinen Platz finden müßte,
doch aber der Genauigkeit der Deductionen wegen weichen, & deshalb
nicht eingebracht werden mag. für die Locus.

Geht es für n auf so kleinen Locus ein Addit. Theor. für eine S
mit mehreren Variabeln, & ist sie einmuthig dastehen als einlei-
tiges S mit dem S einer var. S definiert, so gelten die er-
weiterten signifikanten für jedes andere Gebiet.

Ist eine S einer Variabel in der Umgebung der p a den S ein
var. S so heißt dies, sie heißt sich als Quotient zweier auf S von x a
fortschreitenden Rassen darstellen. Eine S mehreren Var. $x_1, x_2, \dots, x_p$ soll
in der Umgebung der p a, $q, \dots, q_p$ dann den S einer var. S haben,
wenn sie sich ebenfalls als Quotient zweier auf S von $(x_1, x_2, \dots, x_p)$

vorstehenden Reihen unterhalb steht. Hierbei ist ein Unteroffizier
zu setzen der d. einer oder mehreren W. zu bezeichnen, wenn bei
den letzteren Zeichen u. Namen vorzufinden, so werden dieselben
unbestimmt, die anderen nicht.

$$P = \frac{D}{Q}$$

sei eine solche d. deren Ableitung dann wieder von derselben
Lagepunkt ist. Nach dem Ord. folgt eine

$$P(u_1, u_2, \dots, u_r, u_s) = \frac{G(D, Q, P, Q, \dots, P, Q, P, Q, \dots)}{G(D, Q, P, Q, \dots, P, Q, P, Q, \dots)}$$

Es wird folgt gezeigt, dass die folgenden Abl. von P sich lösen
P selbst u. die anderen Abl. mit einander lassen. Jetzt setzen wir
für $u_1, \frac{1}{2}$ für $u_2, \frac{1}{2} + s$ u. ist es für die anderen u. so mit der L.
Beyung dass $|t| < g$ u. s. beliebig klein gemacht werden kann. Es
wird also ein nach beiden Seiten auf zu u. s. so müssen die L.
des niedrigsten zu übereinstimmen. Ist H. der L. des niedrigsten
zu von G, H. Beyung der niedrigsten von G' so ist

$$P(t_1, \dots, t_r) = \frac{H}{H'}$$

Die H. selbst converg. aber für $|t_1| < g$ also ist die Lösung. Gebet
Beyung auf der D. zu erwarten. Die geringste kleine D.
von t müß $\frac{H}{H'} = G$ sein; entwickelt man so stellt man

$$H G' - G H' = 0$$

identisch sein müß, dass also P mit Q übereinstimmt u. es lassen
Sich zeigen zeigen ist.

Es läßt sich also P als Quotient 2er beständig convergenter
Reihen entwickeln. Unmittelbar läßt sich dies hier noch nicht be-
weisen, das soll der Beweis geführt werden.

Nach diesen Rügen überblicke gehen wir zur Frage
des obigen H. über, ob müß der eigentlichen Unteroffizier

jeder ein algebraisches Zahlverhältnis werden, in dem nur die
notigen Verhältnisse die Größtverhältnisse gelöst werden soll nach
Lautet.

Es soll eine Lücke H gefunden werden, in der die Wv. Lösung d.
Gl. $f(x, y) = 0$ mit einander verbunden sind, und welche für $p + r$ ge-
gebenen Wv. p und r gegeben = 0 wird. r ist selbst nicht
positiv anzunehmen, wenn eine solche H bestehen soll.

myself
to myself

king
to myself
to all

a p

Opind

fell

maier

folle

glaf

triffo

da

li

Art

gar

lar

füge

(x/a)

elf

da

Hand

fol

o sel

Hand

af, in

in

Im letzten Falle können 3 wesentlich von einander verschiedene
Klassen entstehen.

$$1) \text{ Da } \frac{\partial f}{\partial y} = g_1 + 2g_2 v + \dots \geq 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial u} v + \dots = 0 \quad (\text{für } v=0)$$

$$\text{also } g_1 = c_{10} + c_{11} u + c_{12} v + \dots \quad g_2 = c_{21} u + c_{22} v + \dots$$

Dann sind die Glieder des niedrigsten Grades in $f(u, v)$ die folgenden

$$c_{01} u + c_{10} v + \text{Glieder höheren Grades} = 0$$

$$\text{Daher } v = \gamma_0 u + \gamma_1 u^2 + \gamma_2 u^3 + \dots$$

Im diesem Falle gehört zu einem Punkte von u ein einziger von
 v oder nicht zugehört. Der f ist also singulär in Beziehung auf y , nicht
auf x . Im Kräftefeld, in dem zu nicht singulären a , n Klassen von
ausgehenden b , m Klassen ausgehen sind beide Systeme von Klassen
Kraft gemindert, werden in diesem Falle die n von a ausgehenden
den Klassen zugeordnet sein, dagegen die m von b ausgehenden
 m in einem zusammenfallen.

$$2) \text{ Da } \frac{\partial f}{\partial y} = g_1 + 2g_2 v + \dots = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g_1}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial u} v + \dots \geq 0 \quad (\text{für } v=0)$$

$$\text{also } g_1 = c_{11} u + \dots; g_2 = c_{21} u + \dots; g_3 = c_{31} u + c_{32} v + \dots \quad g_4 = c_{41} u + c_{42} v + \dots$$

$$c_{11} u + c_{21} v + \dots \text{ Glieder höheren Grades} = 0$$

$$\text{Daher } v = \gamma_0 u^2 + \gamma_1 u^3 + \dots$$

Es gehört zu einem Punkte u , n Punkte von v ; im Kräftefeld fallen n
von a ausgehende Klassen zusammen.

$$3) \text{ Da } \frac{\partial f}{\partial x} = 0; \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (\text{für } v=0)$$

$$\text{und } \frac{\partial f}{\partial x} = c_{11} u + c_{21} v + \dots \text{ Glieder höheren Grades} = 0$$

$$\text{Dann ist } v = \gamma_0 u^2 + \gamma_1 u^3 + \dots$$

Und der f ist singulär in Beziehung auf x & y . Es fallen n von a
& n von b ausgehenden Klassen zusammen.

Wenn für einen nicht singulären f x eine Lösung befreit die
Lösung a gibt, so werden in der Umgebung dieses f die von a n

Wirden von y durchlaufenen Lücken keinen f mit einem anderen gemein
 haben. Die singulären f ist für 1) daselbst der Fall. Für andere aber für
 einen von y durch b beschriebenen Lücken 1 in a sich befinden; bei 2) befinden
 sich für $x=a$, a von f beschriebenen Lücken in b ; bei 3) findet sich daselbst gar
 nicht. Der Fall 1) beweisen wir also wenn y von x abhängig gemacht
 wird nicht als singulär angesehen.

Die singulären f lassen sich also in n verschiedenen Klassen y durch n
 verschiedenen Funktionen darstellen:

$$v_1 = f_1(u_1) \quad v_2 = f_2(u_2) \quad \dots$$

Die singulären f dagegen stellen sich die Darstellungen in Gruppen, so daß

$$v_1 = f_1(u_1, \frac{1}{2}u_1^2), \quad v_2 = f_2(u_2, \frac{1}{2}u_2^2), \quad \dots \quad v_n = f_n(u_n, \frac{1}{2}u_n^2, \dots)$$

$$v_1 = f_1(u_1, \frac{1}{2}u_1^2) \quad v_{2,1} = f_{2,1}(u_2, \frac{1}{2}u_2^2) \quad \dots$$

$$v_3 = f_3(u_3, \frac{1}{2}u_3^2) \quad v_{3,1} = f_{3,1}(u_3, \frac{1}{2}u_3^2, \dots)$$

Dieser Darstellung bleiben ungenutzt wenn man einführt:

$$u = c_0 t + c_1 t^2 + c_2 t^3 \dots \quad c_0 \neq 0 \quad \text{denn zu jedem Werte } t \text{ ein Wert von}$$

u gehört $\Rightarrow$ singulär.

Zu beweisen ist noch daß, mit Benutzung der singulären f die
 entsprechenden Lücken x und y in den kleinsten Teilen identisch sind. Es
 ist nämlich $v_1 - v = a(u-u) + b(u-u)^2 \dots$ $v_2 - v = a(u-u) + b(u-u)^2 \dots$;

also wenn man zu Grunde legt, $\frac{v_1 - v}{u - u} = \frac{u - u}{u - u}$; so wird für
 singuläre f $\frac{v_1 - v}{u - u} = (\frac{u - u}{u - u})^2$.

Dieser Darstellung ist zugleich der Ausdruck der einen Form (12.5)
 ab betrachteten Darstellungssysteme. Es sind das die, die
 die Entwicklung von v nach f von u zu anderen

Werten. Die letzten, ja auch die f singuläre oder nicht singuläre ist

1) die gegebene Darstellung ist genau in der Folge auf Weierstrass, und ist
 also nach dem Satz von Weierstrass, der hier schon angesetzt, daß man immer
 beibringt.

mit mehreren Größen oder mit einer einzigen. Sei zu einer Größe
gehörige Lücke ein cyclisches System, d. h. man gelangt durch Vertaus-
chen der p a mit einem Element der Größen in die andere. Alle fun-
ktionen, die sich durch Vertauschen der Größen in sich selbst überführen lassen, heißen
symmetrische Funktionen. Die n Größen $x_1, x_2, \dots, x_n$ heißen die Argumente der Funktion.

Die jetzt folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit der Darstellung
symmetrischer Funktionen von $x_1, x_2, \dots, x_n$, wobei diese Größen durch $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ mit ein-
ander verbunden sind.

Sei zunächst der Grad von $f = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ bestimmt; d. h. die Anzahl
der Potenzen von $x_1, x_2, \dots, x_n$, welche in der Gleichung für ein nichttriviales
gegebenes f vorkommen. Man versteht hierbei unter der gemeinsamen
Wasserkante, daß die Funktion $[f - P(x_1, x_2, \dots, x_n)] \dots [f - P(x_1, x_2, \dots, x_n)] = R(x) = 0$
bestimmt wird, wenn die $y_1, \dots, y_n$ die n Wurzeln von f bezeichnen, und
sich mit der Gl. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ als x gegeben ergeben, so daß R versch.
und in x n ist. Setzt man den Namen fort und erfüllt eine Gl.
von h. h. Grad, so ist $P(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ selbst von h. h. Grad. Man
sei zunächst R unzerlegbar in n n Faktoren. Man
so erfüllt man für einen gegebenen Wert f , g verschiedenen Werten
 x_1 , zu diesen einzelnen x gegeben aber je n Werten $y_1, y_2, \dots, y_n$. Die
in allgemeinen verschiedenen sind, stehen in allgemeiner $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$
 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ verschiedenen sein, d. h. f einen verschiedenen Wert
hat so findet man zu jedem x mit ein y . So gibt es also genau g W.
Funktionen, die den Gl. $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ u. $f = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ genügen. Ist aber R zer-
legbar, so betrachten wir einen seiner Primfaktoren $R_1(f - P(x_1, x_2, \dots, x_n))$
 $(f - P(x_1, x_2, \dots, x_n)) \dots (f - P(x_1, x_2, \dots, x_n)) = R_1(f - P(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$
so werden also die beiden Gl.

$$R_1(f - P(x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0 \quad \text{u.} \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$



für ein gegebenes x , y Punkte der y gemeinsam haben; die
 Irreduzibilität beider bewirkt daß sie sämtliche Punkte der y
 gemeinsam haben, d.h. die $P(xy)$ nehmen für die x vorst.
 Diese Punkte von y sind x Punkte an. Daraus folgt, daß

$$P_1(x) = P_2(x) = \dots \text{ da also } P(x) = P_1(x) \text{ so daß } kv = n.$$

Wir zeigen jetzt, daß dieser zweite Fall, in dem $P(x)$
 nicht verschwinden kann, sich durch eine einfache Transformations-
 annahme löst. [Man setze $x = \alpha x' + \beta y$ und nehme

dem Fall $f(xy)$, $f_1(x', y)$ so wird bei beliebigem α & β
 daß so verlangte $P(x')$ irreduzibel sein. [Dann da ja,

(wie aus der Algebra bekannt ist) $P(xy) = P(x', y)$ nur
 dann sein kann, wenn die Determinante von $P(xy)$
 gleich 0 ist, d.h. $\prod_{i=1}^n (P(xy) - P(x', y)) = 0$. Dann gesetzt

so ist wegen der Transformation $x = x' + ky$ so würde
 auch $P(xy) = P(x', y)$ folgen $P(x' + ky, y) = P(x' + ky, y)$;

ist also $P(x' + ky, y) = Q(x', y)$ so würde $Q(x', y) = Q(x', y)$
 so weil also $P(x' + ky, y) = P(x' + ky, y)$ bedeutet $P(x' + ky, y)$

gibt man die Entwicklung nach k : $\sum (ky)^i P(x', y) = \sum (ky)^i P(x', y)$
 so daß $\sum k^i (y_i - y_i^2) P(x', y) = 0$ die nicht identisch erfüllte

Bedingungsgleichung hierfür ist, daß zwei Punkte y einander
 gleich werden.

Die Gleichung in dieser Weise umgeformt, so kann
 jedes Glied von y durch lineare Gleichung mit dem entsprechenden
 Punkte für x transformiert werden.

Die folgende gemeinsame Untersuchung der Fälle $kv = n$ giebt es
 nicht. Sie dient zur Abklärung späterer Untersuchungen.

Wir können den Grad von P auf folgendenmaßen bestimmen:
 Wir setzen $(x/a) = q_1 t$, $(y/b) = q_2 t$ in der Annahme, daß a ein
 perfektes Quadrat ist. Setzen wir dies in

$$P(xy) = c_1 t^m + c_2 t^{m+1} + \dots = \xi$$

ein, so wird für hinreichend kleinen t die Reihe convergieren und
 $t = \left(\frac{\xi}{c_1}\right)^{\frac{1}{m}} + d\left(\frac{\xi}{c_1}\right)^{\frac{1}{m}+1} + \dots$

Es gilt also unterhalb bestimmter Grenzen für einen Werth ξ ,
 in der That, also eine Reihe von x und y . Sp. 9, 6. eine
 unendliche Reihe, so wird man mehrere solche Summen festsetzen
 sollen, die sich zu ξ addieren. Ist ξ gegeben, so ist $\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots$
 der Grad von $P(xy) = \xi$. Nachprüfen müßte sich hier, daß μ sich
 nicht ändert, wenn ξ hinreichend kleine Grenzen angenommen wird.
 Hierbei ist noch folgendes zu bemerken.[†]

Der Grad von $\xi = P(xy)$ würde als Grad der Funktion von
 $(\xi - P(x, y_1)) / (\xi - P(x, y_2)) \dots (\xi - P(x, y_n)) = \frac{\xi^n N_1 + \xi^{n-1} N_2 + \dots}{N}$
 definiert. Wenn man in allgemeinen für einen Werth von ξ
 eine Anzahl der Werthe von $x = q$ sein, und es ist hier $\xi = \infty$
 ist. Diesen Werthe kann genügt werden, wenn $x = \infty$; 2)
 wenn x ein Wurzelwert des Nenners ist. Ist es nun die Anzahl
 der Werthe von x nicht unendlich q , so kann sogar 0 werden. Dann ist
 der Grad von $\xi^n N_1, \xi^{n-1} N_2, \dots$ kleiner als derjenige von
 $\xi^n N$, so wird für $x = \infty, \xi = \infty$ der Limes nicht aufzuheben,
 der ξ^n von der n -ten Ordnung unendlich wird, dagegen $\xi^{n-1} N_2$
 höherer als der $n-1$ -ten Ordnung; also wird das erste Glied
 nicht eintreten, sobald ξ x gleichmäßig ∞ werden, d. h. es ist
 $\frac{\xi^n}{x^n}$ endlich bleibt. Betrachten wir ferner den Ausdruck $(x - q_1)$ den Nenner,
 der

[†] Der Nachfolgende zeigt N. nicht. Es zeigt die Beziehung des Teiles
 grade eines Grades.

befindet N in Grade $N \cdot \xi^{n-5}$ der Ziffer des Divisors $(x-a_1)^{\alpha_1}$ so wird
 $N \cdot \xi^{n-5}$ für $\xi=0, x=a_1$ wenn $(n-5+\alpha_1-\alpha_2)$ ten Grade 0 ; Ist dieser
Zähler $< n$, so kann, wenn derselbe für alle $x \neq a_1$ stattfindet der
Zähler auf für keinen Nenner aus der Null hervorgeht, da
zweite oben erwähnte Fall ist dann auf unmöglich und $\xi = P(x)$
kann überhaupt nicht 0 werden. Einige der folgenden Bedingungen
sind so oben angegeben. Derselbe sind zwar hinreichend aber
nicht notwendig in es möchte auf diesen Weg wohl nicht gelingen
die notwendigen Bedingungen abzuleiten. Jedenfalls ist aber
die Festsetzung von ξ notwendig, welche für keinen Wert von x
 0 werden.

Wir gehen jetzt zum Problem der Transformations an. In ganz
besonderem der eindeutigen Transformations über. Wir setzen
oben $\xi = P(x)$ gesetzt. Sei zu einem gegebenen ξ gegeben x mindes
aus einer Gl. g ten Grades $R(\xi, x) = 0$ gefunden die g Lösungen.
Nimmt, das man den Rest von g sucht, welcher zugleich $R(\xi, \xi = P(x, y))$
in $f(x, y) = 0$ befindet. Die beide Gl. stellt man eine Regel gemein
haben so man $y = G(\xi, x)$. Ist nun eine zweite Gl. $\eta = Q(x, y)/y$
gegeben, so verbindet man diese x, y stellt man ein Paar ξ, η auf.
Nimmt, damit auf der Umkehrseite der Fall sei, müssen die g
Werte von $x, y, \dots, x, y$, welche zu einem ξ gehören, in Q eingesetzt,
von einander verschieden η bestimmen, d. h. die Gleichung $Q - \eta = 0$
muss contradictibel sein. Selbst man nun mit jenen g Werten

*) rationale Functionen
2) $y_1 = G(\xi, x_1)$

$$(\eta - Q(x, y_1) / (\eta - Q(x, y_2)) \dots (\eta - Q(x, y_g)) = 0,$$

so kann man diese mit Hilfe von $y = G(\xi, x)$ die y eliminieren.

$$(\eta - Q_1(x, \xi) / (\eta - Q_2(x, \xi)) \dots (\eta - Q_g(x, \xi)) = 0$$

Diese sind die $x_1, \dots, x_g$ symmetrische Functionen also die Gestalt von

$$P(\xi, \eta) = 0$$

Sind $\xi = P(xy) \cdot \eta - Q(xy) \cdot \zeta$ und ist unzerlegbar wenn $Q \neq 0$ war. Umgekehrt ist Q unzer-
 legbar. Ist η ein 2. teiler ξ so ist ξ unzerlegbar, wenn $Q \neq 0$ ist. Der umgekehrte Satz war auch
 zu zeigen in Bezug auf $\xi = P(xy) \cdot \eta - Q(xy) \cdot \zeta$ so erhalten wir als Resultat folgendes:
 Ist $\xi = P(xy) \cdot \eta - Q(xy) \cdot \zeta$, so ist ξ unzerlegbar wenn Q unzerlegbar ist von den
 Faktoren g und g' , so lässt sich $\xi(xy)$ in $P(xy) \cdot \eta(xy)$ zerlegen. Ist ξ unzerlegbar
 bei η von g und g' so lässt sich ξ in $P(xy) \cdot \eta(xy)$ zerlegen. Jeder Faktor xy ent-
 hält nur ein ξ und ist unzerlegbar. Jeder ξ lässt sich in
 $\xi = P(xy) \cdot \eta - Q(xy) \cdot \zeta$ zerlegen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir zur Hauptaufgabe
 der unzerlegbaren Polynomfunktionen, nämlich zu der:

b) Es soll eine nat. L. von ξ gebildet werden, welche für eine
 gegebene Menge von ξ unzerlegbar oder nicht zerlegbar

angenommen man könnte ξ bilden, welche für einen ein-
 zigen ξ im faktoriellen ξ, η unzerlegbar würden, so würde ein
 Gegenstand folger ξ für von der gegebenen ξ nicht zerlegbar.
 Folgende können ξ in unzerlegbaren ξ zerlegt werden. Dies
 könnte aber dann bestätigt werden, wenn man zu dem
 Gegenstand eine zweite nat. L. gebildet ξ gebildet, welche
 für im faktoriellen ξ unzerlegbar würde. Aber die oben
 unzerlegbar angegebenen Lösungen können man so bestätigen
 dass die ξ man möglich wird für die unzerlegbaren
 Mengen aufgeführt. Es sind also zwei Fälle zu betrachten zu
 lösen. 1. ξ zu finden die für einen ξ im faktoriellen
 zerlegbar, 2. ξ zu finden die für keinen ξ im faktoriellen
 zerlegbar.

Die irreduzible Gl $f(x, y) = 0$ zerfallen $x^2 y$ sei so beschaffen daß zu dem Punkte $x = a$ die Nullen a nicht einander ausschließen. Also für $y = b_1, b_2, \dots, b_n$ zu y , a die Nullen a nicht einander ausschließen. Also $x = a_1, a_2, \dots, a_m$ gegeben. Ist die in der inoffiziell genutzten Gl nicht der Fall so setzt man $\xi = \frac{x-a}{y-b}$, $\eta = \frac{y-b}{y-b}$ wobei a, b so daß a & b nicht zu einander ausschließen nicht singuläre Punkte sind, a die Nullen a nicht einander ausschließen. Ist die inoffiziell genutzte Gl nicht der Fall so setzt man $\xi = \frac{x-a}{y-b}$, $\eta = \frac{y-b}{y-b}$ wobei a, b so daß a & b nicht zu einander ausschließen nicht singuläre Punkte sind, a die Nullen a nicht einander ausschließen.

Sei jetzt

$$f(x, y) = f_0(x) y^n + f_1(x) y^{n-1} + \dots + f_{n-1}(x) y + f_n(x) = 0 \quad I$$

so bilden wir

$$\begin{aligned} \frac{f(xz) - f(x, y_0)}{z - y_0} &= f_0(x) (z^{n-1} + z^{n-2} y_0 + \dots + y_0^{n-1}) \\ &+ f_1(x) (z^{n-2} + z^{n-3} y_0 + \dots + y_0^{n-2}) + \dots \\ &+ f_{n-1}(x) (z + y_0) + f_n(x) \\ &= f_0(xz) y_0^{n-1} + f_1(xz) y_0^{n-2} + f_2(xz) y_0^{n-3} + \dots + f_{n-1}(xz) \end{aligned}$$

wobei wir setzen

~~XXXXXXXXXX~~

$$\begin{aligned} f_0(xz) &= f_0(x) z + f_1(x) \\ f_1(xz) &= f_0(x) z^2 + f_1(x) z + f_2(x) \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} I \\ II \end{array} \right\}$

Die Entwicklung dieser Größen wird in der Folge ausschöpfend sein. Setzt man jetzt für z irgend einen der zu y gehörigen Werte von y ein, so wird

$$\frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} = f_0(x, y) y_0^{n-1} + f_1(x, y) y_0^{n-2} + \dots + f_{n-1}(x, y)$$

Die f_i sind für keinen anderen Wert x , da für $y = y_0$ der Wert $\left(\frac{f(x, y)}{y - y_0} \right)_{y=y_0}$ annimmt. Man erfüllt dieses nur x durch für den Wert $x = x_0, y = y_0$, den Wert x annimmt, wenn man bildet.

III.

Das man für x, y einen anderen Satz x geeigneten Wert

erfüllt. Die Lösung auf die ersten Teile der f von y sind immer
 bei endlich. Dann setzt man x, y beliebig in einem für x, y folgen
 Werten an, daß $f(x, y)$ nicht unendlich wird, so erfüllt man
 auch eine ganze f . n - ten Grades von y nach dem
 Lagrange'schen Interpolationsformel mit n Werten von y in
 den dazu geeigneten Werten der letzten Teile irgendwichtig be-
 stimmt ist. man stellt, daß $f(x, y), f(x, y), \dots$ nur für unendlich
 große Werte von x ~~unendlich~~ unendlich werden.

Wenn so die erste Selbstbestimmung gelöst ist, geben wir
 zur Lösung der zweiten über.

Es soll die allgemeine f von x, y bestimmt werden, die
 für keinen anderen Wert der Veränderlichen x wird
 Lösung ist

$$IV \quad F(x, y) = g_0(x) + g_1(x) f_1(x, y) + \dots + g_{n-1}(x) f_{n-1}(x, y).$$

Und die g ganze f . f erfüllt die F die gesamte Bedingung
 es fragt sich, ob die g auf gegebenen f sein können.

Setzt man in $F(x, y)$ für y die n Werte $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein, so erhält
 man n Gl. g , so wird

$$g(x) = \begin{vmatrix} f_1(x, y_1) & \dots & F(x, y_1) & \dots & f_{n-1}(x, y_1) \\ f_1(x, y_2) & \dots & F(x, y_2) & \dots & f_{n-1}(x, y_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ f_1(x, y_n) & \dots & F(x, y_n) & \dots & f_{n-1}(x, y_n) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} f_1(x, y_1) & \dots & f_{n-1}(x, y_1) \\ f_1(x, y_2) & \dots & f_{n-1}(x, y_2) \\ \vdots & & \vdots \\ f_1(x, y_n) & \dots & f_{n-1}(x, y_n) \end{vmatrix}$$

Es soll nun untersucht werden ob bei der angegebenen Lsg.
 Lösung die g existiert in der That kann Zerlegung der n in n hat
 andere so stellt sich, daß gemeinsame Faktoren herauskommen.

(29.3) Sätze bringen wir folgenden Satz.

Sind γ Reihen nach $\frac{1}{2}$ von $(x-c)^{\frac{1}{2}}$ gegeben

$$H_0 + H_1(x-c)^{\frac{1}{2}} + \dots + H_{r-1}(x-c)^{\frac{r-1}{2}} = F_0$$

$$H'_0 + H'_1(x-c)^{\frac{1}{2}} + \dots + H'_{r-1}(x-c)^{\frac{r-1}{2}} = F'_1$$

$$H^{(p-1)}_0 + H^{(p-1)}_1(x-c)^{\frac{1}{2}} + \dots + H^{(p-1)}_{r-1}(x-c)^{\frac{r-1}{2}} = F^{(p-1)}_1$$

gegeben, in denen ϵ_1 alle Potenzen von $\frac{1}{2}$ annehmen kann, so ist

$$\begin{vmatrix} F_0 & F_1 & \dots & F_{r-1} \\ F'_0 & F'_1 & \dots & F'_{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F^{(p-1)}_0 & F^{(p-1)}_1 & \dots & F^{(p-1)}_{r-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_0 & H_1 & \dots & H_{r-1} \\ H'_0 & H'_1 & \dots & H'_{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H^{(p-1)}_0 & H^{(p-1)}_1 & \dots & H^{(p-1)}_{r-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & (x-c)^{\frac{1}{2}} & \dots & (x-c)^{\frac{r-1}{2}} \\ 1 & (x-c)^{\frac{1}{2}} & \dots & (x-c)^{\frac{r-1}{2}} \epsilon^{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (x-c)^{\frac{1}{2}} \epsilon^{p-1} & \dots & (x-c)^{\frac{r-1}{2}} \epsilon^{(p-1)(r-1)} \end{vmatrix}$$
$$= (x-c)^{\frac{r-1}{2}} D^p$$

Da die im Nenner von γ vorkommende Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1(xy) & \dots & f_{n-1}(xy) \\ f_1'(xy) & \dots & f_{n-1}'(xy) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(p-1)}(xy) & \dots & f_{n-1}^{(p-1)}(xy) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{n-1} \\ y_2 & \dots & y_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n & \dots & y_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ f_1 & f_2 & \dots & f_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(p-1)} & f_2^{(p-1)} & \dots & f_{n-1}^{(p-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_1 & \dots & y_{n-1} \\ y_2 & \dots & y_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n & \dots & y_{n-1} \end{vmatrix} = \sqrt{A(x)} \quad \gamma$$

von $A(x)$ die Determinante der Gl. $f(xy) = 0$ ist, so sieht man dass sie aufgefunden werden für die singulären Punkte von γ . Da man solchen Stellen sich aber die Entwicklungen von γ in Größern $\frac{1}{2}$ nach $\frac{1}{2}$ von $(x-c)^{\frac{1}{2}}$, $(x-c)^{\frac{3}{2}}$, $(x-c)^{\frac{5}{2}}$ fortsetzen kann γ Größern von $\frac{1}{2}$ sind u die Anzahl der aufgefundenen Punkte $x_1, x_2, \dots, x_p$ ist. Man kann nun aber nach dem La Place'schen Determinanten Satz, die Determinante in Unterbesten. stellen, so dass die einzelnen vorkommenden Unterbest. die Bedingungen des 1. Satzes erfüllt. Daraus erkennt man, dass nicht der Det. in Locus $(x-c)^{\frac{x_1-1}{2}} + (x-c)^{\frac{x_2-1}{2}} + \dots + (x-c)^{\frac{x_p-1}{2}} = (x-c)^{\frac{x_1+x_2+\dots+x_p-1}{2}} = (x-c)^{\frac{n-1}{2}}$ verschwindet.

Da das selbe für jeden singulären Punkt stattfindet so erkennt man dass nicht der Det. der Locus

$$H_1(x-c)^{\frac{n-1}{2}}$$

gewand. Da die Discriminante aber nur nur für die singulären Werte von x verschwindet, so ist jener Name.

$$V(x) = C \cdot T_1(x-a)^{\frac{n-1}{2}} \cdot T_2(x-a)^{2\lambda}$$

wobei die α ganze Zahlen sind, die aber nicht 0 sein können. Der Zähler findet dieselbe Entwicklung statt; der Nenner der wegen Factoren nicht ebenfalls verschwindet, wiewohl jene ganz davon im allgemeinen ausgeschlossen ist. Kennt man also jenen Nenner Factor der in allen $\mathcal{F}$. von x & y verschieden, weil jener Zähler eine solche wichtige $\mathcal{F}$. war, den unzerleglichen, den anderen den unzerleglichen Factor so ist

$$A(x) = D_1(x) \cdot D_2(x)^2$$

und im Nenner der g können also auch Factoren des unzerleglichen Factors der Discriminante, d. h. Factoren von $D_2(x)$ vorkommen.

Kroncker hat zuerst diese Verhältnisse untersucht in seiner Abhandlung der Abhandlung angegeben, auch sind sie nicht unvollständig. Diese sowie die folgenden Nachforschungen zur Bestimmung der Anzahl der ganzen $\mathcal{F}$. welche nur für unendlich große Werte unendlich werden können von ihm, wenigstens da das unvollständig.

- (2. 6) Lassen wir aber in unserer Betrachtung fortfahren, nicht als nötig sein, um den Namen des unzerleglichen u. unzerleglichen Factors zu verstehen, $\mathcal{F}$ jedoch, davon Discriminante nur der unzerleglichen Factor enthält, so dass der unzerleglichen = 1 zu setzen ist. Große Anzahl ist eine absolute unvollständige Vorbereitung.

Da, wie sich zeigen wird, diese Aufgabe schwerlich vollständig sein $\mathcal{F}$ zu bestimmen, welche für bestimmte Distributionen

von y gewisse vorgegebene Werte annimmt, so stellen wir
 zunächst ein $\mathcal{L}$

$$G = g_0 + g_1 y + g_2 y^2 + \dots + g_n y^n$$

so, welche für die Werte

$$y_\lambda = \sum_{\alpha} c_{\alpha} (x-a)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \varepsilon_{\alpha}^{\lambda} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, v)$$

in die obig st. eingesetzt

$$= (x-a)^{-\frac{n}{\lambda}} + \text{Potenz m. posit. Expon.}$$

sind, dagegen für die anderen zum singulären Werte a gehörigen

$$= 0, + \text{Glieder m. posit. Expon.}$$

Man set also

$$\text{für } y = y_1, y_2, \dots, y_r; y_{r+1}, \dots, y_n$$

$$G = (x-a)^{-\frac{n}{\lambda}} ; \quad \sigma$$

oder man $\pi(z) = (z-y_1)(z-y_2)\dots(z-y_n) ; f'(x) = \frac{d}{dx}$

$f'(x y_m) = f_0(x) \pi'(y_m)$ so ist nach der Lagrange'schen Inter-

polationsformel

$$G = \sum_{\lambda} \frac{\pi(z)}{z-y_m} \frac{f_0(x) (x-a)^{-\frac{n}{\lambda}} \varepsilon_{\alpha}^{-\lambda m}}{f'(x y_m)} = g_0 + g_1 z + \dots + g_n z^n$$

Die Summe enthält nun nur $\lambda \leq v$ aufzuwickeln zu vermeiden, da
 für $y_{r+1}, \dots, y_n$ das zugehörige G verschwindet. Die $g_0, \dots, g_n$ sind
 fallen kann gebrochenen sein. Um dies nachzuweisen, betrachten
 wir den Coeff. g_1 von z^1 . Derselbe bildet in der einzelnen Summe

gleichem, abzulesen von denen in welchen $m > v$ ist, welche ja aus-
 schwinden, genau gleich wie das die g_n von z^n in den verschwinden
 Gliedern conjugiert sind, durch Summation verschwinden also die
 gebrochenen Brüche. Es genügt daher für unsere Zwecke,
 die Möglichkeit der G nachzuweisen zu sehen. Man sieht
 leicht, wie die Dinge sich gestalten, wenn G nach positiven z aus-
 fallen soll.

Mit Hilfe dieser G sind wir nun in der Lage st. festzustellen,

entwickeln für y_1 beginnend mit

$$\begin{aligned} y_1 &= A_1(x-a)^{-\frac{1}{2}} + A_2(x-a)^{-\frac{3}{2}} + \dots + A_{n-1}(x-a)^{-\frac{n-1}{2}} \\ y_2 &= A_1(x-a)^{-\frac{1}{2}} + A_2(x-a)^{-\frac{3}{2}} + \dots + A_{n-1}(x-a)^{-\frac{n-1}{2}} \\ &\vdots \\ y_n &= A_1(x-a)^{-\frac{1}{2}} + A_2(x-a)^{-\frac{3}{2}} + \dots + A_{n-1}(x-a)^{-\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

so für die anderen zu den n-1 anderen Größten gesuchten Ansatz

$$y_2, \dots, y_n, y_2, \dots, y_n, y_2, \dots, y_n, y_2, \dots, y_n$$

mit den entsprechenden conjugierten Ansätzen. Man beginnt mit $G_{x,2}$ die ist entwickelbar für die Größen $y_1, \dots, y_n$ den Ansatz $(x-a)^{-\frac{1}{2}}$ so sein conjugiertes nimmt, für die Größen der anderen Größten unentwickelbar. Dann ist

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= A_1 G_{1,1} + A_2 G_{1,2} + \dots + A_{n-1} G_{1,n-1} \\ &+ A_2 G_{2,1} + A_3 G_{2,2} + \dots + A_{n-1} G_{2,n-1} \\ &+ \dots + A_{n-1} G_{n-1,1} + A_n G_{n-1,2} + \dots + A_n G_{n-1,n-1} \end{aligned}$$

Die Entwicklung d. Auf diesen Fall kann man die allgemeine Aufgabe zu entwickeln, um d. Entwicklung, welche für die verschiedenen Entwicklungen der y vorausgesetzten Aufzählungsglieder besteht, da man die gesuchte d. Entwicklung von $(x-a)^{-\frac{1}{2}}$ entwickelbar gemacht ist, um allen vorausgesetzten Gliedern nachher folgen zu lassen, um zu bestimmen, wie zu bestimmen, die weiteren d. φ dann aber wieder mit denselben φ möglichem muss.

Willt man nun für die übrigen d. isulif Bedingungen, so besteht die nun aufzunehmenden Glieder zu den allen einfach folgen. Da ja ein Glied $A_1(x-a)^{-\frac{1}{2}}$ nach $x-c$ entwickelt nur gegeben sein gegeben kann.

(Gerade ist die geometrische Aufgabe gelöst, um Lösung zu finden, welche mit einer gegebenen in der singulären φ der, falls einen vorausgesetzten Lintert besteht.)

Der nun die oben (S. 23) betrachtete Substitutionsform von der
 Form $\Pi(\xi_1, \xi_2)$ ist, so betrachte man die Funktionen der ξ
 für $x=a$: $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ ungerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)

so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)

so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)

so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)

so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)

so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)

so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)

so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)

so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)
 so setzen wir $\xi_1 = C_1 + C_1'(x-a)^{\frac{1}{2}}, \dots$ (wenn die Wurzel von ξ gerade)

Conformanten ergebbar. Dief Augoff ift als gleich dem Grad der Pers.
 Substanz $N_1 N_2 \dots N_n$. Nun ift

$$\begin{vmatrix} 1 & G_1(xy) & \dots & G_n(xy) \\ 1 & G_2(xy) & \dots & G_n(xy) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & G_n(xy) & \dots & G_n(xy) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & f_1(xy) & \dots & f_n(xy) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & f_n(xy) & \dots & f_n(xy) \end{vmatrix} : N_1 N_2 \dots N_n$$

$$= \frac{V \Delta x}{N_1 N_2 \dots N_n}$$

Setzt man nun die Pers von $F(xy)$ oben auf den letzten Fact. Multi-
 plicirt zu nehmen so erhält

$$F(xy) = h_0^{(2)} + h_1^{(2)} G_1 + h_2^{(2)} G_2 + \dots + h_n^{(2)} G_n$$

so wird die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & F_1(xy) & \dots & F_n(xy) \\ 1 & F_2(xy) & \dots & F_n(xy) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & F_n(xy) & \dots & F_n(xy) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ h_0' & h_1' & \dots & h_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_0^{(n-1)} & h_1^{(n-1)} & \dots & h_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & G_1(xy) & \dots & G_n(xy) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & G_n(xy) & \dots & G_n(xy) \end{vmatrix}$$

was wegen der Nulltheiligkeit der h der unendlich kleinen der
 Determinante nur von der zweiten Det. abhängen können; sie
 muß derselben also gleich sein, weil jede ganze Aff. eine Det. als
 Factor enthält. so folgt also daß dieselbe = D_1 also

$$\frac{V \Delta x}{N_1 N_2 \dots N_n} = V D_1$$

$$N_1 N_2 \dots N_n = D_2$$

Nun sei s der Grad von D_1 ; r der von D_2 ; der Grad der
 Determinante ift $2m(n-1)$ so daß

$$2r + s = 2m(n-1)$$

(s ift also stets eine gerade Zahl). D ift invariant

$$D = Z_1(n-g)$$

muß also singulär sein, oder überfüllt mit allen g der Form a .
 ferner, da für nicht singuläre $g = n$ wird. Das Resultat
 unserer Untersuchung ift also, daß alle Aff. die wir betr.

gesetzt werden können

$$= \sum_{\lambda=0}^n C_{\lambda} T_{\lambda}(xy) + \sum_{\lambda=0}^{n-1} k_{\lambda}(xy) f_{\lambda}(xy).$$

Von den Größen C_{λ} & k_{λ} bestimmen wir können, setzen wir

$$P(x, y) = P_0(x) + P_1(x)y + \dots + P_n(x)y^n + \sum_{\lambda=0}^n C_{\lambda} f_{\lambda}(xy, x, y)$$

$$P = \sum_{\lambda=0}^n f_{\lambda}(xy, x, y) = \sum_{\lambda=0}^n (a_{0,\lambda} + a_{1,\lambda}y + \dots + a_{n,\lambda}y^n) x^{\lambda} + \text{Glieder mit neg. Expon.}$$

Wenn man vorfallenden für x ordnet. Da für $x=0, y$ die Werte $b_1, b_2, \dots, b_n$ annimmt, so muß

$$a_{0,\lambda} + a_{1,\lambda}b_1 + a_{2,\lambda}b_1^2 + \dots + a_{n,\lambda}b_1^{n-1} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

also $a_{0,\lambda} = 0, a_{1,\lambda} = 0, \dots, a_{n,\lambda} = 0$ sein; d. h. $P_0, P_1, \dots, P_n$

dürfen keine positiven für x enthalten. Ordnen wir jetzt

$$P(x, y) = M_0 f_0(xy) + M_1 f_1(xy) + \dots + M_n f_n(xy)$$

so wird nach der Formel (T. 21. II)

$$P(x, y) = (M_0 f_0(x) + M_1 f_1(x) + \dots + M_n f_n(x)) \\ + (M_1 f_0(x) + M_2 f_1(x) + \dots + M_{n-1} f_{n-2}(x))y \\ + \dots$$

$$+ (M_{n-2} f_0(x) + M_{n-1} f_1(x))y^{n-2} + M_n f_0(x)y^{n-1}$$

Es folgt also wenn $f_0(x)$ von Null verschieden ist

$$M_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{f_0}, \quad M_{n-2} = \frac{P_{n-2} - M_{n-1}f_1}{f_0}, \dots$$

so daß M_{n-1}, M_{n-2} bei ihrer Entwicklung mit $\frac{1}{x^n}$ beginnen müssen, da f_0 von x nicht geteilt ist. Nur M_0 kann mit einer Leistung beginnen. Da aber in der obigen Formel die ganzen für x nur von den $k_{\lambda}(xy)$ her kommen, so muß jedes derartigen $\neq 0$ gesetzt werden, so daß

$$P(x, y) = \sum_{\lambda=0}^n C_{\lambda} f_{\lambda}(xy, x, y) + \sum_{\lambda=0}^{n-1} k_{\lambda}(xy) T_{\lambda}(xy) + C$$

Jetzt ist es uns noch nötig die C davon zu bestimmen, daß bei einer Entwicklung vorfallenden für x in neg. Expon. vorhanden.

Zur Entwicklung

$$K(xy) = M_0(x) + M_1(x)f_1(xy) + \dots + M_{n-1}(x)f_{n-1}(xy) + \sum f(xy, x, y)$$

zeigt sich, daß von $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ sämtlich f unabhängig sind.
 Sie müssen, die f als 0 zu setzen, 0 sein, also

$(n-1)$ Bedingungen auf f zu setzen genügen, $K=0$ konstant
 so muß also mindestens $k-p$ sein, wenn man setzt:

$$(k+1) = (n-1) - r = \frac{p}{2} - (n-1) = \frac{p}{2} - n + 1$$

p sei die der Rang der Gl. $f(xy)=0$. Das Rang zurück als
 die geringste Zahl von Ableitungen, die für die im vor. d. von
 x, y unabhängig werden muß.

Der, wie sich zeigen wird, der Fall $k > p$ auf den, $k+1=p$
 zurückgeführt werden kann, so behandeln wir diesen ein-
 forschend.

(12, 6) f ist

$$K(xy) - C = \sum_{\lambda=0}^p c_{\lambda} f(xy, x_{\lambda}, y_{\lambda}) + \sum_{\lambda=1}^n c_{\lambda} F_{\lambda}(xy);$$

wobei nun

$$f(xy, x_{\lambda}, y_{\lambda}) = -\frac{f_0(x_{\lambda})y_{\lambda}^{n-1}}{(x-x_{\lambda})f'(x_{\lambda})} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{f_{\nu}(x_{\lambda})y_{\lambda}^{n-\nu-1}}{(x-x_{\lambda})f'(x_{\lambda})},$$

und

$$F_{\lambda}(xy) = \sum_{\kappa=1}^{n-1} F_{\kappa}(x)f_{\kappa}(xy),$$

so set man nach folgendem f von x zu substituieren in die partiellen
 Gl. $= 0$ zu setzen. Das auf Spiel von $f(xy, x_{\lambda}, y_{\lambda})$ unabhängig ist für
 $x=x_{\lambda}$, was ist also nicht berücksichtigt zu werden, das gesamte gilt
 Gl. von der Form

$$-\frac{c_{\lambda}}{f'(x_{\lambda})} \frac{x_{\lambda}^{n-1} y_{\lambda}^{n-1-\nu}}{x^{\nu}} f_{\nu}(xy) \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1$$

und F_{λ} ergibt

$$F_{\lambda} x^{\nu} f_{\nu}(xy) \quad \nu = 1, 2, \dots, n-1$$

so muß also

$$-\sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{c_{\lambda} \cdot x_{\lambda}^{\mu-1} y_{\lambda}}{f'(x_{\lambda} y_{\lambda})} + \sum_{\lambda=1}^{\mu} c_{\lambda} T_{\lambda \mu} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1, 2, \dots, m-1 \\ \lambda = 1, 2, \dots, n-1 \end{array} \right\}$$

wir nennen das einfachste wegen $-\frac{x_{\lambda} y_{\lambda}^{\mu-1}}{f'(x_{\lambda} y_{\lambda})} = E_{\lambda \mu}$, so dass

$$\sum_{\lambda=0}^{\mu} E_{\lambda \mu} \cdot c_{\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{\mu} T_{\lambda \mu} c_{\lambda} = 0$$

zu erfassen zu diesem Gll. noch

$$\sum_{\lambda=0}^{\mu} c_{\lambda} f_{\lambda}(x_{\lambda}, y_{\lambda}) + \sum_{\lambda=1}^{\mu} T_{\lambda}(x_{\lambda}) c_{\lambda} = R(x_{\lambda})$$

so kann man mit diesen $(n-1)(m-1)+1$ Gll. die Größen c_{λ} eliminieren,

zu erfüllen R hat sich nicht entscheiden zu ermöglichen. Längst bestimmt.

Die Auflösung wäre aber unmöglich wenn sämtliche zu obigen

Glyen die $E_{\lambda \mu}$ + $T_{\lambda \mu}$ gehörigen n oder m Determinanten verschwinden.

Das ist aber nicht möglich. Dann müsste können nicht

simultane Null. $\sum_{\mu=1}^m T_{\mu 1} T_{\mu 2} \dots T_{\mu n} = 0$ werden. Dann kann

Null. würde man erfüllen, wenn man $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ setzt. Ist

würde dieses System dann aber nicht für die vorgeschriebenen Abh.

so ∞ werden, da diese erfordern dass $c_1, \dots, c_n$ von 0 verschieden sind. Aber

so wenig können alle mit dem Endgültigen Null. verschwinden. Dann

das würde bedeuten, dass $\sum_{\lambda} c_{\lambda} f_{\lambda}(x_{\lambda}, y_{\lambda})$ in Unendlichem Null. bleibt

Dann muss uns c_{λ} stark ungenügend, so wird jene Summe sehr

in Unendlichem ∞ werden, da $c_{\lambda+1}$ stark mehr als genug besondere

Bedingungen vorkommen, wenn es das ∞ werden in Unendlichem gar

stehen soll. Daraus folgt dass im Allgemeinen keine solche Null.

bestehen. verschwindet. Dann noch den Laplace'schen Satz können

wir sie in eine Summe von je zwei Produkten zerlegen, davon eine

Enden mit E da andere mit T erfüllt. In den letzten können

keine $x_{\lambda} y_{\lambda}$ vor, wir können die Abh. also als genug. Ist wenn $x_{\lambda} y_{\lambda}$

ausser bei denen die ersten $m-1$ + $n-1$ sind. (In im Mann

bestehen Abh. $f'(x_{\lambda} y_{\lambda})$ verschwinden in jedem Gliede zu erfüllen dieser fort.)

Dies. Ist. ist nun mit $f(x_{\lambda}) = 0$ einen stark genug, folglich alle

alle; das ist aber unmöglich da f vom Grade m in n ist. Darnach
kann die Det. nicht identisch verschwinden, da nicht identisch sind
die Sybilitäten Det. verschwinden. Also kann sie überhaupt nicht
verschwinden. Das System der E in F liefert also eindeutig

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$$

in dem $R(x, y)$

Dass wenn nun $x = P(\xi, \eta)$; $y = Q(\xi, \eta)$ so wird man die
Formeln eindeutig ist $\xi = P'(x, y)$; $\eta = Q'(x, y)$ sind

$$R(x, y) = R'(\xi, \eta)$$

Dass das vollkommenen Reciprocal der Gl. folgt dass für
 R' werden die Werte nach der Definition von ρ geändert sind.

Setzen wir R' die Werte m, n, r, s in m', n', r', s' also so ist

$$2(r-1) = s - 2n = s' - 2n'; \quad 2(n-n') = s - s'$$

Dass wenn $P(\xi, \eta) = y$; $Q(\xi, \eta) = x$

so wird $R(x, y) = R(y, x)$

in man sieht dass ρ unverändert bleibt wenn man in
 $f(x, y) = 0$ y als unabhängige Veränderliche ansieht. ρ hängt
also von der Gl. allein ab in wird der Grad derselben geändert.
In diesem Falle ist $s - s' = 2(n - m)$

(16,6) Das bisher angegebene Maß liefert sich ohne weiteres an-
fassende Herabsetzung sehr leicht abkürzen, inlassen gilt es
für die geordnete Aufzählung geeigneter Maßzahlen. Man
eine wurde hier angegeben.

Kronecker hat gefunden, dass jede Lf. $f(x, y) = 0$ sich so trennen
lassen lässt, dass sie in der Folge der ρ aufsteigenden
Lösungen der ρ und ρ' sind, dass die Det.
einander derselben L_1 in L_2 haben gemeinsamen Faktor

haben η also jener auf die Factoren von Δ zerfallen sind.
 Es wird das nunmehr läng die Transform.

$$\xi = \frac{x-a}{x-a} \quad \eta = c_1 F_1(xy) + \dots + c_r F_r(xy) \quad (\text{a Kreisung. Kraft})$$

Das Lemma dafür hat Kronecker nicht anerkennend, auf Weierstrass
 hat ihn nicht gegeben.

Substitution wie

$$\left(\frac{f'(x, y)}{(x-x_0)(y-y_0)} \right)_{x=x_0, y=y_0} = \frac{f'(x_0, y_0) - f'(x_0, y)}{(x-x_0)(y-y_0)} = \frac{f'(x_0, y_0)(y-y_0) - f'(x_0, y_0)(y-y_0)}{(x-x_0)(y-y_0)} = \frac{f'(x_0, y_0)(y-y_0)}{(x-x_0)(y-y_0)} = \frac{f'(x_0, y_0)}{(x-x_0)}$$

Da nun für die singulären Punkte f' verschwindet, f'' aber nicht, so wird
 wenn x_0, y_0 ein eigentümlicher singulärer Punkt ist

$$\left(\frac{f'(x, y)}{(x-x_0)(y-y_0)} \right)_{x=x_0, y=y_0} = \left(-\frac{(y-y_0)}{x-x_0} f''(x, y_0) \right)_{x=x_0, y=y_0}$$

wird $y=y_0$ oder anders bleiben, während dies für die wesentliche
 nicht stattfindet. Da ferner die r so erhalten ist linear unabhängig.
 y_0 von einander sind, so können wir für alle die $f_1, \dots, f_r$ von
 fassen; wir können daher wieder $f(x, y, x_0, y_0)$ einführen in diesem
 von dem Factor $f'(x, y)$ der Nenner abhängen (da ja 0 wird) - als
 die Substitution; aber ganz ist noch die bestmögliche lineare Abhängig-
 keit nachzuweisen. Angenommen, es wäre

$$\sum_{i=1}^r c_i f(x, y, a_i, b_i) - \sum_{i=1}^r f(x, a_i) \frac{b_i^{n-1}}{x-a_i} + \sum_{i=1}^r c_i f(x, y) \frac{b_i^{n-1}}{x-a_i} = 0$$

so würde dieser, nach y wenn $n-1$ der Gr. ist mit $f(x, y) = 0$ n Mal
 gemein haben. Dies ist unmöglich, daher $c_1 = c_2 = \dots = 0$.

Es wird dann der allgemeine Ausdruck für R

$$R(xy) = C = \sum_{\lambda=0}^n \frac{a_\lambda f(x, y) y_\lambda^{n-1}}{(x-x_\lambda)} + \sum_{\lambda=1}^r \frac{c_{\lambda+1} f(x, y) b_\lambda^{n-1}}{(x-a_\lambda)} + \sum_{\lambda=1}^r \left\{ \sum_{\lambda=0}^n \frac{a_\lambda y_\lambda^{n-1}}{x-x_\lambda} + \sum_{\lambda=1}^r \frac{c_{\lambda+1} b_\lambda^{n-1}}{x-a_\lambda} \right\} f(x, y)$$

wenn auf für $f'(x, y_0)$ fortbleibt.

1) Es wird dies nach D. 14. No. 2) u. 3) und mit den gemachten
 Voraussetzungen leicht gefolgt. (Aber wird ein von W. gegeben
 Lösung von Lemma notwendig.)

Summe müssen die C die Gll erfüllen:

$$\sum_{\lambda=1}^r a_{\lambda} x_{\lambda} y_{\lambda} + \sum_{\mu=1}^s a_{\mu} x_{\mu}^{n-1} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = 1, 2, \dots, m-1 \\ \nu = 1, 2, \dots, n-1 \end{array} \right.$$

Insoweit man $x_{\lambda}^{n-1} y_{\lambda}^{n-1}$ mit $(xy)_{\lambda}$ set $\lambda = 1, 2, \dots, (m-1)(n-1)$

so nimmt zu den obigen Gll noch hinzu

$$\sum_{\lambda=1}^r a_{\lambda} f(xy, x_{\lambda}, y_{\lambda}) + \sum_{\mu=1}^s a_{\mu} f(xy, a_{\mu}, b_{\mu}) = R(xy) - C$$

so erfüllt man

$$R(xy) - C = \left| \begin{array}{cccc} f(xy, x_1, y_1) & \dots & f(xy, x_p, y_p) & f(xy, a_1, b_1) & \dots & f(xy, a_r, b_r) \\ (x_1, y_1)^2 & \dots & (x_p, y_p)^2 & (a_1, b_1)^2 & \dots & (a_r, b_r)^2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ (x_1, y_1)^n & \dots & (x_p, y_p)^n & (a_1, b_1)^n & \dots & (a_r, b_r)^n \end{array} \right|$$

Dann wird eine Lf gebildet werden, die für den Platz

a, b, c sind für $a'b' = 1$ wird so ist leicht offenbar

$$R(xy) = \frac{R(xy) - R(a, b)}{R(a', b') - R(a, b)}$$

Die oben mitgeführte Transformation ist äquivalent der gewöhnlichen Substitution einer Lücke so anzugeben, dass alle diese Transformationen zusammengefasst mit nicht zusammenfallenden Lücken sind.

Die oben eingeführte Lf. R ist die einfachste für die Plätze $x_1, y_1, \dots, x_p, y_p$ inwendig von der ersten Ordnung, für $a, b, c = 0$ für $a'b' = 1$ zu werden. Wir wollen jetzt eine Lf

$$H(xy, x'y')$$

hastigen, die für $x'y', x_1, y_1, \dots, x_p, y_p$ inwendig wird, so ist sie von R erfüllt. $x_1, y_1, \dots, x_p, y_p$ sollen hierbei als Constanten, $x'y'$ als Parameter betrachtet aufgefasst werden. Ist nun die obige Lf. erfüllt eine Lf zu bilden welche für

$$x'_1, y'_1, \dots, x'_p, y'_p \quad (R \text{ ist } r)$$

inwendig von der ersten Ordnung wird, so ist man in

$$\sum_{\lambda=1}^r a_{\lambda} H(xy, x_{\lambda}, y_{\lambda})$$

Die Loxpanten so zu bestimmen daß jene Punkte für $x, y, \dots, x, y, z$ nicht 0 wird; da ferner nur 9 Loxpanten möglich sind, so kann man sicher die K-9 anderen so vorführen, daß die L' noch von K-9 unangeführten Stellen = 0 wird. Gleichung müssen dann die 9 anderen Stellen von denen für = 0 wird ebenfalls gegeben sein.

Als kommen selbiges im nächsten Abschnitt noch einmal auf diese Aufgabe zurück, es werden die selbige Lösung für die allgemeinen L' vorfallen.

Besteht man x als L' von K, so werden die Klasse x selbst zu einem gegebenen K gehören von einem ungeschriebenen sein, denn sonst müßte (K, x) durch $\frac{dK}{dx}(K, x)$ teilbar sein. G kann aber nicht mehr sein, weil sonst K nicht für möglich werden würde sein würde.

3. Abelsche Functionen.

a) Einführung. Periodischer Satz.

(19.6) In Bezug auf die Definition von Abelschen Differenziergl. mussen wir auf die „Functionen Theorie“, abenthe. für in Bezug auf gewöhnliche, vollständige Subgruppe, Perioden, Fundamentalgewichte u. s. v.; die für gewöhnliche Ausdrücke stimmen mit den dort eingeführten überein.

Es sei uns der Lehrsatz zum Periodischen Satz gegeben, weil er sich mit Hilfe der nachstehenden $\mathcal{H}(xy, x'y')$ leicht ein abgeleiteter Satz leicht in andern Worten keine passende Stelle findet. Der Satz lautet:

Dad. da zu $s = a$ gehörigen Punkte von $y, b, b, \dots, b_s$, je gibt es eine da von einem Absteiger ab, g, L , zu jedem anderen ab_s führen. In diesen Satz besetzt ein Lehrsatz von Perioden, in der Functionentheorie haben wir ihn als Lehrsatz zu einem allgemeinen abgeleitet. Es ist unmittelbar klar, wenn es einen singulären $\mathcal{H}'$ gibt, für den sämtliche $b, \dots, b_s$ zu einer Gruppe gehören, weil ein Umkreisen der $\mathcal{H}'$ dann der Identität genügt. Es soll nun bewiesen werden, dass jede $\mathcal{H}(xy) = 0$ in eine andere $\mathcal{H}'(y)$ umgewandelt werden kann, die einen solchen $\mathcal{H}'$ besitzt.

Wir zeigen dass $\mathcal{H}(xy, x'y')$ das wir hier, wenn keine gewisse Eigenschaft angesetzt können schreiben wollen, $\mathcal{H}(x, x')$ für

$x-x'$ unendlich ist die erste Ordnung ist $\frac{1}{x-x'}$ beginnt. Dagegen
 zeigt man μ mal nach x' so wird $H^{(\mu)}(x, x')$ von der μ -ten Ordnung (22.6)
 & für $x-x'$ entwickelt man nach a , wenn a kein sing. p.
 ist so entstehen in H selbst, also auch in den Ableit. keine negativen
 Potenzen; ist dagegen a ein sing. p. so wird

$$H(x, x') = H_0' + H_1 + H_2(a-x) + \dots$$

$$H^{(\mu)}(x, x') = H_0^{(\mu)} + H_1^{(\mu)} + H_2^{(\mu)}(a-x) + \dots$$

es bleibt also $H^{(\mu)}$ von der ersten Ord. d. Unterschied man nun in

$$F(x, y) = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta} H^{(\alpha)}(x, x')$$

da $c_{\alpha\beta}$ so, daß F für $x, y, \dots, x, y$ nicht ∞ wird, so wird es nicht für
 x, y' ∞ genau von der $\rho+1$ -ten Ordnung d. Differenzionen nach

$F(x, y)$ nach x nimmt nach x' so verhalten wir uns d. für x, y'
 von der $\rho+2$ -ten Ordnung ∞ wird. Auch für $F'(x, y)$. Hier für

$$\xi = F(x, y), \quad \eta = F'(x, y);$$

daurch können wir die Gl. zwischen ξ & η schreiben, & wenn das
 $Q(\xi, \eta) = 0$ irreduzibel ist, so ist die Transform. eindeutig. Hier
 ist es nicht für $x-x', y=y', \xi \neq \eta$ irreduzibel, so daß

$$\xi = k_1(x-x')^{-\mu_1} + k_2(x-x')^{-\mu_2} + \dots$$

$$(x-x') = k_1 \xi^{-\frac{1}{\mu_1}} + k_2 \xi^{-\frac{1}{\mu_2}} + \dots$$

$$\eta = l_1(x-x')^{-\mu_1-1} + l_2(x-x')^{-\mu_2-1} + \dots$$

$$= g_1 \xi^{\frac{\mu_1+1}{\mu_1}} + g_2 \xi^{\frac{\mu_2+1}{\mu_2}} + \dots$$

so wird also η nicht für $\xi = \infty$, unendlich & alle Entwicklungen
 gehören zu einer Gattung. Es ist also die obige Transform. nicht
 eine eindeutige & zugleich hat $Q(\xi, \eta) = 0$ die Eigenschaft
 singulär. Dann kann alle η für $\xi = \infty$ eine Gattung zugeh.
 von so läßt sich die Gl. Q nicht zerlegen. Somit ist die obige
 Transform. des Satzes gültig.

b) Fortsetzung u. Reduktion der obigen Integralen

(26.6) Wie schon soll hier $x \approx x'$ gilt. Setzen wir $t \approx \tau$ ein
 (20.6) $x_t = x_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots$ $\bar{x}_t = \bar{x}_0 + \bar{c}_1 t + \dots$

$$\dot{x}_t = \dot{x}_0 + c_1' t + c_2' t^2 + \dots \quad \dot{\bar{x}}_t = \dot{\bar{x}}_0 + \dot{c}_1' t + \dots$$

und untersuchen die Entwicklung von $H(x, x') \frac{dx}{dt} = H(x_t, x_t) \frac{dx_t}{dt}$
 in der Entwicklung nach $t \approx \tau$.

1) Gegeben $x \approx x'$ zu suchen Entwicklung, d. h. ist

$$x_t = x_0 + c_1 t^m \quad x_\tau = x_0 + c_1 \tau^m$$

so wird für $x_t = x_\tau$, $H = 0$ werden u. wenn x_0 kleiner als τ gegeben.

Wird ist, die wir früher mit $x_1, y_1, \dots, x_2, y_2$ bezeichnet wurden.

$$(x_t - x_\tau) H(x_t, x_\tau) = \bar{P}(t, \tau), \text{ wobei: } \bar{P}(t, t) = 1, \bar{P}(t, \tau) = 0.$$

$$\text{Wird ist } x_t - x_\tau = c_1 (\tau^m - t^m) + \dots = c_1 (\tau - t) (\tau - t)^{m-1} \dots \{1, \bar{P}(t, \tau)\}$$

$$\frac{d}{dt} H(x_t, x_t) = \frac{dx_t}{dt} \cdot \frac{1}{x_t - x_\tau} = \frac{1}{\tau - t} + \frac{1}{\tau - t} \dots + \bar{P}(t, \tau)$$

$$\begin{aligned} H(x_t, x_t) \frac{dx_t}{dt} &= \frac{\bar{P}(t, \tau)}{\tau - t} + \frac{\bar{P}(t, \tau)}{\tau - t} + \dots \\ &= \frac{1}{\tau - t} + \frac{\bar{P}(t, \tau) - \bar{P}(t, \tau)}{\tau - t} + \frac{\bar{P}(t, \tau) - \bar{P}(t, \tau)}{\tau - t} \dots \\ &= \frac{1}{\tau - t} + \bar{P}(t, \tau) \end{aligned}$$

Nimmt man $t < \tau$, so liegen in $\bar{P}$ keine neg. t von τ aufwärts, weil sonst $H(x_t, x_t) = 0$ würde, wie τ auf gegeben man wird; dann müßte x_t ein neg. Wert sein, das ist aber ausgeschlossen. Ist $t > \tau$ so liegen in $\bar{P}$ keine neg. t von τ aufwärts, weil, $H(x_t, x_t) = 0$ für beliebl. t sein würde, d. h. konstant. Ist ist das

$$\text{I. } H(x_t, x_t) \frac{dx_t}{dt} = \frac{1}{\tau - t} + \bar{P}(t, \tau) \quad \begin{matrix} t > \tau \\ t < \tau \end{matrix}$$

von τ abhängt das neg. t von τ aufwärts kommen können.

*) Die Ableitung (26.6) ist S. 45. zu finden.

Angenommen $x_t = \tilde{x}_t, x_c = \tilde{x}_c$. Dann müß $H(\tilde{x}_c, \tilde{x}_t) \frac{dx_t}{dt}$ unabhängig von t für $t=0, \infty$ sein & genau dem Wert annehmen, den mit dem Anfangsglied $\frac{1}{t}$. Man erfüllt dann wie oben.

$$H(\tilde{x}_c, \tilde{x}_t) \frac{dx_t}{dt} = \frac{1}{t-c} + \frac{1}{t} + P(\tilde{x}_c, \tilde{x}_t) \frac{t}{t-c} \quad I'$$

2) Gegeben Anfang x & x' zu untersuchen f. u. s. t. in $x = \tilde{x}_c$ ist in der Umgebung eines singulären f. angenommen, dann kann überprüft keine neg. f. auftreten also

$$H(\tilde{x}_c, x_c) \frac{dx_t}{dt} = P(t, t) \quad II.$$

f. gegeben $x = \tilde{x}_c$ f. auftritt t^{-1} also wird

$$H(\tilde{x}_c, x_c) \frac{dx_t}{dt} = P(\tilde{x}_c) t^{-1} + P(t, t) \quad II'$$

Jetzt untersuchen wir die Randwerte von H auf f von t (3, 4) & setzen allgemein

$$H(x, x_c) \frac{dx_t}{dt} = \sum_{\lambda} H^{\lambda}(x, x_c) t^{\lambda}$$

1) f. für x_c von x_c verschwinden. Angenommen abgesehen von neg. f. $H^{\lambda}(x, x_c) t^{\lambda}$, so müß H^{λ} für $\lambda > 1$ versch. sein. f. u. s. t. für $\lambda' \geq x_c$. Ist man dann $x = \tilde{x}_c$ so müßten in H neg. f. auftreten & mit anderen unzulässig verschwinden. Also ist auf II einmüßig f. konst. also nur $\lambda' = x_c$ sein; dann folgt auf I. dasselbe. Man müßte konst sein; also ist H^{λ} am Rand. & weil $H(x, x_c) = 0$, so müß H^{λ}

$$H(x, x_c) \frac{dx_t}{dt} = \sum_{\lambda} H^{\lambda}(x, x_c) t^{\lambda} \quad III$$

2) f. für $x_c = x_c$. Gemäß der Definitionsgleichung

$$H(x, x') = \frac{F(x, y, x', y', x, y, \dots, x, y)}{D(x, y, \dots, x, y) F_0(x, y')}$$

wobei F eine Det. ist, sind $H(x, x_c) = 0$, da erstere & letzter der Det. gleich werden. Da Mann nicht anders kann, so müß $x' y'$ ein singul. Wert von $f(x, y)$ sein. Man erfüllt dann

$$H(x, \tilde{x}_c) \frac{dx_t}{dt} = \sum_{\lambda} H^{\lambda}(x, x_c) t^{\lambda} \quad III'$$

Mit Hilfe des Formel erfüllt man auch I', weil für $t=0$ offen
 $+\frac{1}{t} \cdot \frac{a}{t} - \frac{1}{t}$ gegen einander fortfallen.

$$IV \quad H(\tilde{x}_t, \tilde{x}_t) \frac{d\tilde{x}_t}{dt} = \frac{1}{t-t} + \frac{1}{t} + t P(\tilde{t}, \tilde{t}) \quad \begin{matrix} t > \tau \\ t < \tau \end{matrix}$$

sind auch II'.

$$V \quad H(\tilde{x}_t, \tilde{x}_t) \frac{d\tilde{x}_t}{dt} = P(t, \tau, t') + t P(t, \tau)$$

3) Zu bemerken ist ferner, daß bei III die Längs. Richtung bestimmt
 werden, daß man $xy = a, b$ setze. Ist es unmöglich wenn $x_t = x_{t'} = a$
 Dann bildet man eine $\tilde{x}$. H welche für beliebigen Werten ∞
 oder für a, b , 0 wird ∞ setzt.

$$VI \quad \begin{aligned} H(x, x_t) &= H(a_0, x_t) - H(x, x_t) \\ H(x, x_t) \frac{dx_t}{dt} &= \sum_1 H^1(a_0, x_t) t^1 - \sum_1 H^1(x, x_t) t^1 \end{aligned}$$

Auf die 2te $\tilde{x}$ stellt sich jetzt III ausrechnen. Eine die nach wird.

$$H(\tilde{x}_t, \tilde{x}_t) \frac{d\tilde{x}_t}{dt} = \frac{1}{t} + \frac{t}{t}, \frac{t}{t}, \dots + P(\tilde{t}, \tilde{t}) \quad t < \tau$$

$$H(a_0, \tilde{x}_t) \frac{d\tilde{x}_t}{dt} = \frac{1}{t} + P(0, \tilde{t})$$

Nag. für können also in P nicht weiterkommen weil H wieder
 aufsteigen muß von $\tilde{x}$ so wie es die nach Ordnung ∞ werden
 können. Daher ist

$$VII. \quad H(a_0, \tilde{x}_t) \frac{d\tilde{x}_t}{dt} = \frac{1}{t} + P(0, \tilde{t})$$

Insum sind alle möglichen Fälle aufgeführt.

Mit der obigen Formel

$$VIII \quad H(x, a_0) = 0$$

fallen wir auf die folgende

$$VIII' \quad H(x, a_0) = \infty$$

zusammen. Die angibt sich aus II für $x_t = a_0$.

(3.7) endlich bezeichnen wir die Fortsetzungen

$$H(x, x_t') = \sum_1 H^1(x, x_t') t^1$$

Nagative für sind wir für $x_t = x', x, \dots, x_0$ möglich.

in $x = x'$ erfüllt man: $H(x', x) = \frac{1}{x'} x' + P(t)$. Ist man nun
 $x_t = x + \epsilon, t' = t + \epsilon$ so erfüllt man $x = 1, \epsilon_t = 1$ damit die Entwicklung mit
 t' beginnt. Ist erfüllt:

$$H(x_t, x) = -t^{-1} + P(t)$$

$$H(x_t, x) \cdot \frac{dx_t}{dt} = t^{-1} + P(t)$$

} IX'

Satzesagen

$$H(x'_t, x') = H(x'_t) t^{-1} + H'(x'_t) - H'(x'_t) t + \dots$$

IX.

(Nötigst muß es sich eigentlich $H(x'_t) t^{-1}$ u. f. w.) zeigen
 In I sind wieder 3 Fälle zu untersuchen.

1) $x' \geq x_a, x_p$. Dann ergibt sich nach III

$$H(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} = c + \tau P(t); \quad H'(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} = c + \tau P(t); \quad H''(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} = c + \tau P(t) \quad \text{X a.}$$

2) $x' = x_p$ ($x_p \geq x_a$). Dann ergibt sich nach V.

$$H(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} = \tau P(t); \quad H'(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} = \tau P(t); \quad H''(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} = \tau P(t) \quad \text{X b.}$$

3) $x' = x_a$. Dann ergibt sich nach IV für $t \leq \tau$

$$H(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} = 1 + \tau P(t); \quad H'(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} = \frac{1}{t} + P(t); \quad H''(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} = -\frac{1}{t^2} + P(t) \quad \text{X c.}$$

Da das Letz. nicht selbst H selbst ausreicht, H' nimmt
 abhewiß H'' einmal logarithmisch einmaltig werden. Wir setzen
 für das Letz. setzen wir gegebenst werden die H' Stücke ein

$$I(x'_t) = \int H(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} dt = I_a + \tau + \tau^2 P(t)$$

$$I'(x'_t) = \int H'(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} dt = I_p + \tau^2 P(t)$$

$$I''(x'_t) = \int H''(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} dt = I_a' + \frac{1}{t} + \tau^2 P(t)$$

$$I'''(x'_t) = \int H'''(x'_t) \frac{dx'_t}{dt} dt = I_p' + \tau^2 P(t)$$

in I_a, I_p, I_p', I_a'
 sind Längs. } XL.

Zwischen den H_a kann keine Glt. von der Form

$$\epsilon_1 H(x y_1) + \epsilon_2 H(x y_2) + \dots + \epsilon_p H(x y_p) = 0$$

bestehen, denn in der Nähe von x, y fällt man die Funktionen:

$$\epsilon_1 + \epsilon/p (\epsilon_2 + \epsilon/p (\epsilon_3 + \dots)) + \epsilon^2 (\dots) = 0$$

also $\epsilon_1 = 0$ u. abwärts $\epsilon_2 = \epsilon_3 = \dots = 0$. Ansaß gilt für die I u. abwärts
 für die H' u. I' .

Wir geben jetzt die allgemeine Formel, welche man durch das vor-
 zugeführte Verfahren erhalten wird.

Setzt man $\bar{H}$ in $\bar{L}$ statt für $x_1, y_1, \dots, x_p, y_p$ einander, so wird

$$\bar{H}(x, x') - \sum_{\alpha=1}^p c_{\alpha} \bar{H}(x, x_{\alpha})$$

für $x_1, \dots, x_p, x_1', \dots, x_p'$, α zu setzen die c_{α} zu bestimmen, dass
 die letzteren für x_1, y_1 in irgendfall kommen die Bedingungen für
 für sind die, dass die Loeff von t' bei den folgenden von $x = x_{\alpha}$,

$$\bar{H}(x_{\alpha}') - \sum_{\alpha=1}^p c_{\alpha} \bar{H}(x_{\alpha}') = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p)$$

werden. Möglic ist die Bestimmung, da die Bed. $\bar{L} = \bar{H}(x_{\alpha}') - \bar{H}(x_{\alpha})$
 nicht 0 sein kann da sonst eine lineare Gl zwischen den $\bar{H}$ gälte, was
 falsch ist. Man erhält also die gesuchte Gl.

$$\bar{H}(x, x') - \bar{H}(x, x') - \sum_{\alpha=1}^p c_{\alpha} \bar{H}(x, x_{\alpha})$$

für $x = x_{\alpha}$ α findet nach $\bar{L} = \bar{L}'$ $\bar{H}(x_{\alpha}') = c_{\alpha}$ so dass

XII

$$\bar{H}(x, x') = \bar{H}(x, x') - \sum_{\alpha=1}^p c_{\alpha} \bar{H}(x_{\alpha}') \bar{H}(x, x_{\alpha}).$$

Es soll $\bar{H}(x, x')$ gefunden werden, welches für $g, g+1$ statt
 $x_1, y_1, \dots, x_p, y_p$ einander wird. Es sind nun die zu setzen in

$$c_0 + \sum_{\alpha=1}^p c_{\alpha} \bar{H}(x, x_{\alpha})$$

die c_{α} zu wählen, dass diese Bed. für x, y nicht 0 wird.

Da $\bar{L}$ und $\bar{L}'$ nur g Bedingungen zu erfüllen, da man sich
 g zu versetzen hat, kann man die $\bar{L}$ noch für $x_1, y_1, \dots, x_p, y_p$, c wählen
 lassen. Dies fordert, dass

$$\sum_{\alpha=1}^p c_{\alpha} \bar{H}(x_{\alpha}') = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p)$$

$$c_0 + \sum_{\alpha=1}^p c_{\alpha} \bar{H}(x_{\alpha}, x_{\alpha}') = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, g-p)$$

*) Diese Formeln können in irgend welcher Weise in $\bar{L}$ Modifikationen
 an anderen Stellen. Auf die letzteren Folgerungen sind in diesem
 Ausdrucke angegeben als bei $\bar{L}$.

Nimmt man zu diesen g Gll noch

$$F(x, y) = c_0 + \sum_{i=1}^g c_i H(x, x_i)$$

so findet man durch Elimination leicht auf einen bestimmten Factor:

$$F(x, y) = \begin{vmatrix} 1 & H(x, x_1) & H(x, x_2) & \dots & H(x, x_g) \\ 0 & H(x_1, y_1) & H(x_1, y_2) & \dots & H(x_1, y_g) \\ 0 & H(x_2, y_1) & H(x_2, y_2) & \dots & H(x_2, y_g) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & H(x_g, y_1) & H(x_g, y_2) & \dots & H(x_g, y_g) \\ 1 & H(x_{g+1}, x_1) & H(x_{g+1}, x_2) & \dots & H(x_{g+1}, x_g) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & H(x_g, x_1) & H(x_g, x_2) & \dots & H(x_g, x_g) \end{vmatrix}$$

XIII

Zum Abschluß sei noch die erste II sich ergebende Linearrelation genannt, daß $H(x_i, x) = H'(x_i, x)$ von dem Nullwerth $a, b, \dots$ von H unabhängig sind.

Setzt man H einer bestimmten bekannten Function $\sum [F(x_i, y) \frac{dx_i}{dt}]_{t=1}^t = 0$ (26.6) läßt sich unmittelbar in der Form

$$\sum [F(x_i, y) \frac{dx_i}{dt}]_{t=1}^t = 0$$

XIV

für H zweier bestimmten Functionen annehmen. Hier möge $x_i = a_i + t^i$ sein, wo x für die nicht singulären Werthe $= 1$ ist. Sind die a_i zu x gehörigen Werthe von $y = y_1, y_2, \dots, y_n$ so ist $\sum [F(x_i, y) \frac{dx_i}{dt}]_{t=1}^t = 0$ weil die jetzt betrachtete x rational verläuft. Gesellen wir die folgenden y in g Gruppen

$$y_1 = P_1(x/a_1, t) \quad y_2 = P_2(x/a_2, t) \quad \dots \quad y_g = P_g(x/a_g, t)$$

so konjugierten, d. h. C_n der Luff von (x/a) in $F(x, y)$ kommt. Deswegen x_i mit a_i ist, d. h. a_i ist für die anderen Functionen. Ist $x = a$ ein singul. P. d. $y = P_1(x/a, t), y_2 = P_2(x/a, t), \dots, y_g = P_g(x/a, t)$ so erfüllt man für die betrachteten Luff $= a, a_i, \dots$

Nun, da die Luff selbst zerfällt sind brüsst man die oben zerfallte auf eine Function auf g zu t bezüglich. Dann nicht zu verfahren, sondern kann setzen.

$$\sum (x_1 C_{11} + x_2 C_{12} + \dots + x_n C_{1n}) = \mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + \dots + \mu_n C_n$$

Genau dieselben Glieder entstehen aber bei $\left[F(x_i, y_i) \frac{dx_i}{dt} \right]_{t=1}$

bei $x_i = a + t^n$, $y_i = P(t)$. Da nun

$$F(x, y) = \dots + C_n (x/a)^n \dots \quad (\text{da Glieder schneller verschwinden als } (x/a)^n \text{ fort})$$

$$\text{so ist } F(x_i, y_i) = \dots + C_n t^{-n} \dots$$

also da $\frac{dx_i}{dt} = n t^{n-1}$ so wird $\left[F(x_i, y_i) \frac{dx_i}{dt} \right]_{t=1} = n C_n$ wenn uns die
 erste Summe betrachtet wird. Daraus ergibt sich dann die obige
 Summe ganz allgemein.

Die Lösung derselben liefert uns so fern eine Überlegung an-
 scheinend zu alt man x_i läng $x_i = a + C_1 t + C_2 t^2 + \dots$ ansetzen kann, indem
 man $t = k_1 t + k_2 t^2 + \dots$ ansetzt, wobei aber $k_1 > 0$ damit in der Folge
 beständiger Gängen zu jedem t ein t geführt ist eingeklappt. Man
 kann die Annahmen auf die ganze Form angewandt werden, von
 oben weiterab ansetzbar ist.

9.7.

Den letzten Satz machen wir folgende Annahmen. Die Folge
 $F(x, y) = H(x, x') \frac{dx}{dx'}$. In der Folge kommenden Worte, für
 welche F angenommen wird, sind $x, y, \dots, x_0, y_0, \dots, x'_0, y'_0$. Sind die ersten

$$\left(H(x'_0) t + H(x'_1) - H(x'_0) t + \dots \right) / \left(H(x'_0) t - H(x'_1) + \dots \right)$$

$$= t' / \left(H(x'_0) H(x'_1) + H(x'_1) H(x'_2) \right) + P(t)$$

Dann ergibt sich für x_i in der Umgebung von x'

$$\left(\frac{1}{x-x'} + \frac{1}{x-x'} \right) \frac{dx}{dx'} \left(H(x'_0) + \frac{dx}{dx'} H(x'_1) t + \dots \right) = t' \frac{dx}{dx'} H(x'_0) + \dots$$

und in der Umgebung von x_0

$$\left(H(x_0, x') + \frac{dx}{dx'} H(x_0, x') t + \dots \right) / \left(\frac{1}{t} P(t) \right) = -t' \frac{dx}{dx'} H(x_0, x')$$

Es ergibt sich daher, wenn man x für x' setzt

XV

$$\frac{dx}{dx'} H(x, x') - \frac{dx}{dx_0} H(x_0, x') = \sum \left(H(x'_0) H(x'_1) - H(x'_1) H(x'_0) \right)$$

Die Darstellung dieses Satzes wird sich später zeigen.

Siehe weiter unten XV auf $H(x, x')$ $F(x, y)$ an.

Erwende 2 für $a, b, \dots, a_n, b_n$. Obgleich diesen Ausdruck ist nach $x, y, \dots, x, y$ zu betrachten. Sind x, y gegeben sind

$$H(x_t, x) \cdot F(x_t, y_t) \frac{dx_t}{dt} = (H(x_t, t) \dots) \sum_{v=0}^{\infty} [F(x_t, y_t) \frac{dx_t}{dt}] \cdot t^v$$

Sind x, y sind

$$H(x_t, x) \frac{dx_t}{dt} F(x_t, y_t) = (-\frac{1}{t} + P(t)) F(x_t, y_t)$$

Folglich wird:

$$F(x, y) = \sum_v [H(x_t, x) F(x_t, y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t=1} + \sum_{\alpha} H(x_{\alpha}) [F(x_t, y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t=0}$$

Wir bestimmen jetzt durch den obigen Ausdruck, indem wir H & F in der Reihe von a, b , entwickeln lassen ist

$$\sum_v [c_v t^v + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda \cdot c_{v,\lambda} t^{v+\lambda-1}] (\sum_{\alpha} H^{(v)}(a_{\alpha}, x) t^{\alpha}) = c_v H(a_{\alpha}, x) + \sum_{\alpha} (-\lambda) c_{v-1, \alpha} H^{(\lambda)}(a_{\alpha}, x)$$

$H^{(\lambda)}$ läßt sich aber mit Hilfe von II darstellen. Wir setzen jetzt x_0, x_t & multiplizieren mit $\frac{dx_t}{dt}$, dann wird:

$$\frac{d}{dt} H(x_t, x) = \frac{d}{dx} (H(x, x_t) \frac{dx_t}{dt}) + \sum_{\alpha} (H(x_t, x_{\alpha}) H'(x_{\alpha}) - H(x_{\alpha}) H'(x_t)) \frac{dx_t}{dt}$$

folglich wenn man auf II von t & nimmt die Differenz von t^{2-1} ist

$$\lambda H^{(\lambda)}(a_{\alpha}, x) = \frac{d}{dx} [H(x, x_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t=\lambda-1} + \sum_{\alpha} H'(x_{\alpha}) [H(x_t, x_{\alpha}) \frac{dx_t}{dt}]_{t=\lambda-1} - \sum_{\alpha} H(x_{\alpha}) [H'(x_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t=\lambda-1}$$

Läßt man dies in den obigen Ausdruck ein & setzt

$$\bar{F}(x, y) = \sum_{v, \lambda} [c_{v-1, \lambda} H(x, x_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t=\lambda-1}$$

$$K_{\alpha} = \sum_{v, \lambda} [c_{v-1, \lambda} H(x_t, x_{\alpha}) \frac{dx_t}{dt}]_{t=\lambda-1}$$

$$K'_{\alpha} = \sum_{v, \lambda} [c_{v-1, \lambda} H(x_{\alpha}, x_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t=\lambda-1} \quad \text{XVI'}$$

so wird

$$F(x, y) = -\frac{d}{dx} \bar{F}(x, y) + \sum_{\alpha} c_{\alpha} H(a_{\alpha}, x) + \sum_{\alpha} \{K_{\alpha} H(x_{\alpha}) - K'_{\alpha} H(x_{\alpha})\} + \sum_{\alpha} [F(x_t, y_t) \frac{dx_t}{dt}] H(x_{\alpha}) \quad \text{XVII.}$$

Mit Hilfe der Formeln II läßt sich die Lsg. von F darstellen, ferner soll man jetzt die einzelnen Teile untersuchen werden.

Zunächst erfüllt man eine vord. Lsg. von x, y . Ob diese sich in zwei Gattungen von Lsg. von F zerlegen lassen $F(x_{\alpha})$ werden wir später sehen; dies sind die Lsg. von F Gattung. In gewissen $F(x_{\alpha})$ werden an einer Stelle & zwei dergl.

algebraisch unendlich werden. Die zweite Gattung von Luth. $\int M(x, y) dx$ werden wegen des Gliedes $M(x, y)$ auf logarithmisch unendlich.

Genau so lässt jedes Luth. einer rationalen x und y mit einem rationalen Kula;

2) mit $\int$ Luth. rationaler Gattung;

3) mit $\int$ Luth. zweiter Gattung;

4) mit einer endlichen Anzahl von Luth. dritter Gattung.

Denn das Luth. rationaler Gatt. lässt sich jetzt nachweisen, dass es nicht mehr als $\int$ sein können. Dann gesetzt $\int F(x, y) dx$ sei eine von Luth. rationaler Gatt., dann müssten die Fälle 1), 3), 4) eintreten. Man annehme also dieses Luth. als lineares Äquivalent der $\int$ zwischen denen, wie oben hervorgehen würde keine lineare G. existiert.

Darüber folgt unmittelbar, dass jedes Luth. nur auf eine Art in die Normalform $\int$ gebracht werden kann. Dann annehme man 2) solche Form, so müsste die Differenz ein Luth. rationaler Gatt. sein, was wegen 1), 3), 4) unmöglich.

Dieser merkt man auch. Ist $\int$ Luth. rationaler Gatt. so lässt sich genau so wie oben nachweisen, dass es nur $\int$ Luth. dritter Gatt. gibt.

Die Normalform dritter Gatt. $\int M(x, y) dx$ lässt sich durch Argument, x das per se mater. Die Luth. das $\int$ Luth. in der Normalform dritter Gatt. sind die $\int$, die Luth. das $\int$ Luth. in der $\int M(x, y) dx$ dieser ist $\sum c_i = 0$. Luth. dritter Gatt. werden also mindestens 2 mal logarithmisch $\int$, in diesem Luth. sind die c gleich $\int$ angegeben. Da nun in Luth. $\int$ Log $\int$ existiert, so sind $2 \sum c_i$ die logarithmischen für das Luth. $\int$ die Summe ist also gleich Null.

c) Irreducibilität. *)

Wir wissen, daß die über geflossene Fläche gefloßte Lini. einer (St. 7.)
 d. eine gewisse Beschaffenheit hat. Wir können nun

$$\int H(x'_\alpha) dx' = 2\tilde{\omega}_\alpha \quad \text{u.} \quad \int H(x'_\alpha) dx' = 2\tilde{\eta}_\alpha \quad \text{I}$$

nur der Kreis über dem Lini. zeigen die geflossene Lini. stehen kann
 soll. Wir setzen b) XI. (St. 10) gefunden

$$\frac{d}{dx} H(x, x') - \frac{d}{dx'} H(x, x') = \sum_\alpha [H(x'_\alpha) H(x'_\alpha) - H(x'_\alpha) H(x'_\alpha)]$$

Können wir nun

$$\int H(x, x') dx' = E(xy) \quad \text{I'}$$

so ist E überall eindeutig definiert, mit Ausnahme von $xy = a, b$,
 hat können wir aber der Willkürlichkeit von a, b wegen fest
 setzen, daß a mit Ausnahme der xy der Lini. Linie, weil für
 $xy = x'y'$, $H = 0$ wird. Integrieren wir nun die obige Gl.,
 nehmen sie mit dx' multipliziert ist, auf einem geflossenen
 Wege von x' so wird

$$\frac{d}{dx} E(xy) = \sum_\alpha [2\tilde{\omega}_\alpha H(x'_\alpha) - 2\tilde{\eta}_\alpha H(x'_\alpha)]$$

Integrieren wir nun von x auf einem Wege der mit dem
 vorigen keinen Durchschnitt hat, d. h. keinen xy in dem der
 Wurzeln von $x^2 - y^2$ mit einander übereinstimmen, so wird

$$\sum_\alpha [2\tilde{\omega}_\alpha \tilde{\eta}_\alpha - \tilde{\eta}_\alpha \tilde{\omega}_\alpha] = 0 \quad \text{II.}$$

Anders ist es wenn die Wege Durchschnitt xy besitzen.
 Ist sei x_0 ein solcher, so wir denken uns ihm ist ein Kreis
 geschlossen mit einem so kleinen Radius daß jeder der
 beiden Wege nur in 2 xy geschnitten wird. Auf xy seien

*) Dieser Abschnitt würde auf in früheren Vorlesungen eingebracht.



für den Weg $\text{ab } x', x_1 \text{ u. } x_2'$; für den $\text{ab } x, x_1 \text{ u. } x_2$. Es möge über-
 zeugt, werb ja selbst durch eine unendlich kleine Verformung der Be-
 ge abgeleitet werden können, angenommen werden, daß keiner der
 Wege durch einen singulären p. geht. x_1 soll auf der negativen
 x_2 auf der positiven Seite der Linie (x_1) liegen. Wir setzen nun
 die Differenz von $E(x_2, y_2) - E(x_1, y_1)$ wenn $x_2 \text{ u. } x_1$ auf dem p. x_1 n. f.
 von. Wir bilden nun, in der Richtung d. Pfeile integriert

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x_2, x') dx' + \int_{x_2}^{x_1} H(x_1, x') dx' = E(x_2, y_2)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x_2, x') dx' + \int_{x_2}^{x_1} H(x_1, x') dx' = E(x_1, y_1)$$

Da die beiden letzten Int. der linken Seiten endlich bleiben
 u. für $x_1' = x_2' = x_0$ denselben Grenzwert annehmen so ist

$$E(x_2, y_2) - E(x_1, y_1) = \int_{x_2}^{x_1} H(x_2, x') dx' - \int_{x_1}^{x_2} H(x_1, x') dx'$$

Da nun $x \text{ u. } x'$ zu denselben Funktionen geformt so sei

$$x_2 y_2 = x_1 y_1, \quad x_2' y_2' = x_1' y_1'$$

gesetzt, dann wird, wenn $t = x_2 - x_0$; $\tau = x_1 - x_0$

$$H(x_2, x') dx' = H(x_2 y_2, x_1 y_1) \frac{dx_2}{dt} \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dx_2}{dt} + f(t, \tau) \frac{dx_1}{d\tau}$$

$$= \frac{dx_1}{x_1 - x_2} + f(x_2 - x_0, x_1 - x_0)$$

$$\text{also } \int_{x_2}^{x_1} H(x_2, x') dx' = \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx_1}{x_1 - x_2} + \int_{x_2}^{x_1} f(x_2, x_1) dx_1$$

$$\int_{x_1}^{x_2} H(x_1, x') dx' = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx_1}{x_1 - x_2} + \int_{x_1}^{x_2} f(x_1, x_2) dx_1$$

Da für $x_1 = x_2 = x_0$ die zweiten Int. der letzten Seiten endlich bleiben
 u. auf denselben Grenzwert führen, so ist nun

$$\lim(E(x_2, y_2) - E(x_1, y_1)) = E^+(x_0, y_0) - E^-(x_0, y_0) = \lim \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx_1}{x_1 - x} - \lim \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx_1}{x_1 - x}$$

$$= \lim \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx_1}{x_1 - x} = 2\pi i$$

also

III

$$E^+(x_0, y_0) - E^-(x_0, y_0) = 2\pi i$$

d. h. E ist überall eindeutig bis auf die Linienlängung. Das ist
 ja

unterscheiden sich die Kräfte, die man erfüllt, wenn man sich das Bild.
 Linie von ^{der} entsprechenden Kräfte nicht im 2. xi. so geht daraus hervor
 dass $e^{(x)}$ eine eindeutige F. ist. Nennen wir also 2. Ent. Mäße,
 den einen für x , dessen Kräfte mit $2\tilde{u}$ u. $2\tilde{u}'$ nennen, u. den andern
 für x' , dessen Kräfte mit $2\tilde{u}'$ u. $2\tilde{u}$ nennen, sind ferner n , Lin.
 eidegg. vorhanden die in positiven, n_2 die in negativen Kräfte
 vorhanden, und ist $n_1 - n_2 = n$, dann wird:

$$\sum_a (\tilde{u}_a \tilde{u}'_a - \tilde{u}'_a \tilde{u}_a) = \frac{n \pi i}{2}$$

II.

sein

Für die allgemeine Theorie finden sich folgende Resultate,
 welche ohne Beweis fast selbst finden können.

Um die Eindeutigkeit der Kräfte zu erfüllen, kann man
 2. Integrationen machen so finden, dass unter den Kräfte nur die
 letzten p unter sich Linien eidegg. haben; die ersten n letzten
 sind einander aber gegenseitig zugeteilt so dass jeder der
 zweiten Kräfte den zugeordneten der ersten einmal in posit.
 u. neg. Kräfte vorhanden. Die ersten Kräfte gibt die Kräfte
 ω u. η , die zweiten ω' u. η' . Man erfüllt so ein System von
 Eindeutigkeit

$$\omega_{11} \quad \omega_{12} \quad \dots \quad \omega_{1p}$$

$$\omega_{21} \quad \omega_{22} \quad \dots \quad \omega_{2p}$$

$$\dots \dots \dots \omega_{p1} \quad \omega_{p2} \quad \dots \quad \omega_{pp}$$

$$\omega'_{11} \quad \omega'_{12} \quad \dots \quad \omega'_{1p}$$

$$\omega'_{21} \quad \omega'_{22} \quad \dots \quad \omega'_{2p}$$

$$\dots \dots \dots \omega'_{p1} \quad \omega'_{p2} \quad \dots \quad \omega'_{pp}$$

u. entsprechend

$$\eta_{11} \quad \eta_{12} \quad \dots \quad \eta_{1p}$$

$$\eta_{21} \quad \eta_{22} \quad \dots \quad \eta_{2p}$$

$$\dots \dots \dots \eta_{p1} \quad \eta_{p2} \quad \dots \quad \eta_{pp}$$

$$\eta'_{11} \quad \eta'_{12} \quad \dots \quad \eta'_{1p}$$

$$\eta'_{21} \quad \eta'_{22} \quad \dots \quad \eta'_{2p}$$

$$\dots \dots \dots \eta'_{p1} \quad \eta'_{p2} \quad \dots \quad \eta'_{pp}$$

Dann lassen sich unter diesen die Glt.

$$\sum (\eta_{1p} \omega_{1p} - \eta_{2p} \omega_{2p}) = 0 \quad \sum (\eta'_{1p} \omega'_{1p} - \eta'_{2p} \omega'_{2p}) = 0.$$

V.

V

$$\sum (\alpha_p \omega_p' - \alpha_p' \omega_p) = \begin{cases} 2\pi i & \beta = \gamma \\ 0 & \beta \neq \gamma \end{cases}$$

Es muß nun gezeigt werden, daß ein solches System von Form. oben wirklich ein Ländersystem ist.

Man setze

$$P_\alpha = \sum_p (2p_\alpha \alpha_p + 2q_\alpha \alpha_p'), \quad Q_\alpha = \sum_p (2p_\alpha \omega_p + 2q_\alpha \omega_p')$$

$$P'_\alpha = \sum_p (2p'_\alpha \alpha_p + 2q'_\alpha \alpha_p'), \quad Q'_\alpha = \sum_p (2p'_\alpha \omega_p + 2q'_\alpha \omega_p')$$

wo p, p', q, q' beliebige ganze Zahlen bezeichnen.

Dann ist

$$\sum (P_\alpha Q'_\alpha - P'_\alpha Q_\alpha)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\alpha, p} 4 \{ p_\alpha p'_\alpha \alpha_p \omega_p + p_\alpha q'_\alpha \omega_p' \alpha_p + q_\alpha p'_\alpha \alpha_p \omega_p + q_\alpha q'_\alpha \omega_p' \alpha_p \\ &\quad - p_\alpha p'_\alpha \alpha_p \omega_p - p_\alpha q'_\alpha \omega_p' \alpha_p - q_\alpha p'_\alpha \alpha_p \omega_p' - q_\alpha q'_\alpha \omega_p' \alpha_p \} \\ &= \sum_{\alpha, p} 4 (p_\alpha q'_\alpha - q_\alpha p'_\alpha) (\alpha_p \omega_p' - \omega_p \alpha_p') \\ &= 2\pi i \sum_{\alpha, p} (p_\alpha q'_\alpha - q_\alpha p'_\alpha) \end{aligned}$$

Dies. Gl. gilt für alle ganzzahligen Werte der p, q, p', q' .
Nimmt man alle $p' = 0$, alle q' ebenfalls mit Ausnahmen von $q'_\beta = 1$, so folgt aus dem obigen Gl.

VII

$$2\pi i p_\beta = 2 \sum_\alpha (P_\alpha \omega_\beta' - Q_\alpha \alpha_\beta')$$

und ebenso

VII'

$$2\pi i q_\beta = 2 \sum_\alpha (P_\alpha \omega_\beta - Q_\alpha \alpha_\beta)$$

man wenn $p'_\beta = 1$, da andern $p' \neq q'$ gleich Null setzt.

Die übrigen paarweise gegenseitigen Produkte können auf analoge Weise
mit neuer Wahl constanten, in gleicher Weise bestimmt werden.

d) Stückzahlprobleme.

Wir stellen die Summe für diejenigen I aufgestellt, welche für $g > 0$ Marktpreis ∞ wird. Auch konnte man sich $g = 0$ denken. Kaufkraft, in diese Lage überzuführen, die I noch für $g = 0$ Marktpreis an Kaufkraft zu lassen. Gleiches kann die g übrigen Personen für welche I , ∞ würde Kaufkraft bestimmen, so muß also unter den $2g$ Personen für welche I , ∞ oder 0 wird, g Kaufkraft gegeben. Diese sind aber nicht, lassen sich aber über Kaufkraft sehr einfach beschreiben. Man fragt sich, wie man Kaufkraft. Dabei ist der Preis der Kaufkraft eine große Zukunft, der unversichtliche aber gewisse Abhängigkeit einfach über Kaufkraft beschreiben sich.

Jetzt, wir betrachten wieder, aber gewisse Kaufkraft in. Diese, zeigt sich folgendermaßen.

$$\text{Bei } f(x, y) = 0 \text{ und } K(x, y) = f.$$

Es sei eine Gerade k und

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n \text{ die Person, für die } g = 0$$

$$x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, \dots, x'_n, y'_n \text{ die, für welche } g = \infty \text{ wird.}$$

ξ, η bedeuten ein Paar eines der beiden Paare.

$$\text{Nun ist, wenn } f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, K_1 = \frac{\partial K}{\partial x}, K_2 = \frac{\partial K}{\partial y}$$

$$f_1(\xi, \eta) d\xi + f_2(\xi, \eta) d\eta = 0$$

$$K_1(\xi, \eta) d\xi + K_2(\xi, \eta) d\eta = d\xi$$

Es wird ergibt sich

$$d\xi = \frac{f_2(\xi, \eta) d\eta}{K_1(\xi, \eta) f_1(\xi, \eta) - f_2(\xi, \eta) K_2(\xi, \eta)}$$

Man stellt also

$$F(\xi, \eta) d\xi = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{F(\xi_i, \eta_i) f(\xi_i, \eta_i) d\xi}{\rho_i(\xi_i, \eta_i) f(\xi_i, \eta_i) - \rho_i(\xi_i, \eta_i) f(\xi_i, \eta_i)}}{= R(z) dz.$$

Da nämlich sämtliche ξ_i auf der selben Geraden liegen, so bleibt in der Summe der Nenner constant. Setzt man nun in Bezug auf ξ

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\xi, \eta) d\xi = \int R(z) dz.$$

in die letzte Zeile können wir algebraische oder logarithmische Ausdrücke einsetzen, da R rational ist.

Sagt man das Resultat der letzten Zeile für die 3 Gatt. von Luth. bestimmt werden, so ist

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{H(\xi_i, \eta_i)}{\rho_i(\xi_i, \eta_i) - z} \cdot \frac{d\xi_i}{d\xi} \right]_{\xi_i} = 0$$

$$\rho(\xi_i, \eta_i) - z = (\rho(\xi_i, \eta_i) - z) + \rho(\xi_i, \eta_i)(\xi_i^v - \xi_i) + \rho(\xi_i, \eta_i)(\eta_i^v - \eta_i) + \dots$$

$$f(\xi_i, \eta_i) = f(\xi_i, \eta_i) + f(\xi_i, \eta_i)(\xi_i^v - \xi_i) + f(\xi_i, \eta_i)(\eta_i^v - \eta_i) + \dots = 0$$

Es muß kein singulärer Punkt, so kann man setzen

$$\xi^v = \xi + t \quad \frac{d\xi^v}{dt} = 1.$$

Es fällt durch Elimination von $\eta^v - \eta$, mit dem Luth. Ausg. $z = 1$

$$\rho(\xi_i, \eta_i) - z = \rho(\xi_i, \eta_i) - z + \frac{\rho(\xi_i, \eta_i) - \rho(\xi_i, \eta_i)}{1} = \rho(\xi_i, \eta_i) - z + \frac{dz}{dz}$$

Im Falle der obigen Annahme wissen wir keine negativen ρ , es ist also nur $\rho(\xi_i, \eta_i) - z = 0$ zu betrachten. Aufzuheben wird, man muß aber zeigen der Luth. von t $\frac{dz}{dz}$ folgend ist

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{H(\xi_i, \eta_i)}{\rho(\xi_i, \eta_i) - z} \cdot \frac{d\xi_i}{d\xi} \right]_{\xi_i} = \sum_{i=1}^n H(\xi_i, \eta_i) \frac{d\xi_i}{d\xi} = 0.$$

Wenn auch also der Luth. Gl. $\sum H(\xi_i, \eta_i) d\xi_i = 0$. Setzt man nun auf einen beliebigen Weg, der keinen singulären P. in sich selbst von ξ nach ξ so müßte

$$\sum_{i=1}^n [I(\xi_i, \eta_i) - I(\xi_i, \eta_i)] = 0$$

Wird $\xi_i = \infty$ $\eta_i = 0$, so bleiben die I_i null; folglich gilt die Gl. auch für diese Grenzwerthe, es liefert die ρ Nullstellen.

Die Luth. annehmen sich dabei von den ξ_i zu belibigen.

aber sehr zu vermeiden $\xi \eta'$, in der That für ξ kann man setzen
dies voraus, aber nur so, dass das Integral $\int$ wieder dieselbe
 ξ' aufweist. Man kann bei Abel & Jacobi bestimmten Lücken
kann man sich aus folgenden Umständen frei. In $\xi \eta'$ ordnen
wir in beliebiger Reihenfolge, nennen sie ξ'' , für die dann
Man, mache die $\xi \eta'$ in ξ'' überführen, oder so dass die
sicherlich in a, b eine Verbindung geben. Man muss
$$\sum_{i=1}^n \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi \eta'}{x} \right) dx = \sum_{i=1}^n \left\{ \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi'' \eta''}{x} \right) - \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_i b_i}{x} \right) + \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_i b_i}{x} \right) - \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x_i g_i}{x} \right) \right\}$$

Die ξ'' muss dann wird aber ein vollständiges Int. so dass man
dann das Gl. zu II erfüllt man muss.

$$\sum_{i=1}^n \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi'' \eta''}{x} \right) dx = 2\tilde{a}_\alpha \quad [\alpha = 1, 2, \dots, g]$$
 II a.

Die ξ'' für die $2\tilde{a}_\alpha$ kann = 0 gemacht werden, wenn man die
ersten $n-1$ Int. Man beliebig wählt, den letzten aber das Gl. zu
muss bestimmen. So ist also für Int. unsere Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \left[\int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi'' \eta''}{x} \right) - \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x_i g_i}{x} \right) \right] = 2\tilde{a}_\alpha \quad [\alpha = 1, 2, \dots, g]$$
 III

Das Int. für Int. 2 der Gleich., welches oben bewiesen wird,
ist dasselbe nur, weil es erst dann für Int. 3 der Gleich. in
mittheilbar folgt.

Man kann letzteren zu finden beibringen wie

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi \eta'}{x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x_i g_i}{x} \right) \right] = 0$$

Das letztere wird für x, y in a, b, ∞ . Das letztere folgt aus
2. b. II. Die Entwicklung beginnt bezüglich mit $\frac{1}{R(x, y)} t^{-2}$
 $-\frac{1}{R(a, b)} t^{-1}$. Die dann Numer aufzuführenden Glieder sind
bekannt oben gefunden, so dass

$$\frac{dz}{R(x, y)} - \frac{dz}{R(a, b)} + \sum_{i=1}^n \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi \eta'}{x} \right) dx = 0$$

in der That Int. erfüllt man

$$\sum_{i=1}^n \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\xi \eta'}{x} \right) dx = \left[-\frac{1}{2} \frac{z - R(x, y)}{z - R(a, b)} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} \frac{R(x, y)}{R(a, b)}$$
 IV.

$x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$ unbekannt, dann ist

$$\sum_{i=1}^n I(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n I(x_i, y_i)$$

oder identisch damit

$$\sum_{i=1}^n \{ I(x_i, y_i) - I(x_i, y_i) \} + I(x_0, y_0) - I(x_0, y_0) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \{ I(x_i, y_i) - I(x_i, y_i) \}$$

d. h. die Summe von $n+1$ Null ist ebenfalls Null eine
 Summe von n Null. In der folgenden ist bereits angegeben,
 daß die obigen Grenzen durch eine Gl. n der Quoten gäbe.
 fest werden.



f) Alte Methode

Das hier beschriebene Verfahren ist in verschiedenen Aufsatzen von L. in der Abhandlung von L. II. angeführt, und das hier das Problem in seiner größten Allgemeinheit dargestellt werden soll.

Gegeben sei p Variablen

$$u_1, u_2, \dots, u_p$$

in der p Dimensionen

$$x_1, x_2, \dots, x_p$$

bestehen folgende Diff. Gl.

$$du_1 = H(x_1, y_1) dx_1 + \dots + H(x_p, y_p) dx_p$$

I.

$$du_2 = H(x_1, y_2) dx_1 + \dots + H(x_p, y_2) dx_p$$

Die x genügen der Gl

$$f(x) = 0$$

zu den Werten $u_1 = 0, u_2 = 0, \dots, u_p = 0$ sollen gehören

I.

$$x = a_1, a_2, \dots, a_p$$

Die Resultate zu denen man gelangt, wenn man x in y als f der u einsetzt sind folgende.

„Die x sind Wurzeln einer Gl

$$x^p + P_1 x^{p-1} + \dots + P_p = 0 = f(x);$$

II

die y sind

$$\psi(x) = Q_1 x^{p-1} + Q_2 x^{p-2} + \dots + Q_p$$

wenn für x die aus f resultierenden Wurzeln eingesetzt werden. Hier die P und Q sind dabei notwendig voneinander abhängig. Es sei u

„nach „geringerem“ Abhufte d. „geringerer“ werden.“

In der gegebenen Diff. gl. wurde $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$ für x, y gesetzt.
 Sei $t = t_0$ substituirt für $\tilde{x}_i, \tilde{y}_i$ mit x, y , für $t = 0$ mit a, b .

Dann wird für $I(x, y) = I(a, b)$, nach t von t_0 entwickelt
 lassen. Nun merke

$$I(\tilde{x}_i) = I_a + t + t^2 f(t), \quad I(\tilde{x}_i) = I_a + t^2 f(t)$$

folgt es wird

$$u_i = t_i + f_i(t, \dots, t) \quad \text{wobei die } f \text{ mit Gleichungen 2. bis III.}$$

$$u_j = t_j + f_j(t, \dots, t) \quad \text{Dann f. beginnend}$$

Nun bemerken wir in der Diff. Gl. folgende Punkte.

$$u_i = f_i(x, \dots, x_n) + \bar{f}_i(x, \dots, x_n)$$

$$u_j = f_j(x, \dots, x_n) + \bar{f}_j(x, \dots, x_n)$$

wo $f = f_i$ symmetrisch in den f linear sind, wenn ferner
 in der Diff. Gl. nicht vorkommen, so lassen sich die x und
 y durch u darstellen, die für kleine Werte der
 u convergieren, in denen Löss. eindeutig durch die Löss.
 der gegebenen Diff. Gl. bestimmt sind.“

Dann merke diesen Satz an, so erhalten wir

$$t_\alpha = u_\alpha + (u_1, \dots, u_p)_\alpha^2 + (u_1, \dots, u_p)_\alpha^3 + \dots \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p) \quad \text{IV.}$$

Bestimmen wir alle u , so wird die t also wird $x, y = a, b$ mit
 gegeben sein.

Dabei können wir für die u gewisse g vorsehen, um
 daselbst durch die Reihen selbst convergieren. Man darf nur
 aber die Reihen nicht fortsetzen, so ergibt sich
 dass sie nicht eindeutig sind; muss aber zeigen die, heißt
 mit jenen Reihen gebildeten symmetrischen Diff. P in Q
 eindeutig. Um dies zu beweisen, betrachten wir die Q .

3) Beispiel aufsetzen mit xy statt x, y . Dann ist

$$H(x, x') = t^{-1} H(x) + \int_{x_0}^{x'} \frac{f(t, x)}{t} dx'$$

$$3) E(x, x_1, x_0) = e^{-\int_{x_0}^{x_1} \frac{f(t, x)}{t} dt} \cdot \frac{1}{f(t)}$$

I. Partiel würde angewendet man setzt x, y mit keinem der
Glieder $a, b, \dots, q, b$ zusammenzufallen. Dieser Umstand ist jetzt
zu berücksichtigen so sei $x, y = a, b$. Wir haben

$$H(x, x') = \bar{H}(x, x') - \sum_i H(x) \bar{H}(x, a_i)$$

$$\text{Dieser ist } \int_{a_0}^{x_0} H(x) dx' = \int_{a_0}^{x_0} H(x) dx - \sum_i H(x, a_i) \int_{a_0}^{x_0} \frac{H(x)}{f(t)} dx'$$

Daher ist

$$1) E(x, x_1, a_0) = \frac{1}{t} f(t) e^{-\int_{a_0}^{x_1} \frac{H(x)}{f(t)} dx'}$$

$$2) E(x, x_1, a_0) = t \frac{f(t)}{f(t)} \int_{a_0}^{x_1} \frac{H(x)}{f(t)} dx' \cdot \frac{1}{f(t)}$$

VI 1

$$3) E(x, x_1, a_0) = e^{-\int_{a_0}^{x_1} \frac{H(x)}{f(t)} dx'}$$

II. Sonst ist zu berücksichtigen $x, y = a, b$. Dieser findet
man unmittelbarer durch Betrachtung der Teil. Grenzen u. setzen
das folgende

$$1) E(x, a_1, x_0) = t e^{-\int_{a_0}^{x_1} \frac{H(x)}{f(t)} dx'}$$

$$2) E(x, a_1, x_0) = \frac{1}{t} f(t) \int_{a_0}^{x_1} \frac{H(x)}{f(t)} dx' \cdot \frac{1}{f(t)}$$

VI c.

$$3) E(x, a_1, x_0) = e^{-\int_{a_0}^{x_1} \frac{H(x)}{f(t)} dx'}$$

Nach S. 1. E. also, mache „Primfunktion der alge-
braischen Function $f(x, y)$ “ genannt man das, was
also in jedem Falle nur zu einem Werte a , oder einem a u.
zu zwei verschiedenen Werten a d. selben Ordnung, für die p setzen
 $a, b, \dots, q, b$ wird für unbestimmt, u. genau ist es möglich, dass die
 f mit den Functionen a oder a wird, zusammenzufallen.
Nun ist E im ganzen Verlauf der oben eindeutig definiert.
und hat den Charakter einer nat. F. von x u. y .

VII

Grundgleichung sind unmittelbar die Eigenschaften von $\mathcal{H}$.

gesetzt. Wir wollen $\mathcal{H}$ als $\mathcal{H}$ von $u, \dots, u_p$ bezeichnet werden.

Seien nun die x_i von a_i bis b_i beliebig angenommen und t die Werte von t zwischen a_i und b_i aufgetragen, so dass wenn x von x_i verläuft angenommen wird

$$\int_{a_i}^{b_i} \mathcal{H}(x, x') dx' = \int_0^{t_i} \mathcal{H}(x, x') \frac{dx'}{dt} dt.$$

Nach den früheren Sätzen lassen sich die t über $\mathcal{H}$ in x ausdrücken, $\mathcal{H}$ also nach x von t entwickeln. Es kommt nur geachtet sein von t , so dass wir haben:

$$\int_0^{t_i} \mathcal{H}(x, x') \frac{dx'}{dt} dt = -t_i \mathcal{H}'(x, a_i) - \frac{1}{2} t_i^2 \mathcal{H}''(x, a_i) - \dots$$

Es sei x, y können die Punkte a_i bis b_i beliebig, so erfüllt man in der Entwicklung nur geachtet sein von $t, \dots, t_p$.

Es sei aber x, y einem Punkte a_i bis b_i beliebig, so erfüllt man

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x_i, x') \frac{dx'}{dt} &= t^{-1} \mathcal{H}(x_i, x') \frac{dx'}{dt} + \frac{1}{2} t^2 \mathcal{H}''(x_i, x') \\ &= t^{-1} \mathcal{H}(x_i, x') \frac{dx'}{dt} + \mathcal{H}'(x_i, x') \frac{dx'}{dt} - t \mathcal{H}''(x_i, x') \frac{dx'}{dt}, \dots \end{aligned}$$

also

$$\int_0^{t_i} \mathcal{H}(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt = t^{-1} \int_0^{t_i} \mathcal{H}(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt + \int_0^{t_i} \mathcal{H}'(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt - t \int_0^{t_i} \mathcal{H}''(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt, \dots$$

Sagegen

$$\int_0^{t_i} \mathcal{H}(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt = t^{-1} \int_0^{t_i} \mathcal{H}(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt + \int_0^{t_i} \mathcal{H}'(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt - t \int_0^{t_i} \mathcal{H}''(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt, \dots$$

Die Formeln § 13 zeigen

Es im ersten Teil auf der ersten Seite sind der 2. Glieder nachgeordnet, so dass aber im zweiten $\frac{1}{2} t^2$ vorsteht.

Dies können wir in diesen Formeln annehmen

VIII

$$\mathcal{H}(x_i, y_i, u, \dots, u_p) = e^{\frac{1}{2} t^2 \int_0^{t_i} \mathcal{H}''(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt + \int_0^{t_i} \mathcal{H}'(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt - t \int_0^{t_i} \mathcal{H}(x_i, x') \frac{dx'}{dt} dt, \dots}$$

wobei die Formeln sicher alle abgeleitet sind auf

$$Al(x'_t \dot{y}_t / u_1, \dots, u_p) = e^{y \frac{t-t_a}{t}} + t^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} H(x'_t \dot{y}_t) \frac{d^n}{dt^n} + \sum_{n=0}^{\infty} H(x'_t \dot{y}_t) \frac{d^n}{dt^n} + \dots$$

wobei $\sum'$ anzeigt dass die Summation sich nicht auf $\beta = \alpha$ bezieht.

Mit Hilfe von I ist dann leicht zu sehen

$$Al(x'_t \dot{y}_t / u_1, \dots, u_p) = \frac{t-t_a}{t} e^{t-t_a} \bar{F}(t) = \frac{1}{t} e^{t-t_a} \bar{F}(t)$$

VII''

Ist endlich $t = t_a$ so wird $t-t_a = 0$ und also auch Al selbst $= 0$.

Um das Gebiet der Parameter u zu erweitern, werden wir folgenden Satz des L. Grenier annehmen: Man nenne L von x in y für

"alle auf diesen Mannigfaltigkeiten eindeutig definiert ist, so ist für eine vert. L von x in y ."

Ebenso kann man bemerken dass L

$$\frac{Al(xy / u_1, \dots, u_p)}{Al^2(xy / u_1, \dots, u_p)} = \frac{\frac{1}{t} e^{t-t_a} \bar{F}(u_1, \dots, u_p, t)}{\frac{1}{t^2} e^{2t-2t_a} \bar{F}(u_1, \dots, u_p, t)} = t^{n-1} \bar{F}(t)$$

Dieser Quotient bleibt, wie die folgerichtige zeigt in der That von $u_1, u_2, \dots, u_p$ unabhängig, für alle anderen u findet derselbe für gewisse n Namen statt, folglich ist der Quotient eine vert. L . Setzt man $x'_t, y'_t, \dots, x'_t, y'_t$ die Nullstellen des Nenners, so wird jene L allein für diese Werte u in gewissen n ter Ordnung. Aufsuchen können wir die n Nullstellen des Zählers, für jeden wird der Quotient 0 von der n -ten Ordnung. Man kann also den Quotienten berechnen und so erfüllt.

$$Al(xy / u_1, \dots, u_p) = R(xy / x'_t, y'_t, \dots, x'_t, y'_t) Al^2(xy / u_1, \dots, u_p) \\ = R(xy / u_1, \dots, u_p) Al^2(xy / u_1, \dots, u_p)$$

mit inneren bestimmten Grenzen die x eindeutig L der u sind. Sind diese Grenzmannigfaltigkeiten $u_1, \dots, u_p$ so ist der erste Teil von L definiert für $u_1 < u_2$. Für $u_1 < u_2$ stimmen aber beide Teile überein, folglich kann man den ersten Teil als Fortsetzung der zweiten auf definierten L ansehen. Dass die L von dem Werte bei n unabhängig ist, würde schon in der folgerichtigen nachgewiesen.

für p angenommen x'_p, y'_p so sind $R(x, y)$ außer für x'_p, y'_p noch für
 p andere 0 werden in dem sind die gegeben. Man set also nur die
 Grenze zu bestimmen die $f(x, y) = 0$ in $R(x, y) = 0$ gemein haben in dem dieser
 2.9. Werken die p angenommenen fortzusetzen.

Wir können auf einfachere Weise die Bestimmung des Grades
 eines $\mathcal{H}$ die Werthe durch Lösung der Gll

$$R(x) = A(x, y_1, u_1, \dots, u_p) A(x, y_2, u_1, \dots, u_p) \dots A(x, y_p, u_1, \dots, u_p)$$

$$f(x, y) = 0$$

finden.

Die Substitution zeigt in dem 9. 62 gegebenen Formel (VII)

$$A(\tilde{x}_t, \tilde{y}_t, u_1, \dots, u_p) = e^{-t} \int_0^t H(\tilde{x}_t) \frac{d\tilde{x}_t}{dt} + \tilde{x}_t \int_0^t H(\tilde{x}_t) \frac{d\tilde{y}_t}{dt} dt + \tilde{y}_t \int_0^t H(\tilde{x}_t) \frac{d\tilde{y}_t}{dt} dt + \tilde{y}_t \int_0^t H(\tilde{x}_t) \frac{d\tilde{y}_t}{dt} dt$$

Wir haben noch

$$u_x = \sum_{p=1}^p \int_{y_p}^{y'_p} H(x'_p) dx'_p = \sum_p (I(x'_p) - I(y_p))$$

VIII

als Lösung von $t^{-1} \cdot \frac{d}{dt}$ setzen das liefert von t

$$\psi(u_1, \dots, u_p)_x = \sum_{p=1}^p \int_{y_p}^{y'_p} H'(x'_p) dx'_p = \sum_p (I'(x'_p) - I'(y_p))$$

VIII'

ψ ist von a, b unabhängig weil H' es war. Derselbe gilt
 für u_x . Man stellt Sup

$$\frac{d}{dt} \log A(\tilde{x}_t, \tilde{y}_t, u_1, \dots, u_p) = \frac{d}{dt} \log u_x - \psi(u_1, \dots, u_p)_x + t \psi(u_1, \dots, u_p)_t$$

IX

Überdies man kann bei Sub. Wege so, dass in u als Sub.
 sofer Substanz sein in dem erhaltenen für $2\tilde{u}_1, \dots, 2\tilde{u}_p$ sind so
 muss ψ als Argument von Sub. zweier Subst. sein $2\tilde{u}_1$ etc.
 dann also

$$\psi(u_1 + 2\tilde{u}_1, u_2 + 2\tilde{u}_2, \dots, u_p + 2\tilde{u}_p)_x = \psi(u_1, \dots, u_p)_x + 2\tilde{\psi}_x$$

X

Durch Differenzierung folgt die Gleichung von 2.9. für ψ pariv.
 lassen ist.

Dies kann die Darstellung von ψ angibt so ist nach 9. 43 X

$$\psi(u_1, \dots, u_p) = t_x^{-1} + (t_1, \dots, t_p)_x + (t_1, \dots, t_p)_x + \dots$$

Der Zweck der folgenden Untersuchungen ist das: die geschriebene
Abh. von M mit Hilfe der Φ auszudrücken.

Es sei nun

XI

$$w_a = \int x y / a$$

$$w'_a = \int' x y / a$$

$$w_a^0 = \int x y / a$$

$$w_a^{0'} = \int' x y / a$$

$$v_a = \int \xi \eta / a$$

$$v_a^0 = \int \xi \eta / a$$

so sollen dabei $x, y, x_0, y_0, \xi, \eta$ zwei willkürlich wählbare Functionen
sein. Nun wenn

$$E(x, y | \xi, \eta, x_0, y_0) = e^{\int_{x_0, y_0}^{\xi, \eta} H(x, x') dx'}$$

$$\text{also } \frac{d}{d\xi} \log E(x | \xi, x_0) = H(x, \xi)$$

Leiten wir jetzt den Ausdruck

$$E(x | \xi, x_0) \frac{M(x, y, u_1 - v_1 + w_1, \dots, u_p - v_p + w_p)}{M(x, y, u_1, \dots, u_p)}$$

so ist diese ξ nicht nur eine const. F. mit Berücksichtigung
der Grenzstellen ist dies auch selbst klar. In der That wenn
 a, b zwei willk. E der Function $e^{\int (u_1 - w_1)}$ mit $M(x, u_1 - v_1 + w_1, \dots)$
 $e^{\int (u_1 - w_1)}$ mit $M(x, u_1, \dots, u_p)$, $e^{\int (u_1 - w_1)}$ gesetzt, so ist der Quotient
unverändert bl. bl. für x wird unendlich für die Nullstellen der
Nenner $x, y, \dots, x, y_0$ in für x, y_0 der Nenner $E \cdot M$ wird. In a, b muss
das die drei Factoren = 1. An der Stelle ξ, η wird E in demselben
jenseit ξ, η = 0. Durch diese Eigenschaften ist ganz ξ willkürlich.
Es bestimmt sich nun $F(x, y)$ der ξ mal für $x, y, x, y, \dots, x, y_0$ zu
nehmen wird, so ist

$$E(x | \xi, x_0) \cdot \frac{M(x, y, u_1 - v_1 + w_1, \dots)}{M(x, y, u_1, \dots)} = \frac{F(x, y) - F(\xi, \eta)}{F(a, b) - F(\xi, \eta)}$$

Es sei

$$\frac{d^2}{dx d\xi} E \cdot \frac{M}{M} = \frac{d}{dx} H(x, \xi) + \frac{d^2}{dx d\xi} \log M(x, y, u_1 - v_1 + w_1, \dots)$$

$$= \frac{d^2}{dx d\xi} \log [F(x, y) - F(\xi, \eta)]$$

Wird nun jetzt x in ξ mit einander in sich selbst der näm-
l. von der eben erhaltenen, so wird:

La gaudilla

Feb 12

3/57

L. pinnatifidus

Phil. B. B. B.

Rise on

$$x/48, -25 + 24, \dots)$$

auf des Götter

early in

Am 6. 6. 1881

2nd hand inf

as J. Rolfe-

1771

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

of the same

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$
 $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right)$

$$\frac{d}{dx} \left[H(\xi x) - \frac{d}{dx} \lg M(xy/u, v, w, \dots) \right] = \frac{d}{dx} \left[H(\xi x) - \frac{d}{dx} \lg M(\xi v/u, v, w, \dots) \right]$$

Nehmen wir für $\xi v, \xi^2 v, \dots$ & multiplizieren mit $\frac{d}{dx}$.

$$\frac{d}{dx} H(\xi^2 x) - \frac{d}{dx} \lg M(xy/u, v, w, \dots) = \frac{d}{dx} (H(\xi^2 x) \frac{d\xi^2}{dx} - \frac{d}{dx} \lg M(\xi^2 v/u, v, w, \dots))$$

Das zweite constante Glied ist nach D. H. III, S. 65 IX für die erste Part

$$\frac{d}{dx} \psi(u, w, w_1, \dots, u_p, w_p, w_2)$$

Es nimmt man das constante Glied leicht

(23.7)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \lg M(xy/u, v, w, \dots) &= \frac{d}{dx} \lg M(xy/\bar{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u}_p) \\ &= \frac{d}{d\bar{u}} \lg M(xy/\bar{u}, \dots) \frac{d\bar{u}}{dx} + \dots \end{aligned}$$

Da aber nur $\bar{u}$ von x abhängig ist, so wird

$$\frac{d\bar{u}}{dx} = \frac{d\bar{u}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} (I(\xi^2 \bar{v}))$$

Erweitert man, dass $\frac{d\bar{u}}{d\tau} = 0$ wenn α & β verschwinden, dagegen = 1 für $\alpha = 1$. So wird also für $\tau = 0$

$$\frac{d}{dx} \lg M(xy/\bar{u}, \bar{u}, \dots, \bar{u}_p) = \frac{d}{d\bar{u}_a} \lg M(xy/\bar{u}, \dots, \bar{u}_p)$$

Es stellt man sich die Diff. vorzüglich für $\tau = 0$ setzen

bedeutet man aber dass $\bar{u} = u - v_a$ so stellt man dass

$$\frac{d}{d\bar{u}_a} \lg M = - \frac{d}{d\bar{u}_a} \lg M$$

so stellt man sich vor, da man nur $\tau = 0$ setzen können. Hierfür mag v_a in $v_{a\alpha}$ abhengen also

$$v_{a\alpha} = I(\alpha) \frac{v_a}{\alpha}$$

XI'

Erweitert ist das constante Glied, welches wir setzen

$$- \frac{d}{d\bar{u}_a} \lg M(xy/u, v_a + w_1, \dots)$$

Es ist

$$\frac{d}{dx} H(\xi^2 x) = \frac{d}{dx} (H(x) \tau + H(x) - H(x) \tau, \dots)$$

also das constante Glied

$$- H'(x)$$

so wird folglich

$$\frac{d}{dx} \psi(u, w, w_1, \dots) = \frac{d}{dx} \frac{d}{d\bar{u}_a} \lg M(xy/u, v_a + w_1, \dots) - H'(x)$$

Folgt setzen wir $x, y = a, b$. Dann wird $n'_y = v_a$ oder

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial u_a} \lg M(x, y, u_1, \dots, u_p) = \frac{d}{dx} \psi(u_1, -u_1 + v_a, \dots)_\alpha + H'(x)_\alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial u_a} \lg M(x, y, u_1, \dots, u_p) = \psi(u_1, -u_1 + v_a, \dots)_\alpha + n'_a + \text{const.}$$

Um die Constante zu bestimmen sei $x, y = a, b$, dann wird gefolgt

$$\text{XII} \quad \frac{\partial}{\partial u_a} \lg M(x, y, u_1, \dots, u_p) = \psi(u_1, -u_1 + v_a, \dots)_\alpha + n'_a - \psi(u_1, -u_0 + v_a, \dots)_\alpha - n'_{a0}$$

zusammen

$$\text{XI}^* \quad n_{a0} = I(a, b)_\alpha \quad n'_{a0} = I'(a, b)_\alpha$$

Folgt man nun $x, y = x, y$ in Differentialen setzt so erhält man

$$\left[\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial u_a} \lg M(x, y, u_1, \dots, u_p) \right]_{x=y} = - \frac{\partial}{\partial u_a} \psi(u_1, -u_1 + v_a, \dots)_\alpha$$

indem man genau wie oben vorgeht.

Womit aber noch

$$\frac{d}{dx} \lg M(x, y, u_1, \dots, u_p) = -u_1 x^{-2} - x^{-1} - \psi(u_1, \dots, u_p)_\beta + \dots$$

so ist noch

$$\left[\frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial u_a} \lg M(x, y, u_1, \dots, u_p) \right]_{x=y} = - \frac{\partial}{\partial u_a} \psi(u_1, \dots, u_p)_\beta$$

Es folgt

$$\frac{\partial}{\partial u_a} \psi(u_1, -u_1 + v_a, \dots)_\alpha = \frac{\partial}{\partial u_a} \psi(u_1, \dots, u_p)_\beta$$

Wenn ist aber $v_a = n_a$ nach II. 11. folglich wenn man u_1 um n_1 vermindert

$$\text{XIII} \quad \frac{\partial}{\partial u_a} \psi(u_1 + n_1, \dots)_\alpha = \frac{\partial}{\partial u_a} \psi(u_1 + n_1, \dots)_\beta$$

Dieses liegt der richtigen Deutung, dass

$$\sum_\alpha \psi(u_1 + n_1, \dots, u_p + n_p)_\alpha$$

ein vollständiges Differential ist. Derselbe ist dann noch nach der Fall man nur die u um willkürliche oder bestimmte Grössen vermindert. Wir setzen nun

$$\text{XIV} \quad d \lg \psi(u_1, \dots, u_p) = \sum_\alpha [\psi(u_1 - n_0 + n_\alpha, \dots, u_p - n_p + n_\alpha) + n'_{a0}] du_\alpha$$

und finden durch Differentiation der Gl. XII

$$\text{XIV} \quad d \lg M(x, y, u_1, \dots, u_p) = d \lg \psi(u_1, -u_1 + n_0, \dots) - d \lg \psi(u_1, \dots, u_p) + d \sum_\alpha (n'_\alpha - n'_{a0})$$

folgt:

$$M(x, y, u_1, \dots, u_p) = C \cdot \frac{e^{\sum u_i (u_i - u_{i0})} \psi(u_1 - u_1 + u_{10}, \dots)}{\psi(u_1, \dots, u_p)}$$

Die Lösung ist nicht bestimmt, indem man $x, y = 0, 0$ setzt, dann wird

$$M(x, y, u_1, \dots, u_p) = \frac{e^{\sum u_i (u_i - u_{i0})} \psi(u_1 - u_1 + u_{10}, \dots)}{\psi(u_1, \dots, u_p) \psi(-u_1 + u_{10}, \dots)}$$

XV.

Wenn man also die L. ψ kennt, so läßt sich ablesen, wie die

M. beschaffen.

Obst III' folgt mit Rücksicht auf I. S. X

$$d \log \psi(u_1 + 2\tilde{u}, \dots) = d \log \psi + \sum_i 2\tilde{u}_i du_i$$

$$\psi(u_1 + 2\tilde{u}, \dots) = C \cdot e^{\sum_i 2\tilde{u}_i u_i} \psi(u_1, \dots, u_p)$$

Die hier Folgende ist es nötig für eine Lösungsgleichung zu berücksichtigen.

Wenn $f(u)$ für alle Werte $|u| < |a|$ konvergiert, kann man für $|u_0| < |a|$ konvergente Reihen aufbauen von $u - u_0$ aufstellen, welche in einem endlichen Limes mit der Funktion übereinstimmt. Wenn $|u| > |a|$ ist, so ist $f(u)$ als Fortsetzung von u zu setzen. Lassen sich für alle $f(u)$ die Fortsetzung der Lösungsgleichung aufstellen, so ist $f(u)$ auf u hin a hin ausgedehnt. Dieser Satz läßt sich auf L. mit beliebig vielen Variablen ausdehnen.

Wenn $f(u)$ eine beliebig konvergente Reihe ist, so läßt sich ein a finden, da die Entwicklung mit $(x-a)^m$ beginnt und $m \geq 0$ so ist $\frac{d}{du} \log f(u) = \frac{m}{u-a} + f(u-a) = g(u)$. Läßt sich in möglichst der Art. das Log. von $f(u)$ beliebig in eine Reihe von der Form $g(u)$ entwickeln, so ist $f(u)$ beliebig konvergent.

Dann: $\frac{d}{du} \log f(u) = \frac{m}{u} + f(u)$ also $f(u) = C \cdot u^m e^{f(u)} = C u^m f(u)$

$f(u)$ ist für kleine Werte von u konvergent, weil $f(u)$ ab ist. Angenommen man ab für a der Art. der Lösung. Da für $f(u)$

so schreibe man ihm einen $f(a)$ einen kleinen Rest. Man weiß.

$$\frac{d}{du} f(u) = \frac{m_1}{u-a} + f_1'(u-a)$$

Dies. Entwicklung stimmt im Innern des ersten Kreises mit der ersten Entwicklung überein. Es folgt also.

$$f(u) = c_1(u-a)^{m_1} f_1(u-a)$$

Dies. Rest ist sicher für kleine Werte wachsend. Da das selbe aber für alle f das selbe sein muß, so ist der erste Rest kleiner als der nächstfolgende angenommen, so kann man das selbe beliebig ausführen.

Dies. Rest lassen sich mit f_1 mit wachsendem Rest. und so weiter. Da $f(u_1, \dots, u_p)$ eine Funktion von $u_1, \dots, u_p$ beliebig ist, so $u_1 - a_1 = v_1, \dots, u_p - a_p = v_p$. Dann möge f nach f_1 in v entwickelt mit dem ersten Rest. beginnen.

$$f(u_1, \dots, u_p) = [v_1, \dots, v_p]_m + [v_1, \dots, v_p]_{m+1} + \dots$$

Man setze nun

$$v_\lambda = \alpha_{\lambda 1} t_1 + \alpha_{\lambda 2} t_2 + \dots + \alpha_{\lambda p} t_p \quad (\lambda = 1, 2, \dots, p)$$

Setzt man

$$f(u_1, \dots, u_p) = (t_1, \dots, t_p)_m + \dots$$

so kann man die Entwicklung so darstellen, daß

$$(t_1, \alpha_1, 0, \dots, 0)_m \geq 0$$

Dann können wir die folgenden Formeln entwickeln

$$f(u_1, \dots, u_p) = f_1(t) + f_2(t_1, \dots, t_p)$$

wo f_1 sicher mit der ersten f_1 beginnt. Wenn man jetzt $t_1, \dots, t_p$ unendlich klein so wird es also genau in unendlich kleinen Resten t_1 für die f entwickelt. Also

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_p) &= (t_1 - t_1') / (t_1 - t_1'') \dots (t_1 - t_1^{(m)}) + f_2(t) \\ &= (t_1^m + t_1^{m-1} f_1'(t_1, \dots, t_p) + \dots) \cdot f_2(t_1, \dots, t_p) \\ &= f_1(u_1 - a_1, \dots) f_2(u_1 - a_1, \dots) \end{aligned}$$

f_1 ist hierbei eine f. g. d. die mit $(u_1, u_2)^m$ überfängt mit Gln.
dann mit einem beginnend. so ist dann

$$d \lg f(u_1, \dots, u_p) = d \lg f(u_1 - a_1, \dots) + \sum_2 \frac{f_2}{f_1}(u_1 - a_1, \dots) du_2$$

Dieser Satz ist eine Umkehrung richtig.

Angenommen man habe ein vollständiges Differential

$\sum g_\alpha(u_1, \dots, u_p) du_\alpha$, wobei die g für alle endlichen Werte der u definiert
ist. mit dem L. f. v. d. L. f. ist, so dass sie sich in der Umgebung
beliebiger Stellen $a_1, \dots, a_p$ als Potenzen zweiter Ordnung. Reichen der
stellen können. Angenommen man kann sie auf die Form bringen

$$\sum g_\alpha(u_1, \dots, u_p) du_\alpha = d \lg f(u_1 - a_1, \dots) + \sum_2 \frac{f_2}{f_1}(u_1 - a_1, \dots)$$

was f_1 mit Gleichem mit einem beginnend, so wird es fast mög-
lich sein, eine d. f. $f(u_1, \dots, u_p)$ herzustellen, so dass

$$d \lg f(u_1, \dots, u_p) = \sum g_\alpha(u_1, \dots, u_p) du_\alpha$$

Lehrsatz. Man setze für $a_1 = a_2 = \dots = 0$

$$\sum g_\alpha(u_1, \dots, u_p) du_\alpha = d \lg f_1^{(m)}(u_1, \dots, u_p) + \sum_2 \frac{f_2}{f_1}(u_1, \dots, u_p)$$

Man erhält folgendes Sat.

$$f_1(u_1, \dots, u_p) = f_1^{(m)}(u_1, \dots, u_p) e^{P_1} = f_1^{(m)} \cdot \frac{f_2}{f_1}$$

Ein klein Wortes der u ist sehr leicht für eine Lösung.

Man setze nun $u_1 = a_1, \dots, u_p = a_p$ für noch den Gangen der
einzelnen Lösungen. Dann lässt sich wieder ableiten:

$$f(u_1, \dots, u_p) = f_1^{(m)}(u_1 - a_1, \dots) \frac{f_2}{f_1}(u_1 - a_1, \dots)$$

Dieser Satz stimmt mit der früheren für kleine Werte u überein,
was, ist richtig. u für alle geringen f. g. der ersten Lösung d.
Anschließend. Die d. f. ist also über eine Funktion ausgedr.

Dieser Satzung gehen wir zu der unterbrochenen
Fortsetzung zu.

Man setze:

$$f(u_1 + u_2, \dots) = f(u_1, \dots)$$

Somit folgt

XVII

$$d \lg M(x/u) = \sum [\varphi(u, u, \dots)_x - \varphi(u, u, \dots)_x + u'_x - u''_x] du_x$$

Somit ergibt sich weiter:

$$d \lg \frac{M(x_1/u_1 + u'_1, \dots)}{M(x_0/u_1 + u'_1, \dots)} = \sum [\varphi(u_1 + u'_1 - u''_1, \dots)_x - \varphi(u_1, \dots)_x + u'_1 - u''_1] du_x$$

$$d \lg \frac{M(x_1/u_1 + u'_1, \dots)}{M(x_0/u_1 + u'_1, \dots)} \cdot \frac{M(x_2/u_2 + u'_2 - u''_2, \dots)}{M(x_1/u_2 + u'_2 - u''_2, \dots)} = \sum \{ \varphi(u_2 + u'_2 + u'_1 - u''_1, \dots)_x - \varphi(u_2, \dots)_x + u'_2 - u''_2 + u'_1 - u''_1 \} du_x$$

u. s. w.

Die Ableitung wegen seiner die Logarithmierung an

$$d \lg P = \sum \{ \varphi(u, \dots)_{x_{2s-1}} - \varphi(u, \dots)_x - W'_x \} du_x$$

oder

$$P = \frac{M(x_{2s-1}, y_{2s-1} / u_1 + u'_1, \dots)}{M(x_1, y_1 / u_1 + u'_1, \dots)}$$

$$W'_x = u'_x; \quad W'_x = u'_x - u''_x; \quad W'_x = u'_x - u''_x + u'''_x - \dots; \dots$$

weil man W' die entsprechenden mit Vorzeichen versehenen Größen bedeutet.

Dann kann man schreiben

XVIII

$$\sum q_x(u, \dots) du_x = \sum \{ \varphi(u, \dots)_{x_{2s-1}} - W'_x \} du_x = d \lg P$$

so ist aber $q_x = \varphi(u, \dots)_x$ u. φ die Summe von $2s$ Gliedern. φ ist also mit Berücksichtigung von $2s$ Stellen der Form einer ganzen von $2s$ u. dergleichen besteht mit φ steht.

Man kann $q_1, \dots, q_s$ solche Stücke in deren Umgebung $\sum \varphi$ der Form einer ganzen von $2s$ ist, setzen $q_1, \dots, q_s$ ganz beliebigen Stellen, so können wir die Form $x_1, y_1, \dots, x_{2s-1}, y_{2s-1}$ stets so wählen daß $q_x + W'_x = q_x$ wird.

Dann diese geforderte Gl. ist vollst. befriedigt:

$$W'_x + W'_x + \dots + W'_x = q_x - q_x + W'_x + W'_x + \dots + W'_x$$

Die Form $x_1, y_1, \dots, x_{2s-1}, y_{2s-1}$ müssen wir nun ganz willkürlich so finden, daß die entsprechenden W'_x bestimmt.

Daher wird $K_2 = -(u_1 + u_2 + \dots + u_p)$ so angesetzt. Die letzte Gl.

$$\int_{a,b}^{x,y} H_1 dx + \int_{a,b}^{x,y} H_2 dx + \dots + \int_{a,b}^{x,y} H_p dx = K_2 + g_2 - c_2 + u_1' + u_2' + \dots + u_p'$$

Die Richtigkeit dieser Gl. folgt aber aus dem obigen Theorem, denn wir können die vorgelegte Fläche als Summe von $p + p'$ Theilen aufzerlegen. Vertheilen wir auf p mit gegebenen inneren Grenzen und dem

Jetzt setzen wir $u_2 = c_2 + v_2$ so wird die Gl. XVIII

$$\sum_{\alpha} Q_{\alpha}(c, v, \dots)_{\alpha} dv_{\alpha} = \sum_{\alpha} \{ Q(v, g, \dots)_{\alpha} - K_{\alpha} \} dv_{\alpha} - d \lg P. \quad \text{XVIII'}$$

Der Zweck dieser Umgestaltung ist der, daß die Entwicklung der Summe auf der rechten Seite eine gewisse Sj. Sj. giebt. Man findet sie in Paarsystemen $x, y, x', y', \dots, x_p, y_p$ willkürlich gewählt; wie können sie dazu aussuchen, daß $P = 0$ nicht dann wird man das Manne verfahren, dann dazu kommen die Punkte und so weiter. nehmen zu werden, daß sie nicht in der Umgebung der $a, b, \dots, g, h$ liegen (V. 62) bestimmt sind dann aber die $x, y, \dots$ bestimmt in man diese in der Nähe der a, b liegen, so könnte $P = 0$ werden, indem das Manne verfahren. Längst z. B. x, y in der Nähe von a, b so wird nach V. 63 III für gewisse Punkte $u, \dots, u_p$ in der Nähe von $x, y, \dots, x', y'$ die mit der Gl. V. 59. IV bestimmt sind nach derselben Formel bestimmt dann

$$\lg M(x, y, u, \dots, u_p) \text{ mit } + \lg(t - t_0) = + \lg \tau$$

so für $t = t_0$, $M = 0$ wird, also negativ

$$- d \lg P. d \lg \frac{M(x, y, u)}{M(x, y, u)}$$

es ist daher unser Selbstzweck ist die Lösung der vorstehenden in man können setzen

$$d \lg Q(u_1, \dots, u_p) = \sum_{\alpha} Q(u_1, \dots, u_p)_{\alpha} du_{\alpha}$$

XIX

2. Q ist eine selbst Lösung. Man ist, folglich ist es auf M .

Die Punkte $x, y, \dots, x, y, y$ sind O. v. VIII. Nun ist aber $S = 2(n-1) + 2p$ also R vom Grade $S+2 = 2(n+p)$, $2n+p$ Punkte können wir für null $R=0$ mind. so wählen also auf p beliebig, $x'_1, y'_1, \dots, x'_p, y'_p$.
Wir werden jetzt auf hier S die obige Gleichung setzen.

$$\sum_i J(x_i/a) + \sum_i J(y_i/a) + 2 \sum_i J(\infty/a) = \sum_i J(q_i/a) + 2 J(x_0 y_0/a) \quad \text{XXII}$$

Jetzt können wir die Luth. Neg. beliebig wählen. Sei die Luth. & der Gult. erfüllt man

$$\sum_i J'(x_i/a) + \sum_i J'(y_i/a) + 2 \sum_i J'(\infty/a) = \sum_i J'(q_i/a) + 2 J'(x_0 y_0/a) - [y R(x_i)]_{t+1} \quad \text{XXII}'$$

Es bleibt man nun XXII $2 \sum_i J(q_i/a)$ so mind

$$\sum_i [J(x_i/a) - J(q_i/a)] = -u_a + 2C_a'$$

$$2C_a' = \sum_i J(q_i/a) + 2 J(x_0/a) - 2 \sum_i J(\infty/a) - 2 \sum_i J(q_i/a)$$

2. folgend

$$\sum_i [J'(x_i/a) - J'(q_i/a)] = -\psi/a + 2C_a' - [y R(x_i)]_{t+1}$$

$$2C_a' = \sum_i J'(q_i/a) + 2 J'(x_0/a) - 2 \sum_i J'(\infty/a) - 2 \sum_i J'(q_i/a)$$

XXIII

Man setzt voraus dass x_i, y_i mit x, y aufsteht wenn man $-u_a + 2C_a'$ stellt u_a folgt, & man hat man hier auf die gleiche das obige Formale so mind

$$\psi(-u_a + 2C_a' \dots -u_p + 2C_p') = -\psi(u_1 \dots u_p/a) + 2C_a' - [y R(x_i)]_{t+1}$$

XXIV

Summe sei $C_a = C_a + \tilde{u}_a'$ $C_a' = C_a' + \tilde{u}_a'$ so dass

$$\psi(-u_a + 2C_a + 2\tilde{u}_a' \dots -u_p + 2C_p + 2\tilde{u}_p') = -\psi(u_1 \dots u_p/a) + 2C_a + \tilde{u}_a' - [y R(x_i)]_{t+1}$$

Nun wollen wir die Gleichung $-[y R(x_i)]_{t+1}$ festbestimmen. Sei h_i können wir also x, y frei wozu setzen & müssen das fest setzen so, dass es sich die Grange x, y nicht. Nun wenn

$$H(x_i, y_i) \frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{t-t} + f(t, t) = H_0 + H_1 t + \dots$$

$$H_0 = -\frac{1}{t} + f_0(t); H_1 = -\frac{1}{t^2} + f_1(t); \dots$$

folgt es $R(x_i) = c \left[\frac{dH_0}{dt}, \frac{dH_1}{dt}, \dots \right]$

$$\begin{aligned} \int R(\vec{x}) &= \int c + \int \left[1 + \frac{\frac{dH}{dt}}{\frac{dH_0}{dt}} t \right] - \int \frac{dH}{dt} \\ \left[\int R(\vec{x}) \right]_{t=0}^{t=1} &= \frac{\frac{dH}{dt}}{\frac{dH_0}{dt}} = \frac{\frac{2}{c^2} + \frac{p_0'(c)}{c^2}}{\frac{2}{c^2} + \frac{p_0'(c)}{c^2}} = c^{-1} \frac{2+c^2 p_0'}{1+c^2 p_0'} \\ &= 2c^{-1} + c p_0'(c) \end{aligned}$$

Wir setzen daher

$$\psi(-u, +2c, +2\vec{n}, \dots)_\alpha = -\psi(u, \dots)_\alpha + \lim \{ 2c'_\alpha + 2\vec{n}'_\alpha - 2c^{-1} - c p_0' \}$$

Der Wert x_0 in der Nähe von x_α liegt, so ist

$$\vec{n}'_\alpha = T(u_\alpha) + c^{-1} + c p_0'(c)$$

$$\lim (\vec{n}'_\alpha - c^{-1}) = \vec{n}'_{\alpha\alpha} \quad \lim \vec{n}'_\alpha = \vec{n}'_{\alpha\alpha}$$

$$\psi(-u, +2c, +2\vec{n}, \dots)_\alpha = -\psi(u, \dots)_\alpha + 2c'_\alpha + 2\vec{n}'_{\alpha\alpha}$$

Man kann sich u_j um $c_j + n_{j\alpha}$

XXV

$$\psi(-u, +c, +n_{\alpha\alpha}, \dots)_\alpha - c'_\alpha - \vec{n}'_{\alpha\alpha} = -\{ \psi(+u, +c, +n_{\alpha\alpha}, \dots) - c'_\alpha - \vec{n}'_{\alpha\alpha} \}$$

Man kann also ψ um solche Werte verschieben, daß es eine
eigentliche L. wird. Insoweit definitionen sind

XXVI

$$d \log M(u, \dots, u_p) = \sum_\alpha [\psi(u, c, +n_{\alpha\alpha}, \dots) - c'_\alpha - \vec{n}'_{\alpha\alpha}] du_\alpha$$

Somit wird

XXVII

$$d \log M(u, \dots, u_p) = d \log M(-u, \dots, -u_p) / \text{const.}$$

$$M(u, \dots, u_p) = C M(-u, \dots, -u_p)$$

Setzt man $u = 0$ in M an, so findet man, daß $C = +1$

an, wenn M , so an sich selbst, wenn man u um u verschiebt
da M dann nicht identisch an sich selbst, sondern M ist

XXVII'

$$M(u, \dots, u_p) = \pm M(-u, \dots, -u_p)$$

Gehen wir auf P. 68. Gl. XII zurück. Insoweit ändert

$$d \log M(xy, u, \dots, u_p) = \sum_\alpha [\psi(u, -u, +n_{\alpha\alpha}, \dots) - \psi(u, -u_0 + n_{\alpha\alpha}, \dots) + \vec{n}'_\alpha - \vec{n}'_{\alpha\alpha}] du_\alpha$$

Es ist

$$M(xy, u, \dots, u_p) = C e^{\sum_\alpha u_\alpha (\vec{n}'_\alpha - \vec{n}'_{\alpha\alpha})} \frac{M(u, -c, -n_{\alpha\alpha}, \dots)}{M(u, -c, -n_{\alpha\alpha}, \dots)}$$

Die Constante wird bestimmt, indem man $u_1 = u_2 = \dots = u_p = 0$ setzt.

FF.

XXVIII

$$M(u_1, \dots, u_p) = \frac{\partial}{\partial u_i} \lg M(u_1, \dots, u_p) = \psi(u_1 + \epsilon_1 + u_{12}, \dots) - \epsilon'_\alpha - u'_{\alpha\alpha}.$$
$$u_3 = \sum_{\alpha} \int_{\alpha}^x H(x/\beta) dx.$$
$$\psi_{\beta\beta} = \psi'_{\beta} - \psi'_{\beta\beta} = \mathcal{I}'_{\beta} - \mathcal{I}'_{\beta\beta} = A(\psi - \psi_{\beta\beta}) + \psi'_{\beta} + \psi'_{\beta\beta}$$

vol 2

da wir auf die Zeit der polygonometrischen in XXIII Läng
Mß und Breiten können, fügen wir ein

und sofort man mit in $M(xy|u, \dots, u_n)$ die Größen $a_0, b_0, a_1, b_1, \dots$
 von oben her. $\bar{F}$ abwärts abspingt, mit in ihre Lagerung
 einbaue.

XXVIII

Wir haben also unsere Aufgabe gelöst, indem wir M als Quotient der M in Bezug auf den Ring R in M in einem gewissen R -Modul darstellen konnten.

$$\begin{aligned} \lg M(u, \dots, u_p) &= \lg M(-u, \dots, -u_p) + \lg \varepsilon \\ \lg M(\tilde{u}, \dots, \tilde{u}_p) &= \lg M(-\tilde{u}, \dots, -\tilde{u}_p) + \lg \varepsilon \end{aligned}$$

Lemma

$$\begin{aligned} \lg M(u, +2\tilde{u}, \dots) &= \lg M(u, \dots) + \sum 2\tilde{\eta}_a u_a + c \\ \lg M(\tilde{u}, \dots) &= \lg M(-\tilde{u}, \dots) + \sum 2\tilde{\eta}_a (-\tilde{u}_a) + c \\ c &= \sum 2\tilde{\eta}_a \tilde{u}_a + \lg \varepsilon \end{aligned}$$

Satz

$$\begin{aligned} \lg M(u, +2\tilde{u}, \dots) &= \lg M(u, \dots) + \sum (u_a + \tilde{u}_a) 2\tilde{\eta}_a + \lg \varepsilon \\ M(u, +2\tilde{u}, \dots) &= \pm C M(u, \dots) e^{\sum 2\tilde{\eta}_a (u_a + \tilde{u}_a)} \\ M(\tilde{u}, \dots) &= \pm C M(-u, \dots) \end{aligned}$$

Satz aus XXVII'

$$M(u, +2\tilde{u}, \dots) = \pm M(u, \dots) e^{\sum 2\tilde{\eta}_a (u_a + \tilde{u}_a)} \quad I.$$

Dies. Lemma zeigt uns nun vorzubereiten dass M eine in-
 teress. L. von x & y ist. Dies unsere Bestimmung zeigt, ändert
 sich M nicht, wenn man u_a um eine Periode $2\tilde{u}_a$ vermindert. Es ist
 also wirklich invariant. Mit Berücksichtigung der Genugth. d. d. bleibt
 M endlich, für x wird c für die gegebenen Maasse $x, y, \dots, x, y$.
 Und nun $y, y, \dots, y$ die zu x gehörigen Maasse so ist
 $M(x, y, u, \dots) M(x, y, u, \dots) \dots M(x, y, u, \dots)$
 die gesüßte rationale L. von x , deren Divisoren die gegebenen x
 sind.

Dies. müssen, dass $d \sum_{i=1}^n T'(x, y)_a = \sum_{i=1}^n H'(x, y)_a dx$ eine rationale L.
 von x ist. Es lässt sich zeigen, dass dieselbe $= 0$ sein muss. $T'(x, y)_a$
 kann man für $x = a_a$, & von der ersten Ordnung werden. Die
 L. von H' ist die in der ersten $\S$ in der Entwicklung von $H(x, y, x)$
 in der Definitionformel von $H(x, y, x)$ (S. 41) leicht zu erkennen.
 dass die L. von $\sum_{i=1}^n H'(x, y)_a$ eine L. von x ist, dass die L. von $\sum_{i=1}^n T'(x, y)_a$ eine L. von x ist.

$n-1$ in G . $\frac{d}{d\tau}$. Dieser verschwindet aber nur für die singulären
Werte von $f(x,y)=0$; Da jedoch $\frac{d}{d\tau}$ für $x=\infty$, ∞ verschwindet, also nicht
verschwindet für ∞ folgt, daß $\int \frac{d}{d\tau} d\tau = d \int \frac{d}{d\tau} d\tau$ identisch 0 sein; d.h.
da f konstant ist, so ist $\frac{d}{d\tau} f(x,y)$ identisch 0, d.h. f ist
von x unabhängig, $\frac{d}{d\tau}$ dieser ist in der Umgebung der
Grenzfälle rational für. Deshalb wird

$$\frac{d}{d\tau} f(x,y) = c \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)}$$

Kann man daher die Werte von f für $x=1$ durch x
so kann man daraus auch die Lagrange'sche Interpolations-
formel der Gl. selbst erhalten, nach der gegebenen Werte
 $x_1, x_2, \dots, x_n$ liefert.

Sei die Gl

$$f(u, \pm 2\tilde{u}, \dots) = \pm f(u, \dots) e^{\sum \tilde{u}_i' / (u + \tilde{u}_i')}$$

ist die Gl. f soll man bestimmen. Man kann mit dieser
Definition f auf die Parameter $\tilde{u}$ in $\tilde{u}'$ setzen. Sei $\tilde{u}$
 $\varepsilon = \pm 1$ so wird nach der obigen Formel

$$f(u, \pm 2\tilde{u}, \pm 2\tilde{u}', \dots) = \varepsilon \varepsilon' f(u, \dots) e^{\sum (\tilde{u}_i' / (u + \tilde{u}_i') + \tilde{u}_i' / (u + \tilde{u}_i'))}$$

$$f(u, \pm 2\tilde{u}, \pm 2\tilde{u}', \dots) = \varepsilon \varepsilon' f(u, \dots) e^{\sum (\tilde{u}_i' / (u + \tilde{u}_i' + 2\tilde{u}_i') + \tilde{u}_i' / (u + \tilde{u}_i'))}$$

Manchmal man die konstanten, so ergibt es sich,
d.h.

$$e^{\sum \tilde{u}_i' / \tilde{u}_i'} = e^{\sum \tilde{u}_i' / \tilde{u}_i'}$$

Sup also

$$\sum \tilde{u}_i' / \tilde{u}_i' - \sum \tilde{u}_i' / \tilde{u}_i' = 2\pi i$$

oder einfacher

$$\sum (\tilde{u}_i' / \tilde{u}_i' - \tilde{u}_i' / \tilde{u}_i') = \frac{n}{2} \pi i$$

Da n selbst zu bestimmen ist, hängt natürlich von
der Wahl der beiden Parameter $\tilde{u}$ ab. Sei umgekehrt

Metformin kann das n nicht bestimmen, Inzif ist die Standardsubstanz
 die in der Analyse sehr häufig in der Analyse der verschiedenen
 Substanzen in allgemein geteilt werden.

Kapitälige.

Im Laufe der Verlesung werden zu den besonderten
Specien bündelnde Leipzige dargestellt. Diese haben wir
früher nicht vorgekommen. Den den Gang nicht zu unterbrechen.
Aufgaben mögen sich eine Stelle finden.

Die Part. B. u. C. würde die Entwicklung von

$$y^n = R(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot (x-a_2)^{m_2} \cdots (x-a_r)^{m_r}$$
 bezeichnen. Die $a_1, \dots, a_r$ seien von einander verschieden. Ist
 dann x von diesen verschieden, so läßt sich y nach Potenz von x
 von $x-a$ entwickeln, es ist dann $b^n = R(a)$

$$\left(\frac{y}{b}\right)^n = \frac{R(x)}{R(a)} = 1 + C_1(x/a) + C_2(x/a)^2 + \dots$$

$$y = b \left(1 + C_1(x/a) + \dots \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$= b + d_1(x/a) + d_2(x/a)^2 + \dots$$

b hat aber n Werthe u. also auch y . Wenn erfüllt diese für
 den wirt. f. u. g. l. von $f. a$, u. f. u. g. l. von x . Die f. u. g. l. von
 $x = a_1$ dann wird

$$y^n = (x-a_1)^{m_1} \cdot R_1(x)$$

$$= R_1(a_1)/(x-a_1)^{m_1} \left[1 + \frac{R_1'(a_1)}{R_1(a_1)}(x/a_1) + \dots \right]$$

Wenn sei $n = g \cdot v$ $m_1 = g \cdot \mu_1$ wo v u. μ_1 teilerlos geg. zu
 einander sein sollen. Bestimmt man λ u. κ so daß

$$v\lambda + \mu_1\kappa = 1$$

u. sei $R_1(a_1)/(x-a_1)^{\mu_1} = C$, so daß C, g verschieden. Dann fest
 dann wird

$$R_1(a_1)/(x-a_1)^{m_1} = C^\lambda \cdot g^{(v\lambda + \mu_1\kappa)/(x-a_1)} \cdot g^{\mu_1\kappa}$$

$$= [C^\lambda/(x-a_1)] g^{\mu_1\kappa} \cdot C^\lambda g^{v\lambda}$$

In der letzten Ableitung wüßten Sie vorgelegene Function auf
Polynomtheorie ist unmöglich.
 für $f(x)$

$$f^2 = R(x) = (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{p-1})$$

oder

$$g^2 = R(x) = (x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_{p-1})$$

so läßt Sie leicht sehen, daß eine einfache Function
 in die Form $x^2 + px + q$ überführt werden kann. Die Wurzeln $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$
 seien sämtlich von einander verschieden, so daß a_0 von jeder
 Größe a_i verschieden ist, so daß die obige Formel aufgeführt
 wird. Wenn man diese Wurzeln derselben Formel beifügt
 den complexen. Zieht man nun die gebrauchte Linie $x, a_0,$
 $a_1, \dots, a_{p-1}$ so schneidet sich dieselbe niemals selbst in einem
 der Punkte in $\mathbb{C}$. Folglich ist die Funktion $f(x)$ nicht

$$\sqrt{x-a_0} = \sqrt{x-a_1} \dots \sqrt{x-a_{p-1}}$$

den letzten Factor der rechten Seite nach dem binomischen Satz
 für $x \rightarrow \infty$ diese Größe eindeutig bestimmt ist. Wenn 2 ungerade
 ist, so ist für alle p die Linie so lange nicht die gebrauchte
 Linie geschnitten wird. Ausgenommen sind nur die Fälle
 der Linie selbst, nach vorstehendem Satz. Man sieht, daß
 man sich hier von der einen oder der anderen Seite
 entfernt. In

$$g = \sqrt{x-a_0} \sqrt{x-a_1} \dots \sqrt{x-a_{p-1}}$$

ist also die Linie bestimmt. Linie jeder Factor eindeutig
 ist, für welche die Linie eindeutig bestimmt ist.

Man sieht leicht, daß p wirklich die Ordnung der Linie ist.
 Diese Linie ist für alle $x, y, \dots, x, y$ die Linie.

geposten Resten von für die H auf ∞ werden soll, so ist

$$H(x, x') = \sum_{\lambda} \frac{c_{\lambda}(y+y')}{x-x_{\lambda}} + \frac{c'_{\lambda} y y'}{x-x_{\lambda}}$$

Andernf. kürzen auf $\frac{y+y'}{x-x'}$ zu setzen, das

$$\sum_{\lambda} \frac{c_{\lambda} y}{x-x_{\lambda}} + \frac{c'_{\lambda}}{x-x_{\lambda}} = y \left(\sum_{\lambda} \frac{c_{\lambda}}{x-x_{\lambda}} + \frac{c'_{\lambda}}{x-x_{\lambda}} \right)$$

das Gd. des Bruchs um $p-1$ größer ist als der des Nenners

$$\text{dieser wenn } \sum_{\lambda} \frac{c_{\lambda}}{x-x_{\lambda}} + \frac{c'_{\lambda}}{x-x_{\lambda}} = \frac{1}{\pi(x-x_{\lambda})/x-x'}$$

gemacht wird, die d. für $x=\infty$ nicht ∞ wird. also versch. c. können

man wird diesen Gl. bestimmen werden. Dargestellt man

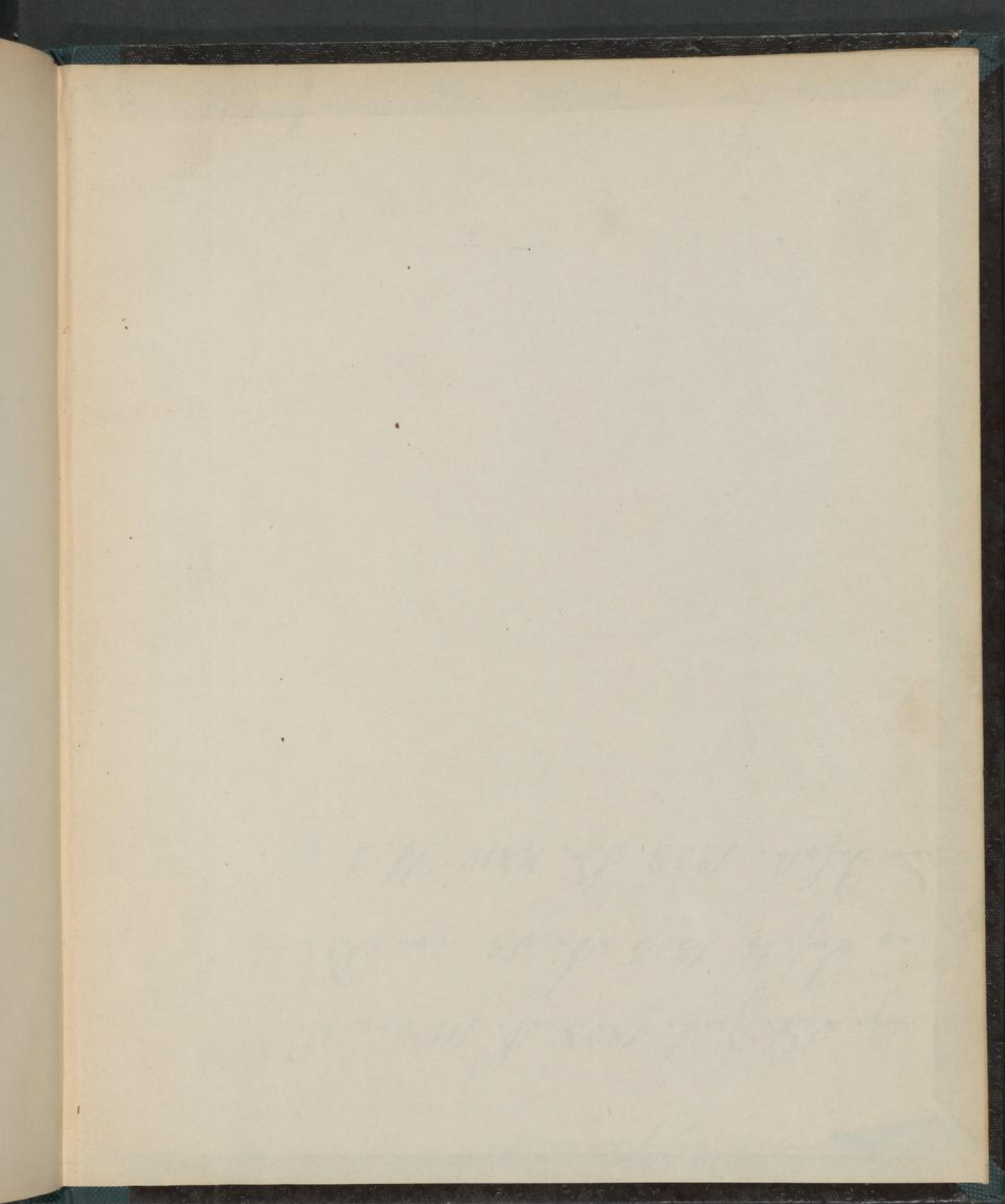
$$(x-x_1)/(x-x_2) \dots (x-x_r) \text{ mit } P(x)$$

so erkennt man dass

$$H(x, x') = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{P(x')}{y'} \frac{y}{P(x)} \right\} \cdot \frac{1}{x'-x}$$

$$H(x)_a = \frac{1}{2} \frac{P(x)}{(x-a_r)} \cdot \frac{1}{y}$$

$$H'(x)_a = \frac{1}{2} \frac{Q(x)}{Q} \cdot \frac{1}{P(x)}$$











Handschr.
N.F.
706

