I

F. Engel.

Dr Hilbert.

Elemente der Euklidischen Geometrie.

Göttingen, Wintersemester 1898/99.

Vorwort.

Das vorliegende Heft enthält die von mir unter Aufsicht vo
Herrn Prof. Hilbert angefertigte Ausarbeitung seiner Vorlesung
über die Elemente der Euklidischen Geometrie (Göttingen, W
Da die Vorlesung grossenteils neue Entwicklungen und Frageste
lungen enthält, erschien es zweckmässig und entsprach den W
schen vieler Zuhörer, die Ausarbeitung zu vervielfältigen, zunä
und hauptsächlich nur für den Gebrauch der Zuhörer selbst. So e
stand die vorliegende Autographie, von der nur 70 Exemplare
gestellt wurden. Die wichtigsten der in diesem Heft enthalte
Untersuchungen finden sich, zum Teil in anderer Fassung un
ausführlicher, in der Abhandlung von Hilbert in der Festschr
zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals (Juni 1899) zu Göttingen.

Göttingen, im März 1899.

H. v. Schaper.

Einleitung.

Die elementare (Euklidische) Geometrie hat zum Gegenstande die Thatsachen und Gesetze, die uns das räumliche Verhalten der Dinge darbietet. Ihrer Struktur nach ist sie im System von Sätzen, die – im grossen und ganzen wenigstens – auf rein logischem Wege aus gewissen selbst unbeweisbaren Sätzen, den Axiomen, hergeleitet werden. Dieses Verhalten, wie wir es in geringerer Vollkommenheit z. B. auch bei der mathematischen Physik finden, drückt sich am kürzesten in dem Satz aus: Geometrie ist die vollkommenste Naturwissenschaft.

Je mehr nun eine Naturwissenschaft ihrem Ziele: „logische Herleitung aller zu ihrem Gebiet gehöriger Thatsachen aus gewissen Fundamentalsätzen" sich nähert, desto notwendiger wird es, diese Axiome selbst genau zu untersuchen, ihre gegenseitigen Beziehungen zu erforschen, ihre Anzahl möglichst zu vermindern u. dergl.

Diese Untersuchung soll in dieser Vorlesung für die Euklidische Geometrie angestellt werden; wir werden dabei nicht nur einem wissenschaftlichen Bedürfnis genügen, sondern auch wichtige Resultate und fruchtbare Gesichtspunkte erhalten.

Es ist von Wichtigkeit, den Ausgangspunkt unserer Untersuchung genau zu fixiren: Als gegeben betrachten wir die Gesetze der reinen Logik und speciell die ganze Arithmetik. (Ueber das Verhältnis zwischen Logik und Arithmetik vgl. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen?) Unsere Frage wird dann sein: Welche Sätze müssen wir zu dem eben definierten Bereich „adjungiren", um die Euklidische Geometrie zu erhalten?

Mit Benutzung eines Ausdrucks von Hertz (in der Einleitung zu den „Prinzipien der Mechanik") können wir unsere Hauptfrage so formuliren: Welches sind die notwendigen und hinreichenden und unter sich unabhängigen Bedingungen, denen man ein System von Dingen unterwerfen muss, damit jeder Eigenschaft dieser Dinge eine geometrische Thatsache entspreche und umgekehrt, damit also diese Dinge ein vollständiges und einfaches „Bild" der geometrischen Wirklichkeit seien?

Endlich können wir unsere Aufgabe als eine logische Analyse unseres Anschauungsvermögens bezeichnen; die Frage, ob unsere Raumanschauung apriorischen oder empirischen Ursprung habe, bleibt dabei unerörtert. –

Durch das gesagte bestimmt sich das Verhältnis dieser Vorlesung zu denen über analytische und projektive Geometrie.

In beiden Disciplinen werden die principiellen Fragen nicht behandelt; in der analytischen Geometrie beginnt man mit der Einführung der Zahl, wir dagegen werden die Berechtigung hierzu genau zu untersuchen haben, sodass bei uns die Einführung der Zahl geradezu den Schluss bilden wird; in der projectiven Geometrie appelliert man von vornherein an die Anschauung, wogegen wir ja die Anschauung analysieren wollen, um sie dann sozusagen aus ihren einzelnen Bestandteilen wieder aufzubauen.

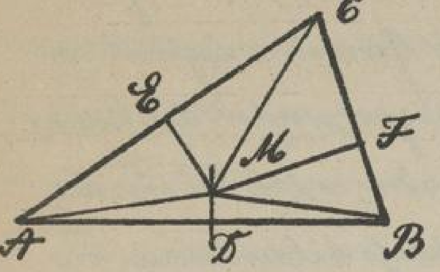
Wir werden im folgenden häufig Gebrauch von Figuren machen, wir werden uns aber niemals auf sie verlassen. Stets müssen wir dafür sorgen, dass die an einer Figur vorgenommenen Operationen auch rein logisch gültig bleiben. Es kann dies gar nicht genug betont werden; im richtigen Gebrauch der Figuren liegt eine Hauptschwierigkeit unserer Untersuchung. (Vgl. darüber Pasch, Neuere Geometrie, pag. 3.)

Welches Unheil der unüberlegte Gebrauch von Figuren stiften kann, mag das folgende Beispiel zeigen. Wir beweisen den absurden Satz:

Jedes Dreieck ist gleichschenklig.

Halbieren wir den Winkel C, errichten wir die Mittelsenkrechte auf AB, und fällen wir vom Schnittpunkt M der genannten Graden die Lote ME und MF.

Dann ist:



1) $\Delta CEM \cong \Delta CFM$,

2) $\Delta AMD \cong \Delta BMD$,

3) $\Delta AEM \cong \Delta BFM$.

Also hat man:

$CE = CF$, $AE = BF$, woraus durch Addition folgt:

$AC = BC$. q. e. d.

Der Fehler liegt lediglich in der falsch gezeichneten Figur. –

<u>Litteratur</u>: Wir nennen nur 2 Werke:

1) <u>Pasch</u>, Vorlesungen über neuere Geometrie 1882, ein sehr klares, aber auch sehr weitläufiges Buch.

2) <u>Killing</u>, Grundlagen der Geometrie, 2 Bände, weniger klar, aber sehr inhaltlich

---

Gehen wir nun an unsere Aufgabe. <u>Zum Aufbau der euklidischen Geometrie denken wir uns drei Systeme von Dingen, die wir Punkte, Grade und Ebenen nennen und mit $A, B, C, \ldots$; $a, b, c, \ldots$; $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ bezeichnen wollen.</u> Durch die gewählten Namen dürfen wir uns nicht verleiten lassen, diesen Dingen etwa geometrische Eigenschaften beizulegen, wie wir sie gewöhnlich mit diesen Bezeichnungen verbinden. Bis jetzt wissen wir nur, dass jedes Ding des einen Systems von jedem Dinge der beiden andern Systeme verschieden ist. Alle weiteren Eigenschaften erhalten diese Dinge erst durch die Axiome, die wir in fünf Gruppen zusammenfassen:

I. Axiome der Verknüpfung.
II. Axiome der Anordnung oder Reihenfolge.
III. Axiome der Kongruenz oder Bewegung.
IV. Euklid's Parallelenaxiom.
V. Axiom des Archimedes.

Diese Axiome werden wir nun im einzelnen untersuchen.

I. Axiome der Verknüpfung.

Wir unterscheiden sieben.

1. Irgend zwei von einander verschiedene Punkte A, B bestimmen stets eine Grade a; wir setzen:

$$AB = a.$$

Statt „bestimmen" werden wir auch andere Ausdrücke gebrauchen, z.B. A liegt auf a, A ist ein Punkt von a, a geht durch A und B, a verbindet A und B, wir meinen dabei aber nichts anderes, als was das Axiom 1 aussagt.

2. Irgend zwei von einander verschiedene Punkte einer

Graden bestimmen diese Grade; d.h. wenn $AB = a$ und $AC = a$ und $B \neq C$, so ist auch $BC = a$.

Wollten wir nur ebene Geometrie treiben, so wären wir jetzt mit der ersten Gruppe fertig; eine Folgerung aus 1. und 2. ist z.B. dass zwei verschiedene Graden nicht zwei Punkte gemeinsam haben können.

3. Irgend drei nicht auf derselben Graden liegenden Punkte A, B, C bestimmen stets eine Ebene:

$$ABC = \alpha.$$

Auch hier werden wir sagen: A B, C liegen in α u. s. w.

4. Irgend drei Punkte A, B, C einer Ebene α, die nicht auf derselben Graden liegen, bestimmen diese Ebene.

5. Wenn zwei Punkte A, B einer Graden a in einer Ebene liegen, so liegt die Grade a vollständig in der Ebene, d. h. jeder Punkt von a liegt in α.

6. Wenn zwei Ebenen α, β einen Punkt A gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt B gemein.

Der Ausdruck: „α und β haben den Punkt A gemein" heisst natürlich nur: „A liegt in α und in β."

Wir betonen, dass 6. die Frage, ob zwei Ebenen stets oder auch nur jemals einen Punkt gemein haben, vollständig offen lässt.

7. Auf jeder Graden giebt es wenigstens zwei Punkte, in je-

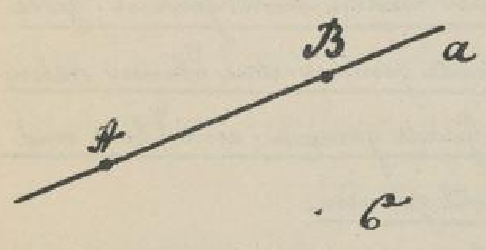
der Ebene wenigstens drei nicht auf einer Graden gelegene Punkte, und im Raum giebt es wenigstens vier, nicht in einer Ebene gelegenen Punkte.

Jedes dieser Axiome entspricht einer Thatsache der Beobachtung, die man etwa mit Kugeln, Drähten und Pappdeckeln anstellen kann. Über das Verhältnis zwischen Axiomen und Thatsachen vgl. man die schönen Ausführungen bei Hertz, Prinzipien der Mechanik.

Wie man aus den Axiomen folgert, zeigen wir, indem wir folgende zwei Sätze beweisen.

a) Durch eine Grade a und einen nicht auf ihr liegenden Punkt C geht stets eine und nur eine Ebene.

Beweis: Nach 7. giebt es auf a wenigstens zwei Punkte

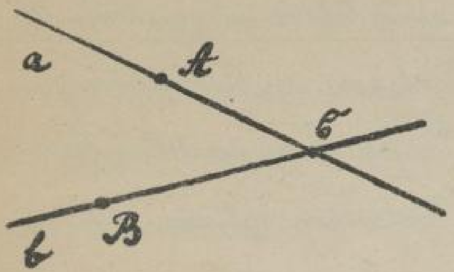


A, B; da C nicht auf a liegt, so ist $A \neq C$, $B \neq C$, und A, B, C liegen nicht auf einer Graden. Also bestimmen A, B, C nach 3 eine Ebene α, in welcher nach 5, die Grade a vollständig liegt. Aus 4 folgt, daß es nur eine Ebene von der verlangten Eigenschaft giebt.

b.) Durch zwei Grade a, b die einen Punkt C gemein haben, giebt es eine und nur eine Ebene.

Be-

Beweis: Nach 7. giebt es auf a und b mindestens noch je einen Punkt A und B, sodass $A \neq C$, $B \neq C$. A, B, C liegen nicht auf einer Graden, bestimmen also, und zwar eindeutig, eine Ebene α, in der a und b vollständig liegen.



Diesem Satz kann man auch die Form geben:
Zwei nicht in einer Ebene liegende Graden haben keinen Punkt gemein. Dieser Satz ist aber keineswegs umkehrbar; alles, was wir bis jetzt über gemeinsame Elemente wissen, ist dies, wie man leicht aus 1.–7. beweist:

Zwei Graden einer Ebene haben einen oder keinen Punkt gemein; zwei Ebenen haben keinen Punkt oder eine Grade gemein; drei Ebenen haben keinen Punkt oder einen Punkt oder eine Grade gemein; eine Ebene und eine Grade haben keinen oder einen Punkt gemein.

Nachdem wir die Axiome der ersten Gruppe aufgestellt haben, drängen sich zwei Fragen auf:

1.) Sind diese Axiome unter einander verträglich?

2.) Sind sie von einander unabhängig, d.h. ist etwa ein Axiom eine Folge der übrigen?

Die Beantwortung der ersten Frage schieben wir noch hinaus, da wir später ja zu zeigen haben werden, dass die Axiome aller 5 Gruppen miteinander verträglich sind. Dagegen wollen wir hier auf die Frage der Unabhängigkeit näher eingehen, jedoch nicht etwa beweisen, daſs jedes unserer sieben Axiome von allen andern unabhängig ist, sondern nur an einzelnen Beispielen das Verfahren erläutern, welches in folgendem besteht:

Um zu zeigen, daſs ein Axiom $\mathfrak{A}$ keine logische Folge der Axiome $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ ist, geben wir ein System von Dingen an, bei welchem $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \ldots$ gelten, $\mathfrak{A}$ aber nicht. Solche Systeme wird uns nach dem pag. 2 gesagten am einfachsten die Arithmetik liefern.

Wir wollen drei Beispiele geben.

a.) 2. ist keine Folge von 1.

Beweis: Als Punkte nehmen wir die ganzen rationalen positiven Zahlen, als Graden die ganzen rationalen negativen Zahlen (damit kein Punkt mit einer Graden identisch werden kann, pag. 5). Zwei Punkte $A = p_1$, $B = p_2$ mögen eine Grade g bestimmen nach dem Gesetz:

$$\left[\frac{p_1 p_2}{2}\right] = -g,$$

wo $[x]$ in üblicher Weise die grösste unterhalb x liegende ganze Zahl bezeichnet. 1. ist selbstverständlich erfüllt, denn g berechnet sich eindeutig aus p_1, p_2; hingegen ist 2. nicht erfüllt; setzen wir etwa $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, so wird $AB = -1$, $AC = -1$, dagegen $BC = -3$.

Oder man nimmt als Punkte die positiven und negativen ganzen rationalen Zahlen, als Graden die mit mit $i = \sqrt{-1}$ multiplizierten positiven ganzen rationalen Zahlen, und als Zuordnungsgesetz:

$$i \cdot p_1^2 p_2^2 = g.$$

1. g.

1. gilt selbstverständlich, 2. aber nicht; denn setzen wir $A = 1$, $B = 2$, $C = -2$, so wird $AB = 4i$; ebenso $AC = 4i$, dagegen $BC = 16i$.

b, 5 ist keine Folge der übrigen 6 Axiome.

Beweis: Unsere Systeme von Dingen werden wie hier dem Euklidischen Raum entnehmen und damit scheinbar eine grobe Inkonsequenz begehen, da doch die Euklidische Geometrie das Endziel aller unserer Betrachtungen sein soll. Wenn schon hier Eigenschaften des Euklidischen Raumes benutzt werden, so ist das lediglich als eine abkürzende Bezeichnung gewisser arithmetischer Beziehungen aufzufassen; so steht z. B. „Punkt" (des Euklid. Raumes) für „Tripel reeller Zahlen", „Ebene des R_3" für „Gesamtheit der einer linearen Gleichung zwischen x, y, z genügenden Zahlentripel" u. s. w.

Nach dieser Bemerkung wird das folgende kein Missverständniss erzeugen.

Als Punkte nehmen wir die Punkte des Euklidischen Raumes, mit Ausnahme eines einzigen Punktes O; als Graden nehmen wir die durch O gehenden Kreise; als Ebenen die gewöhnlichen Ebenen. Es braucht nicht näher ausgeführt zu werden, dass alle Axiome der ersten Gruppe mit Ausnahme von 5. gültig sind.

c.) 6 ist keine Folge der übrigen sechs Axiome.

Beweis: Als Punkte bezeichnen wir die Punkte des Euklidischen Raumes; dabei scheiden wir aber sämtliche Punkte einer Graden a aus, bis auf einen einzigen Punkt P, der wieder zu unsern Punkten gehören soll; als Graden bezeichnen wir sämtliche Graden des gewöhnlichen Raumes, a ausgenommen; als Ebenen endlich nehmen wir die Ebenen des R_3. Dann gelten alle Axiome I, nur das 6. nicht: denn zwei Ebenen, die im R_3 die Grade a gemein haben, haben in unserer soeben definierten Geometrie nur den Punkt P gemein.

Zum Schluss bemerken wir, dass die Unabhängigkeitsbeweise hier noch sehr einfach sind; später hingegen werden sie viele Schwierigkeiten darbieten.

II. Die Axiome der Anordnung od. Reihenfolge.

Bisher wissen wir über die Punkte einer und derselben Graden so gut wie nichts; hierüber geben uns die fünf Axiome der zweiten Gruppe Aufschluss, die man auch als Axiome über den Begriff „zwischen" bezeichnen könnte. Sie sind zuerst von Pasch aufgestellt worden, dessen Darstellung wir hier aber bedeutend vereinfachen werden.

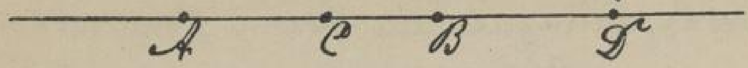
Die vier ersten Axiome dieser Gruppe beziehen sich auf die Geometrie auf der Graden und lauten:

1. Wenn A, B, C Punkte einer Graden sind, und C zwischen A und B liegt, so liegt C auch zwischen B und A.

Damit ist die erste Eigenschaft des Begriffs „zwischen" gegeben, die weiteren Eigenschaften dieses wichtigen Begriffs kommen in den folgenden Sätzen zum Ausdruck.

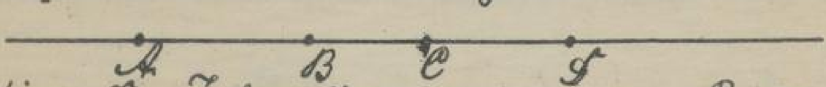
2. Wenn A, B zwei Punkte einer Graden sind, so giebt es stets wenigstens einen Punkt C, der zwischen A und B liegt, und wenigstens ei-

nen Punkt D, sodass B zwischen A und D liegt.



3. Unter irgend drei Punkten einer Graden giebt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden andern liegt.

4. Irgend vier Punkte A, B, C, D einer Graden können stets so angeordnet werden, dass B zwischen A und C und zwischen A und D, und ferner C zwischen A und D und zwischen B und D liegt.



Definition: Den Inbegriff aller zwischen zwei Punkten A und B einer Graden liegenden Punkte, nennen wir die „Strecke $\overline{AB}$". Von den Punkten zwischen A und B sagen wir, dass sie „innerhalb" der Strecke liegen, alle übrigen Punkte der Graden liegen „ausserhalb" der Strecke.–

Mit den bisher aufgestellten Axiomen lassen sich bereits viele geometrische Sätze beweisen; wir geben einige Beispiele dafür und beweisen zuerst:

a) Sind A, B, C, D Punkte einer Graden, sodass C zwischen A und B, und D zwischen A und C liegt, dann liegt auch D zwischen A und B, aber nicht zwischen C und B.

Beweis: Wir ordnen die Punkte A, B, C, D so an, wie es dem Axiom 4 entspricht; dann müssen offenbar C und D die zweite oder dritte Stelle erhalten. Wir kommen so auf folgende Anordnungen: A, C, D, B, B, D, C, A, A, D, C, B, B, C, D, A.
Von diesen Anordnungen genügen aber die beiden ersten den

Voraussetzungen nicht. Denn bei beiden Anordnungen läge C zwischen A und D, was nach 3. der Voraussetzung „D zwischen A und C" widerspricht; bei der dritten und vierten Anordnung ergibt sich

nach 4, dass C zwischen B und D liegt, also nach 3. nicht D zwischen C und B liegen kann.

b) Auf jeder Strecke giebt es unendlich viele Punkte.

Beweis: Nach 2. giebt es auf $\overline{AB}$ wenigstens einen Punkt C; ebenso giebt es auf $\overline{AC}$ wenigstens einen Punkt C'; nach dem Satz a) liegt dann auch C' auf $\overline{AB}$, aber nicht auf $\overline{CB}$. Weiter giebt es auf $\overline{AC'}$ wenigstens einen Punkt C'', der ebenfalls auf $\overline{AB}$, aber nicht auf $\overline{C'B}$ liegt, also, da C auf $\overline{C'B}$ liegt, nicht mit C identisch sein kann. Auf diese Weise erhalten wir immer neue Punkte von $\overline{AB}$, ohne jemals zu Ende zu kommen.

c) Ist A, B, C, D eine dem Axiom 4 entsprechende Anordnung von vier Punkten, so giebt es ausser dieser Anordnung nur noch die umgekehrte D, C, B, A, welche dem Axiom 4. entspricht.

Der Beweis ist im wesentlichen schon bei a) gegeben.

d) Sind A, B, C, D ... K eine endliche Anzahl von Punkten einer Graden, so lassen sich dieselben stets in eine Reihe bringen, sodaß B zwischen A einerseits und C, D, ... K andrerseits, C zwischen A, B einerseits und D, ... K andrerseits u. s. w. liegt.

<u>Diese Anordnung ist eindeutig bestimmt, bis auf ihre Umkehrung: K, ... D, C, B, A.</u> (Dieser Satz ist eine Erweiterung des 4. Axioms.) Wir nennen die Punkte A, B, C ... K „schlechtweg <u>geordnet</u>."

<u>Beweis</u>: Unser Satz gilt für 4 Punkte A, B, C, D nach Axiom 4 und nach Satz c). Wir zeigen, dass der Satz gültig bleibt für $n+1$ Punkte, wenn er für n Punkte bewiesen ist. Der Beweis soll nur skizziert werden; die Ausführung im einzelnen bietet keine Schwierigkeiten, ist aber etwas schwerfällig. Sei also $A_1 A_2 \ldots A_n$ die verlangte Anordnung bei n Punkten. Nehmen wir einen weiteren Punkt X hinzu, so sind nach 3. zunächst drei Fälle möglich:

1.) A_1 liegt zwischen X und A_n,
2.) A_n liegt zwischen X und A_1,
3.) X liegt zwischen A_1 und A_n,

Im Fall 3. beweist man weiter, dass es eine und nur eine Zahl m giebt, sodass X zwischen A_m und A_{m+1} liegt. Schliesslich zeigt man, dass folgende Anordnungen in den drei Fällen die verlangten Eigenschaften haben:

1.) $X A_1 A_2 \ldots A_n$
2.) $A_1 A_2 \ldots A_n X$
3.) $A_1 A_2 \ldots A_m X A_{m+1} \ldots A_n$

und dass sie nebst ihren Umkehrungen die einzigen sind, die jene Eigenschaften besitzen.

c) *Jeder Punkt O, welcher auf einer Graden a liegt, trennt die übrigen Punkte dieser Graden in zwei Abteilungen von folgender Beschaffenheit:*
Ist A ein Punkt der einen, B ein Punkt der andern Abteilung, so liegt stets O zwischen A und B. Sind dagegen A_1, A_2 Punkte derselben Abteilung, so liegt O nicht zwischen A_1 und A_2.

Beweis: Seien A, B zwei Punkte, die nicht ein und derselben Abteilung angehören, sei ferner X irgend ein von O, A, B verschiedener Punkt der Graden; wenn wir dann die 4 Punkte gemäss dem Axiom 4. ordnen, so sind je nach der Lage von X folgende Fälle möglich: 1) XAOB, 2) AXOB, 3) AOXB, 4) AOBX. In den beiden ersten Fällen rechnen wir X zu der durch A, in den beiden andern Fällen zu der durch B vertretenen Abteilung. Es ist leicht zu zeigen, dass diese Abteilungen die verlangte Beschaffenheit haben.

Man sagt, dass O die Grade a in zwei „*Halbstrahlen*" teilt; oder dass jeder Punkt von a entweder *rechts* oder *links* von O liegt, u.s.w.

Der eben bewiesene Satz zeigt, dass *zwischen* der *Geometrie* und den Grundsätzen der Arithmetik eine weitgehende Analogie herrscht. In der That lassen sich bekanntlich die rationalen Zahlen „ordnen" im Sinne des Satzes d). Jede rationale Zahl α trennt alle übrigen in zwei Abteilungen, so dass jede Zahl der einen Abteilung grösser ist als jede Zahl der andern Abteilung. Indem man weiter diese Eigenschaft, einen „Schnitt" in der Reihe der rationalen Zahlen zu machen, zur wesentlichen Eigenschaft des Zahlbegriffs erhebt, gelangt man zu den Irrationalzahlen. Dem geometrischen Begriff „zwischen" entspricht in der Arithmetik der Begriff des grösser und kleiner seins. –

Ehe wir näher auf die Beziehungen zwischen unsern vier Axiomen eingehen, haben wir noch zwei wichtige Bemerkungen zu machen:

1) Durch die Axiome 1–4 ist keineswegs die Eindimensionalität der Graden gegeben. In der That lassen sich z.B. alle Punkte des dreiminensionalen Raumes so anordnen, dass die Axiome 1.–4 gelten. Wir brauchen nur jeden Punkt durch seine rechtwinkligen Koordinaten x y z zu charakterisieren und dann folgende Festsetzungen zu machen: Jeder Punkt mit grösserer x = Koordinate soll ~~auf~~ in der Reihe hinter jedem Punkt mit kleinerer x = Koordinate stehen; bei Punk-

ten mit gleichen x soll das y, bei gleichem x und y soll z den Ausschlag geben.

2.) Die gewöhnliche Anordnung der Punkte auf einer Graden und entsprechend die Anordnung der reellen Zahlen ihrer Grösse nach ist nicht die einzige, bei welcher der Begriff „zwischen" mit seinen Merkmalen 1.–4. gültig ist. Eine andere Anordnung erhält man z. B., indem man zuerst die rationalen Zahlen ihrer Grösse nach ordnet, ebenso die irrationalen, und ausserdem festsetzt, dass jede irrationale Zahl grösser heissen soll als jede rationale.

Wir behaupten jetzt, dass die Axiome 1.–4 von einander unabhängig sind, und beweisen 2 Beispiele:

1) 4. folgt nicht aus 1., 2., 3.

Beweis: Wir repräsentieren die Punkte A, B, C... durch reelle Zahlen α, β γ ... und setzen fest: C liege zwischen A und B, sobald $\gamma > \alpha$ und zugleich $\gamma > \beta$ ist (wenn also der Punkt C nach gewöhnlichem Sprachgebrauch „hinter" A und B liegt). Dass die Axiome 1.–3 gelten, ist evident, 4. aber gilt nicht, denn nehmen wir an, ABCD sei eine Anordnung von 4 Punkten im Sinne des Axioms 4. Dann müsste sein: $\beta > \alpha$, $\beta > \gamma$, $\beta > \delta$, und gleichzeitig:

$\gamma > \alpha$, $\gamma > \beta$, $\gamma > \delta$, was nicht möglich ist.

2.) 3. folgt nicht aus 1., 2., 4.

Beweis Wir setzen fest, C liege zwischen A und B, wo etwa $\alpha < \beta$, sobald entweder $\gamma < \alpha$ oder $\gamma > \beta$ ist. (d. h. sobald C „ausserhalb" $\overline{AB}$ liegt.)

1., 2., 4., gelten, 3. aber nicht; denn von 3 gegebenen Punkten A, B, C liegt nicht einer, sondern es liegen stets zwei ausserhalb der übrigen. –

Nach den „linearen" Axiomen 1–4 kommen wir nun zu dem einzigen „ebenen" Axiom in II.

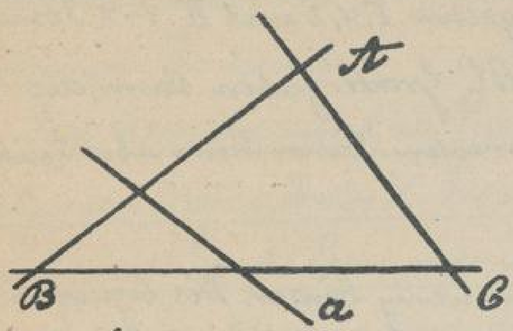
5. Jede Grade a, welche in einer Ebene α liegt, trennt die Punkte dieser Ebene α in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit: Ein jeder Punkt A des einen Gebietes bestimmt mit jedem Punkt B des andern Gebietes eine Strecke $\overline{AB}$, innerhalb welcher ein Punkt der Graden a liegt; dagegen bestimmen irgend zwei Punkte A und C des nämlichen Gebietes eine Strecke $\overline{AC}$, welche keinen Punkt von a enthält.

Durch dieses Axiom wird der Begriff „Halbebene" eingeführt.

Wir beweisen mit Hülfe von 5. den Satz:

Sei $ABC = \alpha$ eine Ebene und a eine durch keinen der drei Punkte A, B, C gehende Grade in ihr, welche die Strecke $\overline{AB}$ schneidet, dann schneidet a notwendig eine und nur eine der Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.

Beweis:



Nach Voraussetzung liegen A, B auf verschiedenen Seiten von a. Nehmen wir nun an, $\overline{AC}$ werde von a nicht geschnitten; dann liegen A und C auf der nämlichen Seite von a, also liegen B und C auf verschiedenen Seiten von a, d.h. $\overline{BC}$ wird von a geschnitten.

Nehmen wir ferner an, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ werden beide von a geschnitten; dann müssten A und B auf der nämlichen Seite von a liegen, was nicht möglich ist, da nach Voraussetzung $\overline{AB}$ von a geschnitten wird.

Wir zeigen nun, daß das Axiom 5 wirklich notwendig ist, um den vorstehenden Satz zu beweisen, oder:

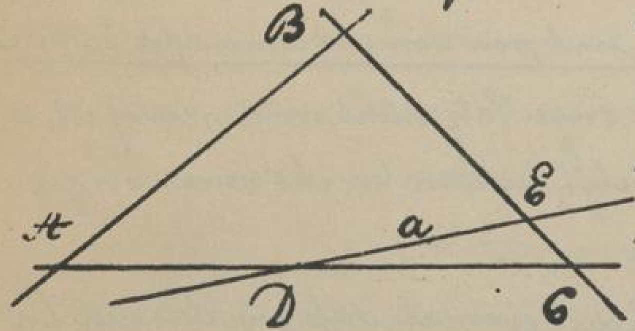
5. ist keine Folge von 1.-4. und von den Axiomen der Gruppe I.

Beweis: Wir zeigen, daß der obige Satz nicht mehr richtig ist, sobald wir von allen uns bis jetzt bekannten Axiomen einzig das Axiom II, 5 fortlassen.

a) Denken wir uns zunächst einmal, daß wir dies nur für ebene Geometrie beweisen wollten, sodaß von der Gruppe I nur die beiden ersten Axiome in Betracht kommen. Als die Ebene unserer neuen Geometrie bezeichnen wir den Inbegriff sämtlicher Punkte des gewöhnlichen Raumes. Dann gelten I. 1, 2 und II. 1–4. Ferner ist klar, dass ich für jedes Dreieck ABC Grade ziehen kann, die nur eine einzige Seite des Dreiecks schneiden. Dann kann aber 5. nicht gültig sein.

b.) Für den Raum ist der Beweis ein wenig länger. Wir bezeichnen auf jeder Graden eine bestimmte Richtung als positiv und ordnen nun die Punkte auf jeder Graden in der schon auf pag. 17 geschilderten Weise, d. h. wir setzen fest, dass jeder irrationale Punkt jedem rationalen folgen soll, während im übrigen die gewöhnliche Reihenfolge beibehalten wird. Als einen rationalen Punkt bezeichnen wir einen solchen, dessen drei gewöhnliche Koordinaten $x\ y\ z$ sämtlich rational sind.

Sei nun ABC ein Dreieck, mit lauter rationalen Ecken, D sei ein rationaler Punkt auf $\overline{AC}$, E ein irrationaler Punkt auf $\overline{BC}$. Dann schneidet die Grade $\overline{DE} = a$ nicht die Strecke $\overline{BC}$, denn E liegt ja nach der Definition nicht zwischen B und C. a tritt also in das $\Delta\ ABC$ ein, ohne wieder herauszutreten. Der Satz pag. 19 gilt also hier nicht, und



folglich auch nicht das Axiom 5.–

Ein „räumliches" Axiom brauchen wir in der II. Gruppe nicht, vielmehr werden wir den zu 5 analogen Satz der räumlichen Geometrie nun beweisen. Er lautet:

Jede Ebene α trennt die Punkte des Raumes in zwei Gebiete von folgender Beschaffenheit: Jeder Punkt A des einen Gebiets bestimmt mit jedem Punkt B des andern Gebiets eine Strecke AB, innerhalb deren ein Punkt von α liegt; dagegen bestimmen irgend zwei Punkte A und C eines und desselben Gebietes eine Strecke $\overline{AC}$ die keinen Punkt von α enthält.

Beweis: Es sei A ein Punkt, der nicht auf α liegt. Dann rechne ich zu dem einen Gebiet alle Punkte P von der Eigenschaft, dass zwischen A und P, also auf $\overline{AP}$ kein Punkt von α liegt; zu dem andern Gebiet alle Punkte Q, s. dass auf $\overline{AQ}$ ein Punkt von α liegt. Nun ist zu zeigen:

1) Auf $\overline{PP'}$ liegt kein Punkt von α.

2) Auf $\overline{QQ'}$ liegt kein Punkt von α.

3) Auf $\overline{PQ}$ liegt stets ein Punkt von α

1) Nach Voraussetzung liegt weder auf $\overline{AP}$ noch auf $\overline{AP'}$ ein Punkt von α. Nehmen wir nun an, auf $\overline{PP'}$ läge ein Punkt von α, dann hätten die Ebene α und die Ebene APP' diesen Punkt und folglich eine Grade a gemein. Diese Grade geht durch keinen der Punkte A, P, P'; sie schneidet $\overline{PP'}$, sie muss also nach pag. 19 entweder $\overline{AP}$ oder $\overline{AP'}$

schneiden, was gegen die Voraussetzung ist.

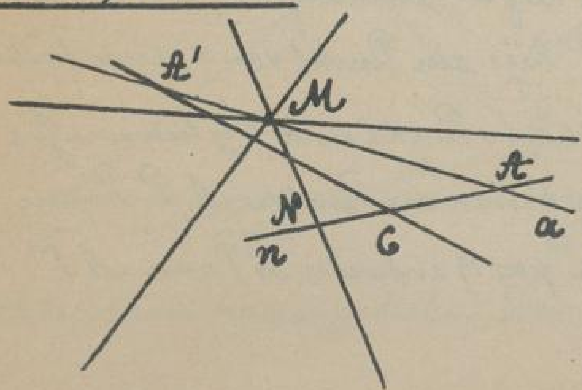
2) Nach Voraussetzung liegt auf $\overline{AQ}$ ein Punkt von α, ebenso auf $\overline{AQ'}$. Die Schnittgrade der Ebenen α und AQQ' trifft also zwei Seiten des $\triangle AQQ'$; folglich kann sie nach pag. 19 nicht auch noch die dritte Seite $\overline{QQ'}$ treffen.

3) $\overline{AP}$ enthält nach Voraussetzung keinen Punkt von α, $\overline{AQ}$ dagegen enthält einen solchen. Die Schnittgrade der Ebenen α und APQ trifft also die Seite $\overline{AQ}$ und trifft nicht die Seite $\overline{AP}$ im $\triangle APQ$; also trifft sie die Seite $\overline{PQ}$.

Dieser Satz erlaubt uns, von einem „Halbraum" und von den „beiden Seiten der Ebene" α zu sprechen. –

Von weiteren Sätzen, die sich auf Grund der bisherigen Axiome beweisen lassen, heben wir folgende hervor:

a) Sei in einer Ebene ein Punkt M und eine endliche Anzahl durch ihn hindurch laufender Graden $a, b, c \ldots$ gegeben; dann läßt sich stets eine Grade finden, welche diese sämtlichen durch M gehenden Graden meidet.



Beweis: Ich nehme auf a 2 Punkte A und A' an, sodaß M zwischen A und A' liegt; ferner lege ich durch A eine Grade $n \neq a$, von der Art, daß sie wenigstens noch eine der Graden $b, c, \dots$ trifft. Unter allen Schnittpunkten $N', N'', \dots$ (deren Anzahl also wenigstens $= 1$ ist) der Graden n mit Strahlen des Büschels M giebt es nun stets einen N, (und höchstens zwei) sodaß zwischen A und N kein weiterer solcher Schnittpunkt liegt. Jetzt wähle ich auf $\overline{AN}$ irgend einen Punkt C und verbinde ihn mit A', dann ist $A'C$ eine Grade von der verlangten Beschaffenheit. In der That sei x irgend einer der Strahlen durch M. Dann liegen A und A' auf verschiedenen Seiten von x, weil ja $\overline{AA'}$ in M von x geschnitten wird. A und C liegen auf derselben Seite von x, weil ja kein Strahl die Strecke $\overline{AN}$ und a fortiori die Strecke $\overline{AC}$ trifft. Also liegen A' und C auf verschiedenen Seiten von x, d.h. x wird von $A'C$ geschnitten, was zu beweisen war.

b.) Der analoge Satz im Raum lautet:

<u>Wenn durch einen Punkt im Raum eine endliche Anzahl von Graden geht, so giebt es stets eine Ebene, die alle diese Graden schneidet.</u>

Bei dem Beweis wollen wir uns nicht aufhalten, sondern gleich übergehen zu dem

<u>Satz von Desargues.</u>

<u>Wenn zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in einer Ebene so liegen, daß je zwei entsprechende Seiten AB und $A'B'$, AC und $A'C'$, BC und $B'C'$ sich in drei Punkten E, D, F einer Graden schneiden, so treffen sich die Verbindungslinien entsprechender Ecken,</u>

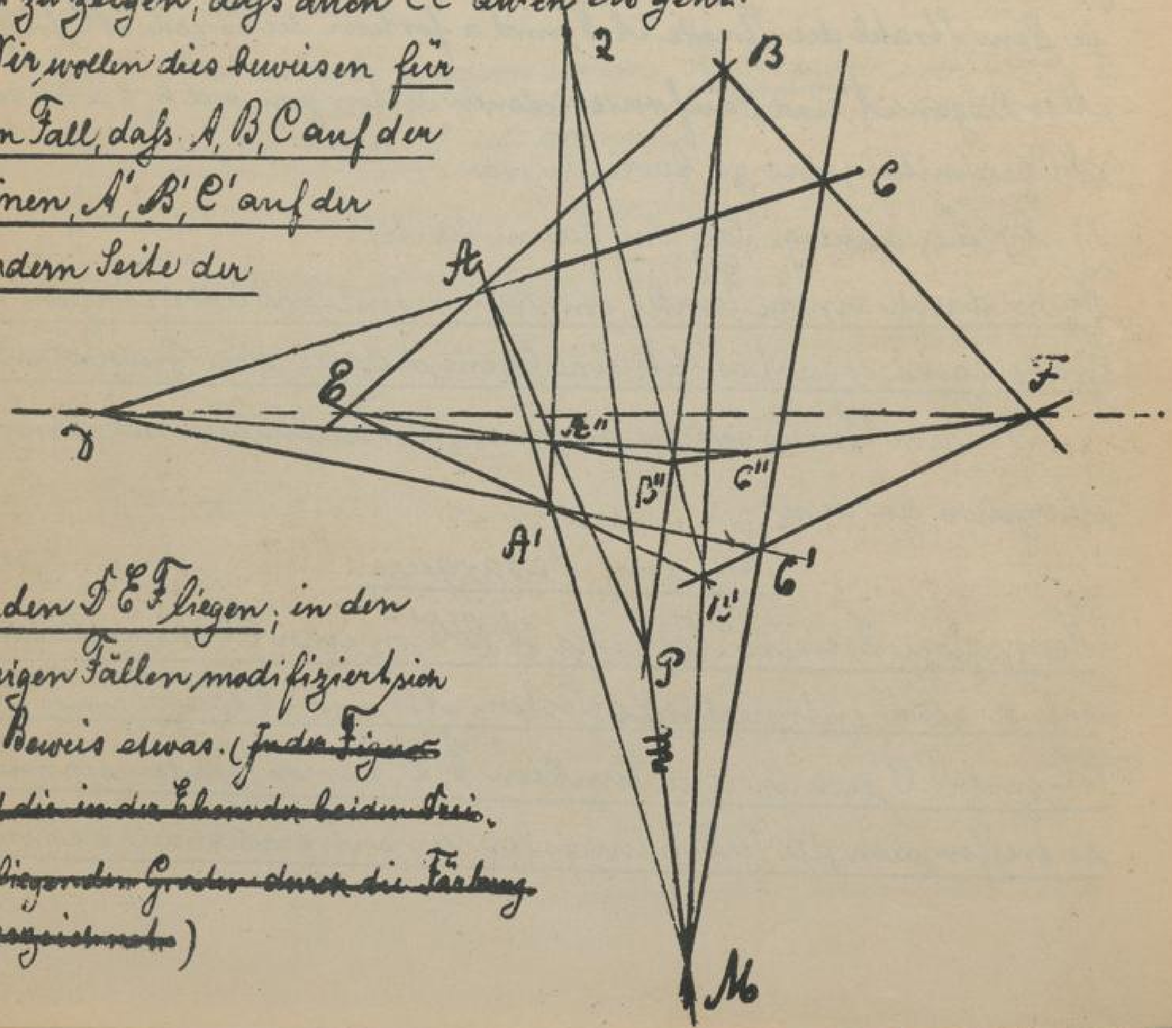
<u>AA', BB', CC' entweder gar nicht, oder sie laufen sämmtlich durch denselben Punkt M.</u>

(Dieser Satz ist übrigens umkehrbar)

Den <u>Beweis</u> führen wir so, daß wir zuerst die Gültigkeit des Satzes unter der Annahme beweisen, daß der Satz für Dreiecke ABC und A'B'C' gelte, <u>die nicht in einer Ebene liegen</u>; hinterher zeigen wir dann, daß er für diesen Fall wirklich gilt.

Nehmen wir an, daß sich AA' und BB' in M schneiden, dann ist zu zeigen, daß auch CC' durch M geht.

<u>Wir wollen dies beweisen für den Fall, daß A, B, C auf der einen, A', B', C' auf der andern Seite der Graden DEF liegen</u>; in den übrigen Fällen modifiziert sich der Beweis etwas. (~~In der Figur sind die in der Ebene der beiden Dreiecke liegenden Graden durch die Färbung ausgezeichnet.~~)



Wir legen nun eine Grade m durch M, die nicht in der Ebene der beiden Dreiecke liegt, und nehmen auf m zwei Punkte P, Q an derart, daſs die Reihenfolge MPQ mit der Reihenfolge $MA'A$ übereinstimmt. Die Graden $\overline{AP}$ und $\overline{A'Q}$ müssen sich nun notwendig schneiden, etwa in A''; denn nach Wahl von P, Q liegt gleichzeitig P zwischen M und Q, und A' zwischen M und A. Ebenso müssen sich $\overline{BP}$ und $\overline{B'Q}$ schneiden, etwa in B''; denn nach Voraussetzung ist $MB'B$ dieselbe Reihenfolge wie $MA'A$, also auch wie MPQ, und es liegt demnach gleichzeitig P zwischen M und Q, und B' zwischen M und B.

Da A'' auf $\overline{AP}$, B'' auf $\overline{BP}$ liegt, so liegen die 5 Punkte P, A'', B'', A, B in einer Ebene; in dieser Ebene liegt auch E als Punkt von AB; also liegen P, A'', B'', A, B, E in einer Ebene. Genau so findet man, daſs auch Q, A'', B'', A', B', E in einer Ebene liegen. Diese beiden Ebenen sind von einander verschieden; wären sie nämlich gleich, so müssten sie mit der Dreiecksebene zusammenfallen, was unmöglich ist, da z.B. P nicht in der Dreiecksebene liegt. Daraus folgt: die Punkte A'', B'', E (die beiden Ebenen gemeinsam sind) liegen auf einer Graden oder: $A''B''$ geht durch den Punkt E.

Jetzt verbinde ich A'' mit D und B'' mit F; dann liegen $A''D$ und $B''F$ in einer Ebene $A''B''DEF$ und schneiden sich notwendig in einem Punkte C''. Denn erstlich kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daſs E zwischen D und F liegt; ferner kann man zeigen, dass die ganze Figur auf einer Seite der Dreiecksebene liegt, sodass entweder A'' zwischen E und B'' oder B'' zwischen E und A'' liegt. Im ersten Falle betrachten wir $\Delta EFB''$ und die Grade $A''D$ im zweiten aber $\Delta EDA''$ und die Grade $B''F$. Aus dem Satz p. 19 folgt beidemale die Existenz von C''.

Jetzt betrachten wir die Dreiecke $A''B''C''$ und ABC. Sie haben die Eigenschaft, dass die entsprechenden Seiten sich in drei Punkten einer Graden schneiden; und sie liegen ausserdem in zwei verschiedenen Ebenen. Für solche Dreiecke wollten wir unsern Satz vorläufig als bewiesen betrachten, p. 24. Dann ergiebt sich, dass CC'' durch den Schnittpunkt P von AA'' und BB'' hindurchlaufen muss. Genau so findet man durch Betrachtung der Dreiecke $A''B''C''$ und $A'B'C'$, dass $C'C''$ durch Q gehen muss. Die beiden Graden $CC''P$ und $C'C''Q$ bestimmen eine Ebene, in der auch M als Punkt von PQ liegt. Ausser in dieser Ebene liegen C, C', M auch noch in der von ihr verschiedenen Dreiecksebene, und hieraus folgt endlich, dass C, C', M auf einer Graden liegen.

Jetzt ist der Beweis nachzuholen, dass unser Satz gilt, wenn ABC und $A'B'C'$ nicht in einer Ebene liegen. Mögen sich AA' und BB' in M schneiden, [vgl die Figur pag. 24.] dann ist zu zeigen, dass auch CC' durch M geht. Nun sieht man:

A, B, E, B', A' bestimmen eine Ebene γ,
B, C, F, C', B' " " α,
$C, A, D, A'C'$ " " β.

Die Ebenen α und β haben die Punkte C und C' gemein; sie haben aber auch M gemein, weil M sowohl auf AA', also in β, als auch auf BB', also in α liegt. Hieraus folgt dann, daß C, C', M auf einer Graden liegen, womit der Satz von Desargues vollständig bewiesen ist. –

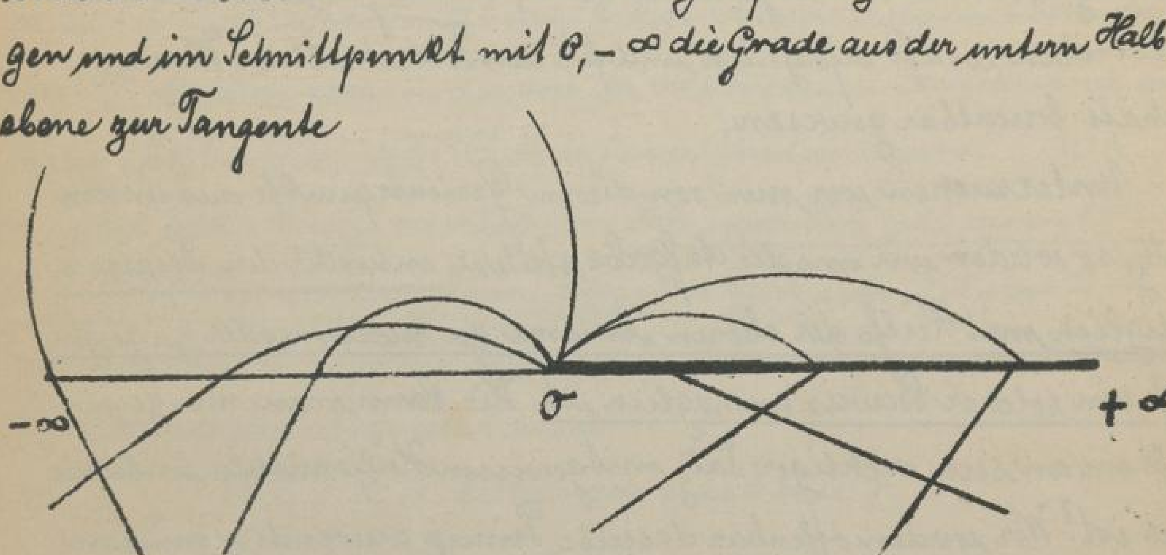
Dieser Satz giebt uns nun Gelegenheit zur Erörterung einer wichtigen Frage. Der Inhalt nämlich des Desargues'schen Satzes gehört durchaus der ebenen Geometrie an; zu seinem Beweise aber haben wir den Raum gebraucht. Wir sind daher hier zum ersten Mal in der Lage, eine Kritik der Hülfsmittel eines Beweises zu üben. In der modernen Mathematik wird solche Kritik sehr häufig geübt, wobei das Bestreben ist, die Reinheit der Methode zu wahren, d. h. beim Beweise eines Satzes wo möglich nur solche Hülfsmittel zu benutzen, die durch den Inhalt des Satzes nahe gelegt sind. Dieses Bestreben ist oft erfolgreich und für den Fortschritt der Wissenschaft fruchtbar gewesen.

Untersuchen wir nun von diesem Gesichtspunkte aus unsern Satz, so werden wir uns die Aufgabe stellen: entweder den Desargues lediglich mit Hülfe der ebenen Axiome zu beweisen, oder zu zeigen, daß ein solcher Beweis unmöglich ist. Wie kann man nun zeigen, daß ein an sich richtiger Satz mit gewissen Hülfsmitteln unbeweisbar ist? Wir werden offenbar dasselbe Princip anwenden müssen wie bei den Unabhängigkeitsbeweisen [p. 8.9], d. h. um es gleich für den vorliegenden Fall zu spezialisieren:

Wir werden eine ebene Geometrie konstruieren müssen, in der die sämtlichen ebenen Axiome (I, 1.2. II, 1–5) gelten, während der Satz von Desargues nicht gilt.

Eine solche Geometrie wollen wir nun in der That konstruieren.

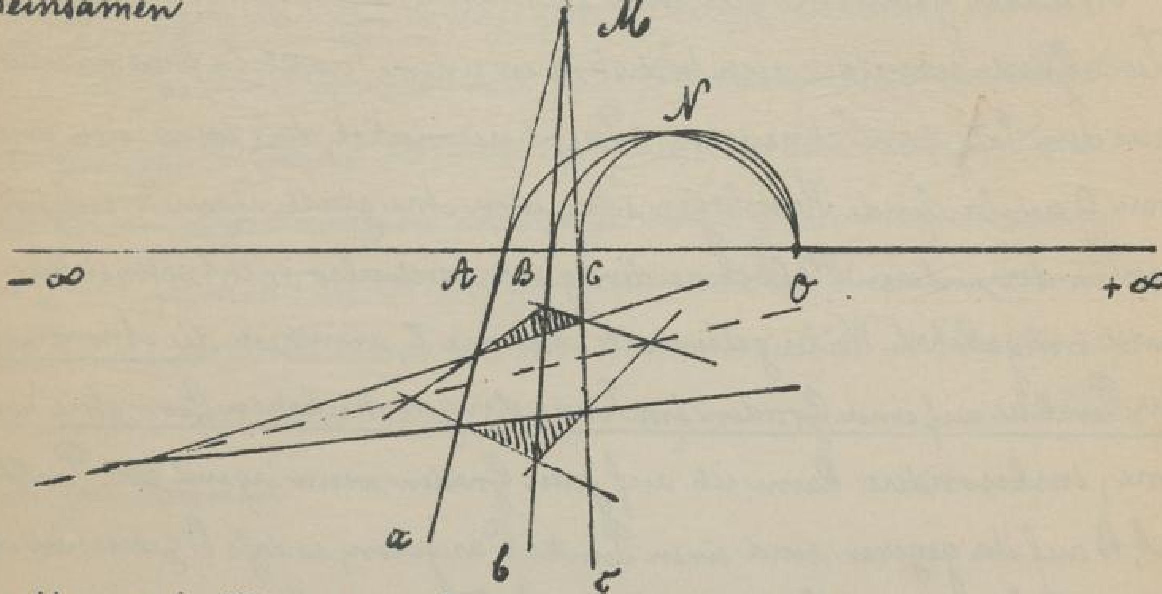
Als Punkte unserer Geometrie nehmen wir die Punkte einer Ebene, scheiden jedoch sämtliche Punkte eines Halbstrahls $0, +\infty$ aus. Die Graden definieren wir so, dafs zwei beliebige Punkte stets eine (u. nur eine) Grade bestimmen, und zwar folgendermassen: Zwei Punkte der unteren Halbebene bestimmen eine Grade im gewöhnlichen Sinne. Diese Graden sollen auch in unserer Geometrie Grade sein; schneiden sie $0, +\infty$, so sollen sie dort endigen, schneiden sie $0, -\infty$, so sollen sie sich in die obere Halbebene als Kreisbögen fortsetzen, die in 0 endigen und im Schnittpunkt mit $0, -\infty$ die Grade aus der untern Halbebene zur Tangente



haben. Zwei Punkte der oberen Halbebene sollen als Verbindungsgrade einen in 0 endigenden Kreisbogen bestimmen, der entweder auch in $0\ +\infty$ endigt, oder sich über $0, -\infty$ gradlinig in die untere Halbebene fortsetzt, und zwar in Richtung der Tangente. Haben wir endlich einen Punkt der oberen und einen der unteren Halbebene, so soll auch hier die Verbindungsgrade aus einem (im gewöhnlichen Sinne) gradlinigen Stück und einem Kreisbogen bestehen, in derselben Weise wie in den beiden ersten Fällen.

In dieser Geometrie gilt nun I, 1 nach Voraussetzung; ferner gilt I, 2: Zwei Grade schneiden sich höchstens in einem Punkt. Es folgt nämlich aus dem Satz vom Sehnen- und Peripheriewinkel, daß wenn sich zwei von 0 auslaufende Kreisbögen schneiden, ihre gradlinigen Fortsetzungen in der unteren Halbebene divergieren, sich also nicht schneiden, und umgekehrt. Weiter gelten alle Axiome II, wenn ich die Anordnung der Punkte auf einer Graden im Sinne der gewöhnlichen Geometrie nehme; insbesondere kann ich auf jeder Graden wenn irgend zwei Punkte A, B auf ihr gegeben sind einen Punkt C angeben, sodaß B zwischen A und C liegt; diese Eigenschaft bleibt für unsere Geometrie dadurch gewahrt, daß die Punkte der Halbgraden $0\ +\infty$ nicht Punkte unserer Geometrie sind. Aber der Satz von Desargues gilt in unserer Geometrie nicht. Um das einzusehen, legen wir die beiden Dreiecke der Figur p. 24 so, daß sie selbst sowie auch die drei Schnittpunkte der Seitenpaare in der unteren Halbebene liegen, daß dagegen der Schnittpunkt

M der die entsprechenden Ecken verbindenden Graden a, b, c in der oberen Halbebene liegt, und die Graden a, b, c den Halbstrahl $0, -\infty$ in A, B, C schneiden. (Eine Verwechselung mit der Bezeichnung p. 24 ist nicht zu befürchten.) Jetzt setzen wir in A, B, C die Kreisbögen $\widehat{0A}$, $\widehat{0B}$, $\widehat{0C}$ an, die in unserer Geometrie die Graden a, b, c in die obere Halbebene fortsetzen. Und nun ist zu zeigen, daß $\widehat{0A}$, $\widehat{0B}$, $\widehat{0C}$ sich in drei verschiedenen Punkten schneiden. Nehmen wir an, sie hätten einen gemeinsamen

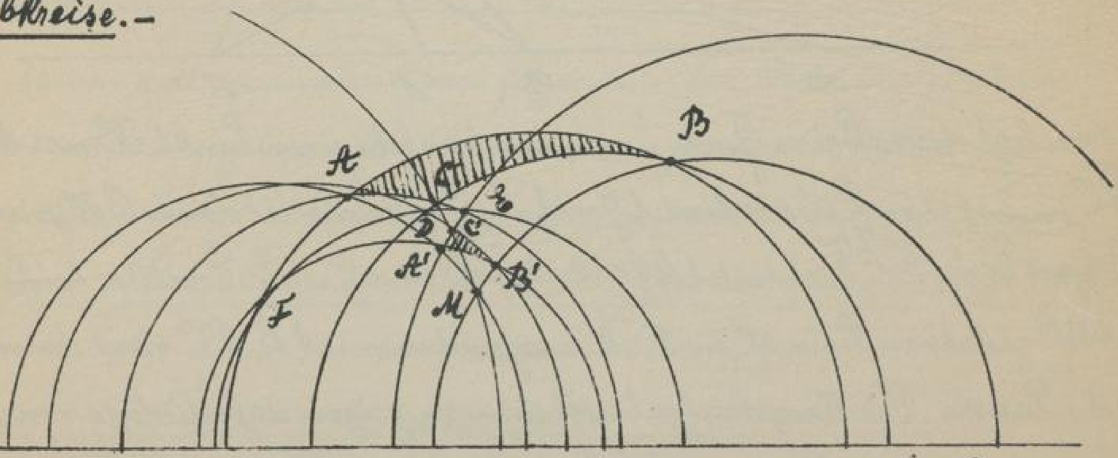


Schnittpunkt N, so wäre offenbar:

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle MA0 &= 2R - \sphericalangle AN0 \\ \sphericalangle MB0 &= 2R - \sphericalangle BN0 \end{aligned}\right\} \text{folglich: } \sphericalangle AMB = \sphericalangle ANB;$$

folglich müssen A, B, M, N auf einem Kreise liegen; ebenso müssen A, C, M, N auf einem Kreise liegen. Und das wäre nur möglich, wenn M und N auf der Graden ABC lägen, was nicht der Fall ist. Somit ist gezeigt, dass a, b, c sich in drei verschiedenen Punkten schneiden, der Satz von Desargues also nicht gilt. – Wenn man nur das letztere zeigen wollte, so würde es genügen, etwa einen der Punkte A, B, C auf den Halbstrahl $0, +\infty$ zu legen, wo dann a, b, c überhaupt keinen gemeinsamen Schnittpunkt hätten, während etwa a, b sich schneiden. –

Der Satz von Desargues gilt nach dem vorangehenden überall da, wo wir drei Systeme von Dingen haben, für die die Axiome I und II gelten. Nehmen wir beispielsweise als Punkte die sämtlichen Punkte eines von einer Ebene begrenzten Halbraums, ausgenommen die Punkte der Grenzebene selbst; als Ebenen nehmen wir die Halbkugeln, deren Mittelpunkte auf der Grenzebene liegen und als Graden die Schnitthalbkreise der Halbkugeln. Hier gelten die Axiome I u. II, woraus sich ergiebt: <u>Der Satz von Desargues gilt in der Halbebene für die zur Grenzgraden orthogonalen Halbkreise.</u> –

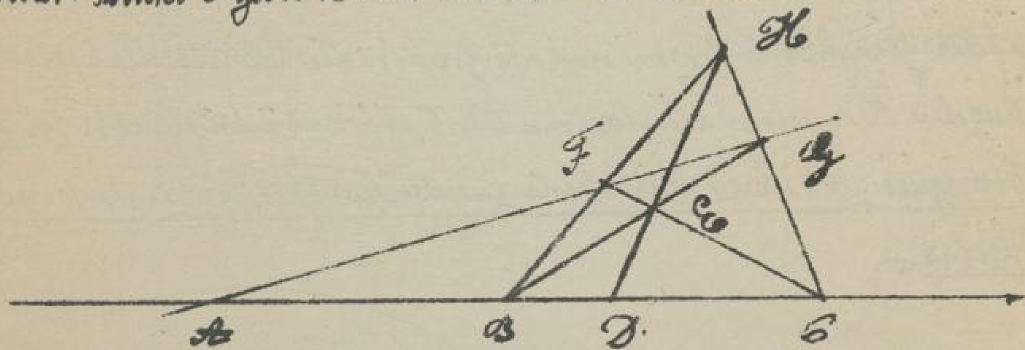


Wir können unsere Betrachtung so zusammenfassen: <u>Der Satz von Desargues ist die notwendige Bedingung dafür, dass die Ebene als ein</u>

Stück des Raumes angesehen werden kann. Es fragt sich, ob er auch die hinreichende Bedingung dafür ist; dh.: ob man zu zwei Systemen von Dingen, für welche die Axiome I, 1.2 und II und ausserdem der Desargues gelten, stets ein drittes System von Dingen so finden kann, daß alle Axiome I und II gelten.

Diese Frage ist wahrscheinlich zu bejahen; man könnte in diesem Fall sagen: Der Satz von Desargues ist das Resultat der Elimination der räumlichen Axiome aus I und II.--

Auf den Axiomen I und II beruht auch die Lehre von den harmonischen Punkten. Sind auf einer Graden drei Punkte A, B, C gegeben, so kann man einen Punkt D zwischen B und C so konstruieren:



Man legt durch C eine Grade und nimmt auf ihr einen Punkt H an. Auf $\overline{HC}$ nimmt man G und verbindet G mit A; GA schneidet dann BH zwischen B und H in F. CF schneidet BG zwischen B und G in E. Endlich trifft HE ABC zwischen B und C in D. Wir sagen dann: A, B, D, C sind harmonische Punkte. Die Hauptaufgabe ist nun, zu zeigen daß die Lage von D lediglich von der Lage von A, B, C abhängt, nicht aber von der Wahl der Punkte H, G. Dieser Beweis kann wieder nur mit Hülfe der räumlichen

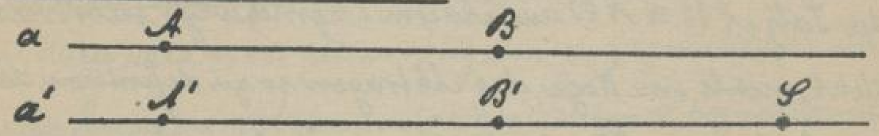
Axiome geführt werden. –

Zum Schluss bemerken wir, dass die projektive Geometrie sich im wesentlichen auf den Axiomen I, II aufbaut; es bedarf nur noch der Hinzufügung eines Stetigkeitsaxioms. Wir verweisen auf eine Arbeit von Hilbert, Math. Ann. 46. –

III. Die Axiome der Kongruenz.

A. Lineare Axiome stellen wir drei auf.

1) Wenn zwei Punkte A, B auf einer Graden a, und ferner zwei Punkte A', S auf derselben oder auf einer andern Graden a' gegeben sind, so kann man auf $A'S$ stets einen und nur einen Punkt B' finden, sodass A' nicht zwischen B' und S liegt und dass $\overline{AB}$ kongruent $\overline{A'B'}$ ist, $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Es ist stets $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$.



Dies Axiom soll aequivalent sein folgendem: Ich kann eine gegebene Strecke auf einer gegebenen Graden von einem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Seite (S) hin stets auf eine und nur eine Weise „abtragen."

2.) Wenn $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ und $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$ ist, so ist auch stets $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.

Eine Folge dieser beiden Axiome ist der Satz:

Wenn $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ ist, so ist auch $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$.

Beweis: Nach 1) ist $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$; aus den beiden Kongruenzen $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ und $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ folgt nach 2): $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$. q. e. d.

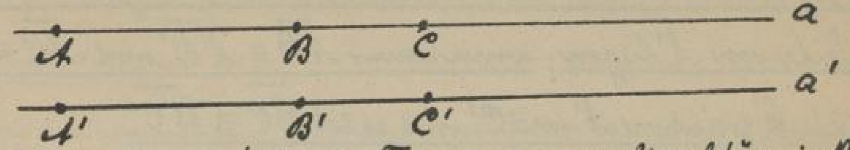
Dieser Satz erlaubt uns zu sagen: Zwei Strecken sind untereinander kongruent. Das Axiom 2) enthält dann etwas weniger als der Satz: Sind zwei Strecken einer dritten kongruent, so sind sie auch untereinander kongruent.

Man findet häufig die Auffassung (möglicherweise hatte auch Euklid sie) dafs Sätze wie der eben bewiesene reine Grössenbeziehungen seien, und daher gar keines besonderen Beweises bedürfen und nicht als besondere geometrische Axiome aufzuführen seien. Das ist aber unrichtig; es kommt ganz darauf an, wie ich die Beziehungen „gleich", „kongruent" u.s.w. definiere. Setze ich z.B. zwei reelle Zahlen a, b gleich, sobald $|a-b| \leqq 1$ ist, so folgt aus $a = b$, $b = c$ nicht mehr, dafs $a = c$ ist; z.B. ist dann $2 = 3$, $3 = 4$, aber $2 \neq 4$.

So ist auch der Satz $\overline{AB} \equiv \overline{AB}$ aus Axiom 1. keineswegs selbstverständlich; denn es steht nichts im Wege, das Abtragen so zu definieren, dass dabei jedesmal die abgetragene Strecke sich (im gewöhnlichen Sinne) um ein bestimmtes Stück verlängert. Man kann nun sagen, dafs in solchen Fällen die Ausdrücke „gleich", „kongruent" u.s.w. nicht gebräuchlich sind. Das ist zwar richtig, ändert aber an der Sache nichts; denn dann nehmen unsere Axiome bloss eine andere Form an, z.B.: „die Anwendung des Wortes „gleich" soll in dem und dem Falle erlaubt sein."

3.) Es seien A, B, C Punkte einer Graden a, sodass B zwischen A und C liegt, und $A', B' C'$ Punkte derselben oder einer andern Graden a', sodafs B' zwischen A'

und C' liegt; wenn dann $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ und $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ ist, so ist auch $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.



Verweilen wir einen Moment bei der Frage nach der Unabhängigkeit unserer drei Axiome von einander. Wir begnügen uns damit, den Satz zu beweisen:

3. ist keine Folge von 1. und 2.

Beweis: Es habe $\overline{AB}$ auf a die Länge l, dann soll jede kongruente Strecke $\overline{A'B'}$ auf a' die Länge $l' = e^{l} - 1$ haben; umgekehrt soll der Länge l' auf a' die Länge $l = \log(l'+1)$ auf a kongruent heissen. Ist nun $\overline{AB} = l_1$, $\overline{BC} = l_2$, so wird $\overline{AC} = l_1 + l_2$, ferner $\overline{A'B'} = e^{l_1} - 1$, $\overline{B'C'} = e^{l_2} - 1$, $\overline{A'C'} = e^{l_1} + e^{l_2} - 2$, wogegen das Axiom 3. verlangt, dass $\overline{A'C'} = e^{l_1 + l_2} - 1$ sein soll. –

Unser Ziel bei den linearen Kongruenzaxiomen ist das Rechnen mit Strecken; dazu wird es vor allem nötig sein, zu zeigen, daß wir eine Strecke $\overline{AB}$ im Sinne der Kongruenz mit einem einzigen Zeichen a bezeichnen dürfen. Wir wollen daher folgenden sehr wichtigen Satz beweisen:

Es ist stets $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$.

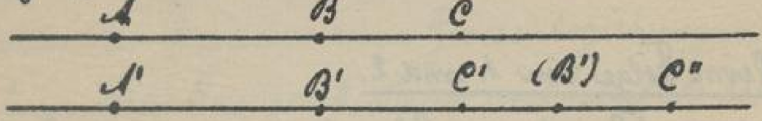
Diesen Satz findet man meist unter den Axiomen, (vgl Helmholtz' Monodromieaxiom, welches einen ähnlichen Inhalt wie unser Satz hat) wir aber werden ihn auf Grund der linearen Kongruenzaxiome beweisen.[x)] Dazu brauchen wir einige Hülfssätze:

a) Seien A, B, C Punkte einer Graden, sodass B zwischen A und C liegt,

x) vgl. dagegen pag. 37.

ferner A', B', C' Punkte derselben oder einer andern Graden, sodaſs B', C' auf einer Seite von A' liegen; wenn dann $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ und $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ ist, so liegt stets B' zwischen A' und C' und es ist $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$.

Beweis: Nehmen wir an, es liege nicht B' zwischen A' und C', dann liegt nach Voraussetzung C' zwischen A' und B' etwa bei (B'). Nun bestimme



ich (was nach 1. stets möglich ist) C'' so, daſs $\overline{B'C''} \equiv \overline{BC}$ wird, und dass B' zwischen A' und C'' liegt. Aus $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ und $\overline{B'C''} \equiv \overline{BC}$ folgt nach 3.: $\overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$, also, da $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ ist, nach 2.: $\overline{A'C'} \equiv \overline{A'C''}$, also nach 1.: $C' = C''$. Dann läge also gleichzeitig $C' = C''$ zwischen A' und B', und B' zwischen A' und $C' = C''$; das ist nach II, 3 unmöglich, folglich liegt B' zwischen A' und C'. Nehmen wir weiter an, es sei $\overline{BC} \not\equiv \overline{B'C'}$; dann lässt sich stets C'' so bestimmen, dass $\overline{BC} \equiv \overline{B'C''}$ ist, und B' zwischen A' und C'' liegt. Dann folgt aus 3.: $\overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$, und nach 2 wegen $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$: $\overline{A'C'} \equiv \overline{A'C''}$, also nach 1.: $C' = C''$, d.h.: $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, q. e d.

b) Eine Umkehrung des Satzes a) ist folgender Satz:
Wenn $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ und $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$ ist, und wenn noch B zwischen A und C liegt, so liegt auch B' zwischen A' und C'.

Beweis: Läge etwa C' zwischen A' und B', so könnte ich C'' so bestimmen, dass $\overline{B'C''} \equiv \overline{BC}$ wird, und B' zwischen A' und C'' liegt. Dann folgt wie oben $\overline{AC} \equiv \overline{A'C''}$, weiter $C' = C''$, was nicht möglich ist, da C' zwischen A' und B', B' zwischen A' und C'' liegt

Axiom 3. sowohl wie die Hülfssätze a und b verknüpfen die Begriffe „kongruent" und „zwischen."

Wie schon pag. 35 angedeutet, lässt sich auf Grund der vorangehenden Axiome die Beziehung $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$ nach Anbringung einer kleinen Modifikation beweisen. Um uns aber nicht zu sehr aufzuhalten, wollen wir lieber jenen Satz selbst einführen als

4. lineares Kongruenzaxiom: Es ist stets $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$.

Für das weitere brauchen wir noch folgende Definition: Sind $A, B, C, D \ldots$ auf a und $A', B', C', D' \ldots$ auf a' zwei Punktreihen, und ist $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, ..., so heissen die Punktreihen kongruent. A und A', B und B', C und C', ... heissen homologe Punkte. Dann gilt der Satz:

Die Reihenfolgen der homologen Punkte zweier kongruenter Punktreihen stimmen überein. –

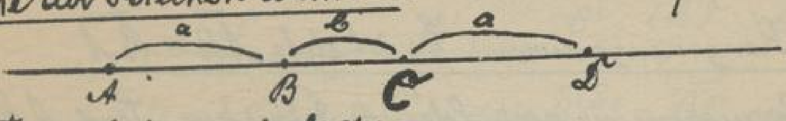
Auf Grund unseres 4. Axioms können wir nun, worauf bereits p. 35 hingewiesen wurde, eine Rechnung mit Strecken einführen. Wir dürfen und wollen eine Strecke $\overline{AB}$ mit einem einzigen Buchstaben a und alle kongruenten Strecken mit demselben Buchstaben bezeichnen. Ferner wollen wir statt des Kongruenzzeichens $\equiv$ bei Strecken das Gleichheitszeichen $=$ einführen. Dann gestalten sich die Sätze über Streckenkongruenzen sehr einfach, wie folgendes Beispiel zeigt.

Satz: Seien vier Punkte A, B, C, D einer Graden in dieser Reihenfolge gegeben, wenn dann $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ ist, so ist auch $\overline{AC} \equiv \overline{DB}$.

Beweis: Nach Voraussetzung und nach 2. und 4. ist:

$\overline{AB} \equiv \overline{DC}$, $\overline{BC} \equiv \overline{CB}$, also ist nach 3: $\overline{AC} \equiv \overline{DB}$. q. e. d.

Wie gestaltet sich nun dieser Satz bei Einführung der Bezeichnungen a, b, … für Strecken? Um das zu sehen, geben wir erst folgende Definition: Wenn $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ ist, und B zwischen A und C liegt, so nennen wir $\overline{AC}$ die Summe der Strecken a und b und schreiben dafür $\overline{AC} = a + b$.



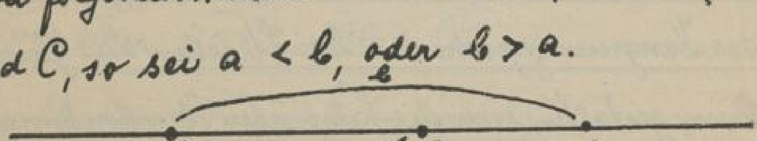
Unser Satz sagt dann einfach:

$$a + b = b + a,$$

d. h. die Addition von Strecken ist eine kommutative Operation.

Dieser Satz ist keineswegs selbstverständlich, er sagt keine allgemeine Grössenbeziehung aus, sondern eine ganz bestimmte geometrische Thatsache; denn die a, b sind durchaus keine Zahlen, sondern eben nur Symbole für gewisse geometrische Gebilde.

Genau so wie die Summe führen wir die Differenz zweier Strecken ein, weiter die Strecke null, negative Strecken; endlich die Begriffe „grösser" „kleiner" etwa folgendermassen: Ist $\overline{AB} = a$, $\overline{AC} = b$, und liegt B zwischen A und C, so sei $a < b$, oder $b > a$.



Wir haben dann den allgemeinen Satz:

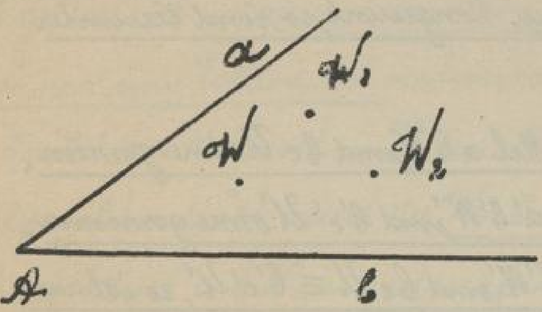
Die Begriffe >, < bei Strecken sind invariant gegenüber der Kongruenz.

oder was dasselbe sagt: der Verschiebung. –

Wir kommen nun zu den ebenen Axiomen und haben da zunächst:

B. Winkelkongruenzen.

Definition des Winkels: Zwei von einem Punkt A ausgehende Halbstrahlen a, b mit einem nicht auf a oder b gelegenen Punkte W bestimmen einen Winkel.



A heisst der Scheitel, a, b die Schenkel des Winkels. Dabei kann W durch irgend einen Punkt W_1 oder W_2, u.s.w. ersetzt werden sobald auf $\overline{WW_1}$ bezüglich auf $\overline{WW_1}$ und $\overline{W_1W_2}$ kein Punkt von a und kein Punkt von b liegt. $W, W_1, \ldots$ u.s.w. heissen Winkelpunkte.

5. Es seien gegeben ein Winkel $\sphericalangle\, a\, b\, W$, ein Halbstrahl a', eine Ebene α durch a', und in dieser Ebene eine Seite S der durch a' bestimmten Graden, dann giebt es einen und nur einen Halbstrahl b', der denselben Anfangspunkt wie a' hat, und einen in α, aber nicht auf a' oder b' liegenden Punkt W', sodass $\sphericalangle\, a\, b\, W \equiv \sphericalangle\, a'\, b'\, W'$ ist, und daſs entweder alle Winkelpunkte von $\sphericalangle\, a'\, b'\, W'$ auf der gegebenen Seite S liegen, oder alle Punkte der gegebenen Seite S Punkte des Winkels $\sphericalangle\, a'\, b'\, W'$ sind. – Es ist stets $\sphericalangle\, a\, b\, W \equiv \sphericalangle\, a\, b\, W$.

Dies Axiom sagt also die Möglichkeit aus, einen gegebenen Winkel in einem gegebenen Punkt an eine gegebene Grade nach gegebener Seite hin abzutragen.

Die Axiom ist analog dem 1. pag. 33, ebenso werden die folgenden Axiome analog sein den Axiomen 2–4.

Wir fügen zu 5 gleich hinzu: Aus $a\,b\,W \equiv a'b'W'$ folgt $a'b'W' \equiv a\,b\,W$; wir dürfen also sagen: Zwei Winkel sind unter einander kongruent.

Die folgenden Axiome lauten:

6. Sind zwei Winkel einem dritten kongruent, so sind sie unter einander kongruent.

7. Es seien in einer Ebene α die Winkel $a\,b\,W$ und $b\,c\,U$ ohne gemeinsame Winkelpunkte, und ebenso in β $a'b'W'$ und $b'c'U'$ ohne gemeinsame Winkelpunkte. Ist dann $a\,b\,W \equiv a'b'W'$ und $b\,c\,U \equiv b'c'U'$, so ist auch stets $a\,c\,W \equiv a'c'W'$, oder, was dasselbe ist: $a\,c\,U \equiv a'c'U'$.

8. Es ist stets $a\,b\,W \equiv b\,a\,W$.

Auf Grund von 8. können wir nun wieder die Abkürzung $\sphericalangle\, a\,b\,W \equiv \alpha$ einführen, und nun grade wie bei den Strecken, Summe und Differenz zweier Winkel definieren, wie nicht näher ausgeführt zu werden braucht. Es folgt dann auch hier der Satz:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Weiter lassen sich die Beziehungen $>$; $<$ definieren, die gegenüber der Kongruenz (Drehung in der Ebene) invariant sind, wie sich aus 7 beweisen lässt.

Bei diesem Rechnen mit Winkeln tritt aber eine Besonderheit auf, die bei Strecken nicht vorkam, und die damit zusammenhängt, daſs zur Definition des Winkels (p. 39) zwei Halbstrahlen a, b nicht ausreichen, vielmehr noch ein Punkt W hinzugenommen werden muss. Jene Besonderheit besteht in folgendem: Wir können zwei Winkel zunächst nur dann addieren, wenn bei der Abtragung keine gemeinsamen Winkelpunkte auftreten. Wir können aber die Addition retten,[x)] wenn wir verabreden, dass im Fall gemeinsamer Winkelpunkte nur der beiden Winkeln gemeinsame Teil der Ebene als Summe der Winkel gelten soll, oder: wir nennen zwei Winkel gleich (kongruent), wenn sie sich nur um Vollwinkel unterscheiden. Wir definieren nämlich:

Jeder Winkel a a W heisst ein Vollwinkel, der Winkel a a, der gar keinen Winkelpunkt enthält, heisst der Winkel null, ist a die Verlängerung von b, so heisst a b W ein gestreckter Winkel.

Ueber diese Begriffe, die bei Strecken kein Analogon haben, müssen wir nun ein weiteres Axiom aufstellen.

9. Alle gestreckten Winkel sind einander kongruent.

Es wäre hier eine interessante Aufgabe, die Unabhängigkeit des Axioms 9. von den vorangehenden Axiomen nachzuweisen. Wir wollen aber nicht dabei verweilen, sondern gleich Folgerungen aus unsern Axiomen ziehen. es gelten die Sätze:

1.) Alle Vollwinkel sind einander kongruent.

2.) Sind zwei Winkel gleich,[xx)] so sind auch ihre Nebenwinkel gleich.

3.) Scheitelwinkel sind einander gleich.

Die Begriffe „Nebenwinkel“ und „Scheitelwinkel“ sind leicht zu definieren. Der Beweis der Sätze 1.)–3.) beruht vor allem auf den Axiomen 7. und 9.

x) Ungleichungen dagegen lassen sich auf diesen Fall nicht übertragen.

xx) wir brauchen „gleich“ in derselben Bedeutung wie „kongruent.“

Wir kommen zu einer neuen wichtigen Definition:
Wenn ein Winkel seinem Nebenwinkel gleich ist, so heisst er ein rechter Winkel.

Wir heben hervor, dass wir die Existenz rechter Winkel erst später beweisen werden; jedenfalls aber gilt der Satz:

4.) Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Beweis: Seien α, β rechte Winkel, dann sind $\alpha + \alpha$ und $\beta + \beta$ gestreckte Winkel, also nach 9.:

$$\alpha + \alpha = \beta + \beta$$

Nehmen wir nun an, es sei $\alpha > \beta$; (NB: Wir haben nicht ausdrücklich bewiesen, es folgt aber, besonders aus Axiom 7., dass zwischen zwei beliebigen Winkeln stets eine und nur eine der Beziehungen $=, >, <$ besteht) dann schreiben wir:

$$(\alpha - \beta) + \alpha = \beta.$$

Da $\alpha - \beta > 0$ ist, so müsste $\beta > \alpha$ sein; das ist aber gegen die Annahme. Also ist $\alpha = \beta$, q. e. d.

Der Satz 4. tritt bei Euklid wie auch bei Lindemann meiner Meinung nach irrtümlicherweise als Axiom auf; das rührt daher, dass diese Autoren nicht die Sätze über den Begriff „zwischen" systematisch aufgebaut haben, wie wir es thaten.

C. Das Band zwischen den Sätzen über Streckenkongruenz und denen über Winkelkongruenz bildet das folgende Axiom (der sog. 1. Kongruenzsatz.)

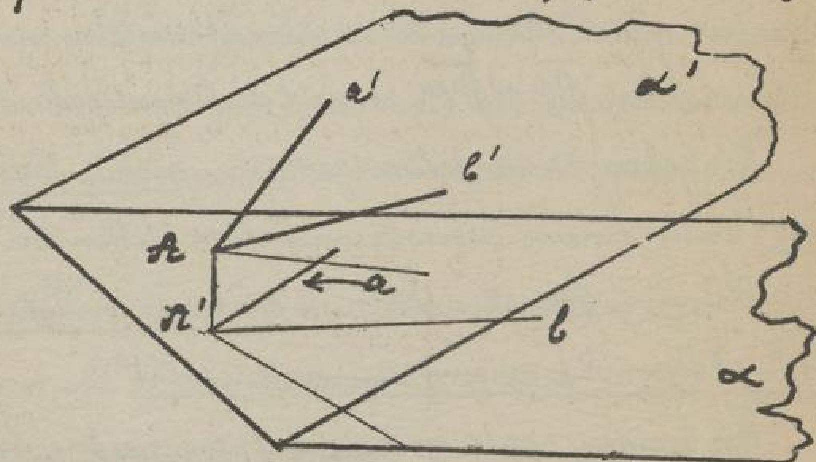
<u>10. Wenn in zwei Dreiecken ABC und $A'B'C'$ $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ ist, dann ist auch stets $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, $\sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$, $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C'$: wir sagen dafür kurz: die Dreiecke sind kongruent.</u>

Bei diesem Axiom wollen wir einmal wieder etwas länger verweilen, und den Satz beweisen:

<u>10. ist keine Folge der vorhergehenden Axiome.</u>

<u>Beweis</u>: Im gewöhnlichen, Euklidischen Raum denken wir uns durch eine Grade zwei Ebenen α und α' gelegt. Das Abtragen von Strecken soll ausnahmslos im gewöhnlichen Sinne gelten, das Abtragen von Winkeln im allgemeinen auch; in Bezug auf die Ebenen α und α' aber sollen folgende Festsetzungen gelten:

(also AA' senkrecht in A zur Ebene α)



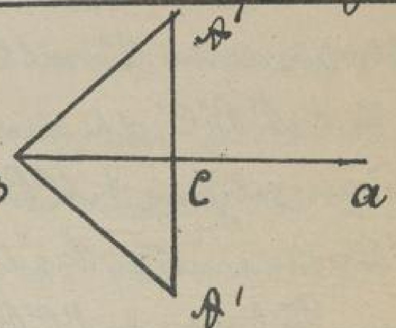
In α soll Parallelverschiebung und Drehung von Winkeln im gewöhnlichen Sinne gelten, ebenso in α' die Parallelverschiebung; ein Winkel $a'b'W'$ in α' soll seiner orthogonalen Projektion abW in α gleich heissen; die Drehung eines Winkels $a'b'W'$ in α' um seinen Scheitel, sodass etwa a' die gegebene Lage c' erhält muss demnach so ausgeführt werden, dass zuerst $a'b'W'$ orthogonal auf α projiziert, dann in der Ebene α im gewöhnlichen Sinne gedreht wird, sodaß der Schenkel a in die Projektion c von c' fällt, und endlich der entstandene Winkel nach α' zurückprojiziert wird.

In der so definierten Geometrie gelten thatsächlich alle Axiome, zB. das von der Gleichheit aller gestreckten Winkel; denn ein gestreckter Winkel ändert sich ja nicht bei der Projektion. Axiom 10. aber gilt nicht. Liegen nämlich die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in den Ebenen α und α', und ist $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$, $\sphericalangle BAC \equiv B'A'C'$ im Sinne unserer Geometrie, so ist nach der gewöhnlichen Auffassung $\sphericalangle BAC \not\equiv \sphericalangle B'A'C'$, und folglich $\overline{BC} \not\equiv \overline{B'C'}$. Da nun in Bezug auf Strecken die Auffassungen unserer Geometrie und die der Euklidischen übereinstimmen, so ist auch im Sinne der ersteren $\overline{BC} \not\equiv \overline{B'C'}$, womit die Ungültigkeit von 10. gezeigt ist. –

Wir geben nachträglich (zu 10.) eine genaue Definition des Dreieckwinkels: Unter einem Dreieckswinkel verstehen wir einen Winkel, dessen Schenkel zwei Dreieckseiten sind, während ein Punkt der dritten Seite als Winkelpunkt genommen werden soll.

Wir werden später zeigen, daß wir weitere Kongruenzaxiome nicht nötig haben; vorerst aber wollen wir aus unsern Axiomen eine ganze Reihe zum Teil sehr wichtiger Sätze herleiten. Wir werden sehen, daß es dabei sehr auf die Reihenfolge ankommt, in der wir die Sätze vornehmen. Diese Reihenfolge wird von der in den Lehrbüchern der Elementargeometrie üblichen stark abweichen; sie wird dagegen vielfach uebereinstimmen mit der Reihenfolge bei Euklid. So führen uns diese ganz modernen Untersuchungen dazu, den Scharfsinn dieses alten Mathematikers recht zu würdigen und aufs höchste zu bewundern. –

Wir beweisen zuerst: <u>Es giebt rechte Winkel</u>, indem wir gleich zeigen, <u>wie man von einem Punkt A auf eine Grade a ein Lot fällen kann.</u>



Man verbinde A mit irgend einem Punkte B auf a, und trage den Winkel AB, a in B an a nach der andern Seite hin ab. Den neu entstehenden Schenkel $A'B$ mache man $= AB$ und verbinde A mit A'. Da A und A' auf verschiedenen Seiten von a liegen, muss $A\overline{A'}$ die Grade a in einem Punkte C schneiden. $AC\,A'$ ist dann das verlangte Lot; denn nach 10. ist:

$$\Delta A'BC \cong \Delta ABC$$

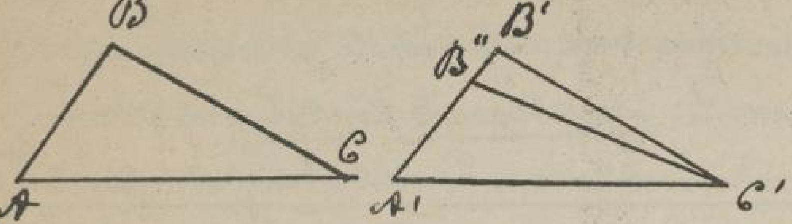
dh. $\sphericalangle BCA' = \sphericalangle BCA$. Nun ist $\sphericalangle A'CA$ ein gestreckter, also ist nach Definition $\sphericalangle ACB$ ein rechter q. e. d. –

Der sog. <u>II. Kongruenzsatz</u> lautet:

<u>Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, so sind sie kongruent.</u>

<u>Beweis.</u> Wir nehmen an, es sei $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. Sei nun, entgegen der Behauptung, $\overline{AB} \neq \overline{A'B'}$, sei also etwa $AB < A'B'$. Tragen wir dann $\overline{AB}$ auf $\overline{A'B'}$ von A aus nach der

Seite von B' ab, so muss der Endpunkt B'' dieser Strecke zwischen A' und B' fallen (nach den linearen Kongruenzaxiomen).



Wir verbinden dann B'' mit C' und sehen leicht nach 10., dass $\Delta ABC \cong \Delta A'B''C'$, d.h. auch $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B''$ ist. Nun ist nach Voraussetzung $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A'C'B'$, sodass also $\sphericalangle A'C'B' = \sphericalangle A'C'B''$ sein müsste. Das ist aber nicht möglich, denn $\sphericalangle A'C'B''$ ist ja ein Teil von $\sphericalangle A'C'B'$. Demnach ist unsere Annahme $AB \neq A'B'$ falsch, es ist $AB = A'B'$, und nun folgt aus 10. sofort, dass $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ ist, q. e. d.

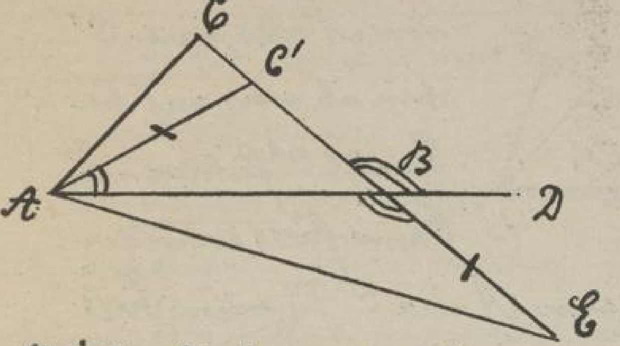
Von grosser Bedeutung ist der

Satz vom Aussenwinkel.

In jedem Dreieck ABC ist der Nebenwinkel CBD des Winkels CBA (der „Aussenwinkel") grösser als jeder der beiden andern Dreieckswinkel, z.B. als $\sphericalangle CAB$.

Beweis: Nehmen wir erstens an, es sei $\sphericalangle CBD < \sphericalangle CAB$; dann können wir $\sphericalangle CBD$ in A an AB so abtragen, dass der neu entstehende Schenkel die Seite BC in C' schneidet. vgl. die Axiome über Winkelkongruenzen und den Satz pag.   Ist zweitens $\sphericalangle CBD = \sphericalangle CAB$, so liegt die Sache einfacher; wir nehmen dann C selbst als Punkt C' an. In beiden

Fällen, verlängern wir nun BC über B hinaus um AC', bis zum Punkt E, und verbinden A mit E. Dann ist, wegen $AB = BA$, $AC' = BE$, $\sphericalangle C'AB = \sphericalangle C'BD = \sphericalangle EBA$:



$\Delta ABC' \cong \Delta . BAE$ folglich ist:

$\sphericalangle ABC' = \sphericalangle BAE$;

Nun war $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BAC'$, also sind auch die Summen der Winkel links und rechts gleich, d.h. $\sphericalangle C'BE = \sphericalangle C'AE$. Nun ist $\sphericalangle C'BE$ ein gestreckter, also ist auch $\sphericalangle C'AE$ ein gestreckter Winkel, d.h. C', A, E liegen auf einer Graden; aber auch $C'BE$ liegen auf einer Graden; diese beiden Graden hätten also zwei Punkte C', E gemein, ohne zusammenzufallen (denn A liegt nicht auf $C'E = BC$); das ist aber unmöglich (cf. die Axiome I.) und somit ist der Satz vom Aussenwinkel bewiesen.

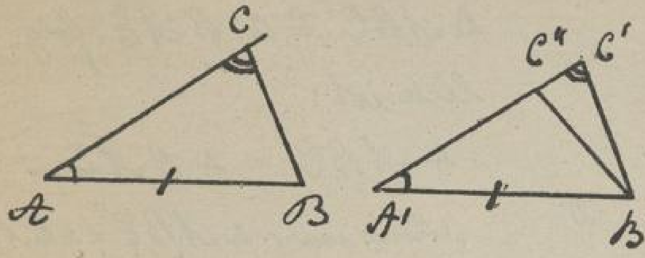
Hieran knüpft sich die Folgerung, dass in jedem Dreieck wenigstens zwei Winkel „spitz" d.h. kleiner als ein Rechter sein müssen. Wären nämlich etwa α und β beide stumpf, so wäre der Aussenwinkel bei α einerseits spitz, als Nebenwinkel eines stumpfen Winkels, andererseits stumpf, denn er müsste ja nach dem Satz vom Aussenwinkel $> \beta$ sein. So kommen wir also auf einen Widerspruch. –

Weiter: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in einer Seite, einem

<u>anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.</u>

<u>Beweis.</u> Sei $AB = A'B'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$.

Wir nehmen an, es sei $AC \neq A'C'$, und tragen AC auf $A'C'$ von A' aus nach C' hin ab, was auf den Punkt C'' führen mag. Dann fällt entweder



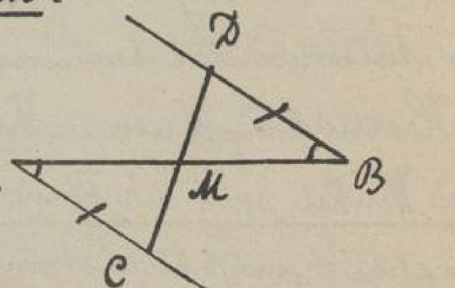
C'' zwischen A und C', oder C' zwischen A und C''. In jedem Fall verbinden wir C'' mit B' und haben nach 10:

$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

d.h. es muss sein $\sphericalangle C = \sphericalangle A'C''B' = \sphericalangle A'C'B'$. Nach dem Satz vom Aussenwinkel ist diese Gleichheit nicht möglich. Wir haben also: $AC = A'C'$ und nach 10: $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.–

Wir können jetzt die <u>Aufgabe lösen</u>:

<u>Eine beliebige Strecke zu halbieren.</u>



Sei $\overline{AB}$ die gegebene Strecke; wir tragen in A und B gleiche Winkel an, aber nach verschiedenen Seiten der Graden a und machen die freien Schenkel einander gleich: $AC = BD$. Die Strecke CD muss die Grade a schneiden in M etwa, da C und D auf verschiedenen Seiten von a liegen. Dann ist M der gesuchte Halbierungspunkt. Denn es ist nach dem eben bewiesenen Kongruenzsatz $\Delta AMC \cong \Delta BMD$,

d. h. es ist $AM = BM$, wie verlangt wurde. –

Der Satz vom gleichschenkligen Dreieck.

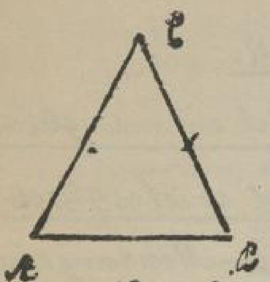
Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel einander gleich. Wenn in einem Dreieck die Basiswinkel gleich sind, so ist es gleichschenklig. Wir beweisen nur den ersten Teil; die Umkehrung wird ganz analog bewiesen.

Der Beweis dieses Satzes kann, wie wir unten sehen werden, überaus einfach geführt werden. Aber alle Beweise, die man in den üblichen Lehrbüchern findet, sind meist unbrauchbar. Bei dieser eigentümlichen Thatsache müssen wir einen Moment verweilen. Es scheinen sich zunächst drei Weisen darzubieten, um den Satz herzuleiten:

1) Man könnte AB in M halbieren und dann zeigen wollen, dass $\triangle ACM \cong \triangle BCM$ ist. Dazu braucht man aber den sog. III. Kongruenzsatz, der seinerseits erst mit Hülfe des Satzes vom gleichschenkligen Dreieck beweisbar ist.

2.) Man könnte von C auf AB ein Lot CM fällen; aber das führt auf den sog. IV. Kongruenzsatz, über den dieselbe Bemerkung wie bei 1) zu machen ist.

3.) Durch Halbierung des Winkels C kommt man allerdings zum Ziel, aber nur auf einem sehr langen Wege; vor allem muss man dazu erst die Halbierung eines Winkels einwandsfrei einführen, was bis jetzt noch nicht geschehen war.

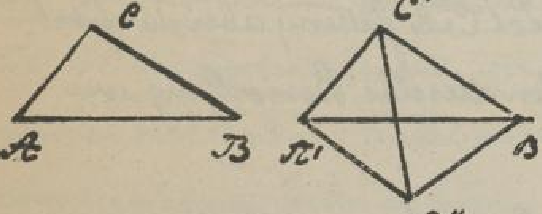


Ein wirklich strenger und sehr einfacher Beweis ist folgender: Es ist $CA = CB$, $BC = AC$ nach Voraussetzung, $\sphericalangle C = \sphericalangle C$, also $\Delta BCA \cong \Delta ACB$, also $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC$, q. e. d.

Nun beweisen wir den <u>III. Kongruenzsatz</u>:

<u>Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in allen drei Seiten übereinstimmen.</u>

<u>Beweis.</u> Wir tragen ΔABC an $\Delta A'B'C'$ in der Weise ab, dass erstens A auf A', B auf B' fällt und dass C' und C'' auf verschiedenen Seiten von $A'B'$ liegen; ferner machen wir $\sphericalangle B'A'C'' = \sphericalangle BAC$ und $A'C'' = AC$. Dann ist nach 10: $\Delta A'B'C'' \cong \Delta ABC$, dh. auch: $CB = C''B'$. Nun verbinden wir C' mit C''; dann ist $A'C'C''$ ein gleichschenkliges Dreieck, weil $A'C' = AC = A'C''$ ist; also ist nach dem vorigen Satz $\sphericalangle A'C''C' = \sphericalangle A'C'C''$.

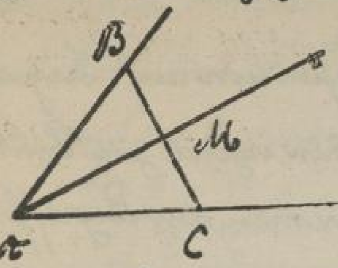


Ebenso ist $\Delta B'C'C''$ gleichschenklig, denn es ist $B'C' = BC = B'C''$. Also ist auch: $\sphericalangle B'C''C' = \sphericalangle B'C'C''$. Addirt man nun die beiden Winkelgleichheiten, so kommt:

$$\sphericalangle A'C''B' = \sphericalangle A'C'B'.$$

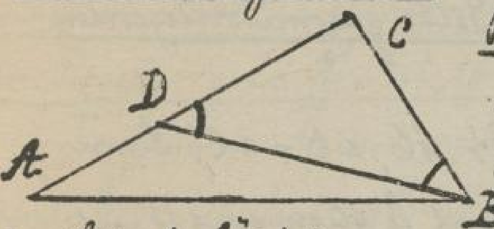
Der Winkel links ist aber $= \sphericalangle ACB$, also wird $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$. Nun können wir 10 anwenden und haben $\Delta ABC \cong \Delta A'A'C'$ q. e. d.

<u>Aufgabe</u>: <u>Einen gegebenen Winkel zu halbieren.</u>



Wir machen $AB = AC$, halbieren BC in M und ziehen AM. Dann ist nach dem III. Kongruenzsatz $\Delta ABM \cong \Delta ACM$, also $\measuredangle BAM = \measuredangle CAM$, wie verlangt wurde.

<u>In jedem Dreieck liegt der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber, und umgekehrt.</u>



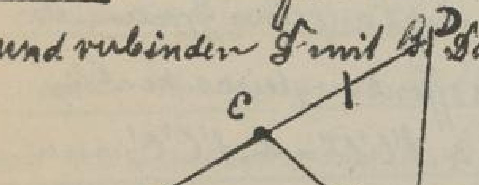
<u>Beweis.</u> Sei $AC > BC$, dann ist zu zeigen, dass $\beta > \alpha$ ist. Wir tragen BC auf AC in C nach A hin ab. Der Endpunkt D dieser Strecke fällt dann wegen $AC > BC$ zwischen A und C. Dann ist ΔBCD gleichschenklig, also ist $\measuredangle CDB = \measuredangle CBD$. Nun ist einerseits $\measuredangle ABC > \measuredangle CBD$, andererseits ist $\measuredangle CDB$ als Aussenwinkel $> \measuredangle DAB$. Also ist schliesslich $\measuredangle ABC > \measuredangle BAC$, q. e. d.

Die Umkehrung beweist man ganz analog.

Der nächste Satz soll sein:

<u>In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte.</u>

<u>Beweis.</u> Wir verlängern AC über C hinaus um CB bis zum Punkte D, und verbinden D mit B. Dann ist $\measuredangle CDB = \measuredangle CBD$ und $\measuredangle CBD < \measuredangle ABD$, also auch $\measuredangle ABD > \measuredangle CDB$.



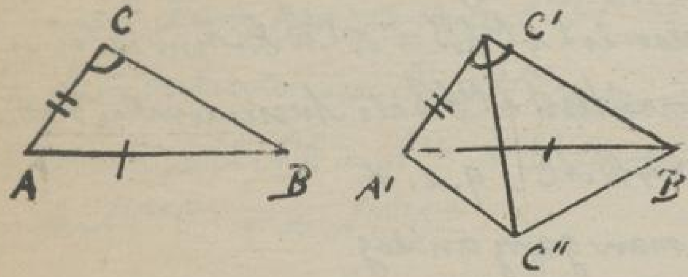
Folglich ist, nach dem vorigen Satz: $AD > AB$, und da $AD = AC + CB$

so ist auch $AC + CB > AB$, q. e. d. –

Bei manchen tritt dieser Satz als Folge der Definition auf: Die gerade Linie ist die kürzeste Verbindungslinie zwischen irgend zwei Punkten. Eine solche Definition ist aber sinnlos, wenn man den Begriff der Länge nicht definiert.

Der IV. Kongruenzsatz: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie in zwei Seiten und dem der grösseren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

Beweis. Sei $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $AB > AC$, $\angle C = \angle C'$. Dann ist nach p. 51 auch $\angle C > \angle B$, $\angle C' > \angle B'$ und folglich sind B und B' beide spitz [p. 47].



Wir tragen nun $\angle A$ in A' an $A'B'$ an nach der entgegengesetzten Seite von C' und machen den freien Schenkel $A'C'' = AC$. Dann ist nach 10: $\Delta A'B'C'' \cong \Delta ABC$, also $\angle A'B'C'' = \angle B$. Da nun B und B' beide spitz sind, so ist $B + B' = \angle C'B'C''$ kleiner als ein gestreckter, d.h. C', C'', B' liegen nicht auf einer Graden. Also bilden C', C'', B' ein wirkliches Dreieck, welches offenbar gleichschenklig ist. Denn es ist zunächst $A'C' = A'C''$, also $\angle A'C'C'' = \angle A'C''C'$; nach Voraussetzung ist $\angle A'C''B' = \angle ACB = \angle A'C'B'$, also ist auch $\angle B'C''C' = \angle B'C'C''$ und also $\Delta C'C''B'$ gleichschenklig, d.h. $B'C' = B'C''$.

Nach dem III. Kongruenzsatz ist daher $\Delta A'B'C'' \cong \Delta A'B'C'$ und folglich $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. –

Um jetzt die bisherigen Kongruenzsätze zusammenzufassen, definieren wir: Ein System von endlich vielen Punkten heisst eine Figur. Liegen alle Punkte in einer Ebene, so heisst sie eine ebene Figur.

Zwei Figuren heissen: kongruent, wenn ihre Punkte sich paarweise einander so zuordnen lassen, dass die einander zugeordneten Strecken und Winkel sämtlich kongruent sind.

Kongruente Figuren haben auf Grund der Kongruenzaxiome folgende Eigenschaften: 3 Punkte einer Graden liegen auch in jeder kongruenten Figur auf einer Graden; die Reihenfolge der Punkte auf einer Graden, sowie die Anordnung der Punkte in Bezug auf homologe Grade ist in kongruenten Figuren die nämliche.

Wir fassen nun unsere ebenen Kongruenzsätze zusammen in den allgemeinen Kongruenzsatz: Wenn $(A, B, C, \dots)$ und $(A', B', C' \dots)$ kongruente ebene Figuren sind, und P ein Punkt in der Ebene der ersten, so lässt sich in der Ebene der zweiten Figur stets ein Punkt P' finden derart, dass $(A, B, C, \dots P)$ und $(A', B', C' \dots P')$ wieder kongruente Figuren sind. Enthalten die beiden Figuren wenigstens drei nicht auf einer Graden liegende Punkte, so ist die Konstruktion von P' nur auf eine Weise möglich.

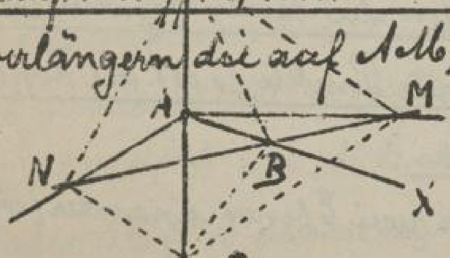
Wir erkennen hieraus, dass wir zwei Ebenen einander (bezw. eine

Ebene sich selbst) punktweise eineindeutig zuordnen können, wenn wir in jeder Ebene einen Punkt, eine Grade durch diesen Punkt, eine Seite auf dieser Graden u. eine Seite der Ebene inbezug auf die Grade festlegen. Wir sagen, dass bei dieser Transformation die beiden Ebenen zur Deckung gebracht werden, bezw. die eine Ebene in sich bewegt wird. Damit haben wir den Begriff der Bewegung auf den Kongruenzbegriff gegründet.–

Wir schliessen hier die Betrachtung der ebenen Kongruenzbeziehungen ab und zeigen nun, dass wir für den Raum keine Kongruenzaxiome mehr nötig haben. Wir müssen zu diesem Zweck die wichtigsten stereometrischen Sätze durchgehen; im allgemeinen können wir dabei die üblichen Beweise benutzen, nur haben wir genau darauf zu achten, dass wir nirgends parallele Linien anwenden, da wir von diesen erst im nächsten Abschnitt sprechen werden.

Zuerst beweisen wir:
Wenn eine Grade auf zwei Graden einer Ebene gleichzeitig senkrecht steht, so steht sie auf allen Graden dieser Ebene, die sie überhaupt treffen, senkrecht.

Beweis. Wir verlängern die auf AM und AN senkrecht stehende Strecke AP über A hinaus um sich selbst, so



dass $\overline{AQ} = \overline{AP}$ wird. Nennen wir nun irgend einen Halbstrahl AX durch A in der Ebene A, M, N. Die Punkte M, N lassen sich offenbar stets so wählen, dass die Grade MN entweder AX oder die Verlängerung von AX über A hinaus schneidet, etwa in B. Nun ist nach 10: $\Delta PAM \cong \Delta QAM$, $\Delta PAN \cong \Delta QAN$, folglich ist $PM = QM$, $PN = QN$, und weiter $\Delta PMN \cong \Delta QMN$. Also ist $\angle PMN = \angle QMN$, daraus folgt wieder, dass $\Delta PBM \cong \Delta QBM$ ist, woraus sich $PB = QB$ ergiebt.

Dann ist endlich, nach dem III. Kongruenzsatz $\Delta PAB \cong \Delta QAB$, also $\angle PAB = \angle QAB$. Die Summe dieser Winkel ist ein gestreckter, also jeder ein rechter. q. e. d.

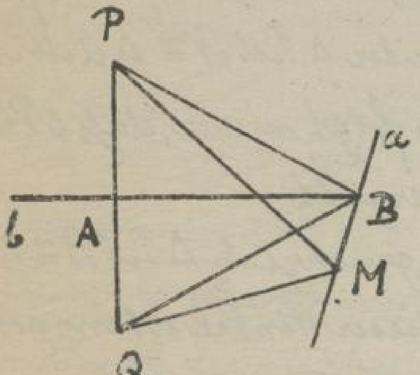
Wir sagen: AP steht senkrecht auf der Ebene AMN.

Nun beweisen wir die Existenz von Senkrechten auf einer Ebene, indem wir gleich die Aufgabe lösen, in einem Punkt A einer Ebene α auf dieser eine Senkrechte zu errichten.

Wir ziehen durch A zwei Grade a, b, in der Ebene α. Dann können wir mit Hülfe des vorigen Satzes eine Ebene finden, die in A auf a senkrecht steht [wir brauchen nur durch a zwei Ebenen zu legen, in jeder von ihnen auf a in A ein Lot zu errichten und durch diese Lote eine Ebene zu legen] und ebenso eine, die in A auf b senkrecht steht. Beide Ebenen schneiden sich notwendig in einer Graden, und diese ist die verlangte Senkrechte.

Nun wollen wir umgekehrt <u>von einem Punkte P auf eine Ebene α ein Lot fällen.</u>

Wir ziehen in α irgend eine Grade a und fällen von P das Lot auf a [pag. 45]; es möge a in B schneiden. Nun ziehen wir in α eine Grade b, die in B auf a senkrecht steht, und fällen endlich von P auf b ein Lot PA.

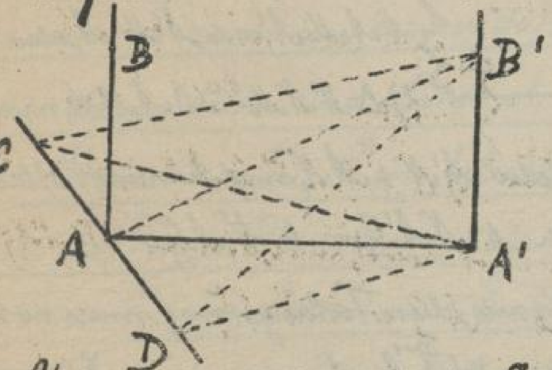


Wir behaupten, daß AP das verlangte Lot auf α ist. Das ist gezeigt, sobald wir wissen, daß AP ausser auf b noch auf irgend einer Graden in α durch A senkrecht steht. Verbinden wir also A mit einem Punkt M auf a, verlängern wir ferner AP über A hinaus um sich selbst bis Q. Dann ist zunächst $\Delta PAB \cong \Delta QAB$ nach 10. Also ist $PB = QB$. Weiter war $a \perp BP$, und $a \perp AB$, also nach dem vorigen Satze auch $a \perp BQ$, d.h. es ist $\sphericalangle PBM = \sphericalangle QBM$ = einem rechten. Also ist nach 10. $\Delta PBM \cong \Delta QBM$, also $PM = QM$. Dann ist nach dem III. K.S. $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$, woraus wie pag. 55, folgt: $\sphericalangle PAM$ = einem rechten Winkel. q.e.d.

Wir weisen schon hier darauf hin, daß die eben bewiesenen Sätze uns später bei der Paralleltheorie sehr wesentliche Dienste leisten werden.-

<u>Zwei Lote auf einer Ebene liegen stets in einer Ebene.</u>

Beweis. Sei also $AB \perp \alpha$, $A'B' \perp \alpha$; wir haben zu zeigen, dass AB, $A'B'$ in einer Ebene liegen. Wir ziehen dazu in α senkrecht zu AA' durch A eine Grade $C_A D$ und machen $AC = AD$. Dann ist nach 10: $\triangle CA'A \cong \triangle DA'A$, folglich $CA' = DA'$, also nach 10: $\triangle CA'B' \cong \triangle DA'B'$, folglich $CB' = DB'$, also nach dem III. Kongr. S.: $\triangle AB'C \cong \triangle AB'D$, also $\angle CAB' = \angle DAB'$, dh. $CD \perp AB'$. Nun ist auch $CD \perp AA'$ und $CD \perp AB$, daraus folgt aber, dass AA', AB, AB' und also auch AB und $A'B'$ in einer Ebene liegen, wenn man die Umkehrung des Satzes pag. 54 benutzt, die wir der Kürze halber hier ohne Beweis anführen:

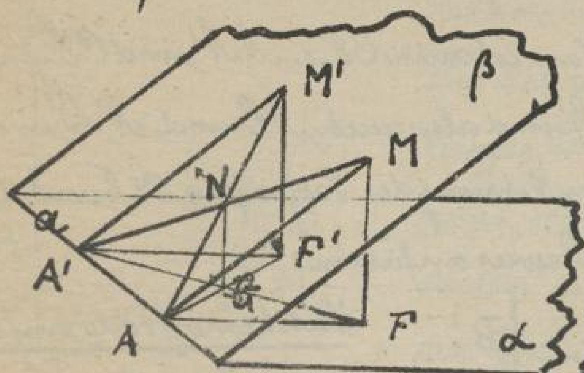


Steht eine Grade auf drei durch einen Punkt gehenden Graden gleichzeitig senkrecht, so liegen diese drei Graden in einer Ebene.

Um zu dem allgemeinsten Kongruenzsatz im Raum zu gelangen, haben wir nur noch folgenden Satz zu beweisen: Zwei Ebenen α, β mögen sich in der Graden a schneiden, A und A' seien Punkte auf a. Errichten wir nun in A und A' Lote auf a, und zwar sowohl in α als auch in β, die wir der Kürze halber mit $A\alpha$, $A\beta$, $A'\alpha$, $A'\beta$ bezeichnen, so ist der Winkel zwischen den Loten in A gleich dem Winkel zwischen den Loten in B. Wir nennen diesen Winkel den Neigungswinkel der beiden Ebenen α und β.

Beweis. Auf dem Lot $A\beta$ nehmen wir einen Punkt M und fällen von M ein Lot auf $A\alpha$, nämlich MF. Dann steht MF senkrecht auf der Ebene α;

nach der Konstruktion p. 55.56. Jetzt tragen wir die Strecke $\overline{AM}$ von A aus auf $A'\beta$ ab, und fällen von dem entstehenden Punkt M' aus ein Lot $M'F'$ auf $A'\alpha$; dann steht auch $M'F'$ senkrecht auf α. Dann schneiden sich die Graden $A'M$, AM' in einem Punkte N der Ebene β, wie man leicht erkennt. Von N aus fällen wir endlich ein Lot NG auf α.



Dann haben wir folgende Reihe von Kongruenzen: 1) $\Delta AA'M \cong \Delta AA'M'$, nach dem Axiom 10. Also ist $\sphericalangle AMA' = \sphericalangle A'M'A$, also 2) $\Delta A'NM' \cong \Delta ANM$, nach dem II. Kongruenzsatz. Daraus folgt wieder $A'N = AN$, und hieraus: 3) $\Delta A'NG \cong \Delta ANG$, nach dem IV. K.S. Also ist auch $\sphericalangle NA'G = \sphericalangle NAG$.

Nun verlängere ich AG über G hinaus; diese Verlängerung muss notwendig durch F' gehen. Denn der Fusspunkt F' liegt erstens in der Ebene α, zweitens nach dem Satz p. 56 in der Ebene $ANM'G$, also liegt er auf der Schnittgraden beider Ebenen; das ist aber AG. Ebenso liegt F auf der Verlängerung von $A'G$ über G hinaus.

Nun ist 4) $\Delta AM'F' \cong \Delta AMF$, nach dem IV. K.S. also ist $M'F' = MF$. Daraus folgt endlich, wieder nach dem IV. K.S., dass 5) $\Delta A'M'F' \cong \Delta AMF$ ist, woraus sich ergiebt $\sphericalangle M'A'F' = \sphericalangle MAF$. q. e. d.

Mit Hülfe dieses Satzes können wir nun an eine Ebene α in einer gegebenen Graden a <u>eine zweite Ebene unter gegebenem Winkel</u>

antragen. Es ergiebt sich also die Drehung einer Ebene um eine Grade rein logisch aus den linearen und ebenen Kongruenzaxiomen, während die Verschiebung auf einer Graden und die Drehung einer Graden um einen Punkt in einer Ebene axiomatisch festgelegt werden musste [Axiom 1. und 5.]

Nun ist es leicht, den allgemeinsten Kongruenzsatz für den Raum ein Analogon zu dem Satz pag. 53, zu beweisen, den wir mit Vorausschickung einer Definition so aussprechen:

Zwei Figuren im Raum heissen kongruent, wenn ihre Punkte sich einander so zuordnen lassen, dafs alle homologen Strecken und Winkel einander gleich sind. – Sind $(A, B, C, \dots)$ und $(A', B', C' \dots)$ kongruente Figuren und ist P ein beliebig gegebener Punkt, so lässt sich stets ein Punkt P' finden, sodafs die Figuren $(A, B, C \dots P)$ und $(A', B', C', \dots P')$ kongruent sind. Enthält die Figur (A, B, C) mindestens vier nicht in einer Ebene liegende Punkte, so ist die Konstruktion von P' nur auf eine einzige Weise möglich.

Dieser Satz sagt die Existenz einer gewissen umkehrbar eindeutigen Transformation des Raumes in sich aus, die wir als Kongruenz oder Bewegung bezeichnen können. Die Bewegung hat nach den früheren Sätzen die Eigenschaft, Punkte in Punkte, Grade in Grade, Ebenen in Ebenen zu transformieren; sie lässt ferner sämtliche Beziehungen der Verbindung und der Reihenfolge ungeändert. Diese Transformation ist vollständig bestimmt, wenn in den beiden Räumen je eine Ebene α, eine Grade a in α, ein Punkt A auf a, ferner eine Seite des Raumes in bezug auf die Ebene α, eine Seite der Ebene α in bezug auf a und endlich eine Seite von a in bezug auf den Punkt A gegeben sind.

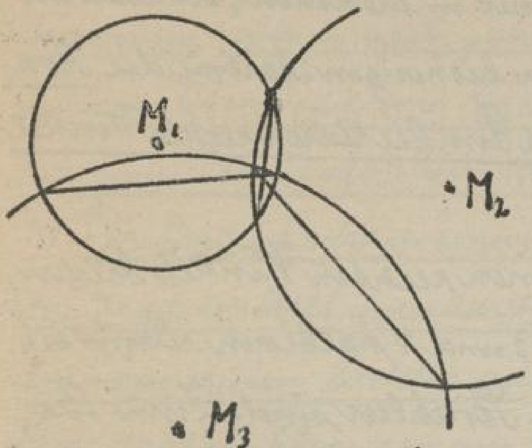
Den Begriff der Bewegung des Raumes haben wir hier, genau so wie früher den der Bewegung der Ebene, auf die Kongruenzaxiome gestützt. Der umgekehrte Weg, die Kongruenzaxiome und -sätze mit Hülfe des Bewegungsbegriffs zu beweisen ist falsch, da sich die Bewegung ohne den Kongruenzbegriff gar nicht definieren lässt.

Ehe wir zu den Axiomen IV und V übergehen, die den interressantesten Teil unserer Untersuchung bilden werden, wollen wir sehen, welche Sätze sich etwa noch mit Hülfe der drei ersten Axiomgruppen beweisen lassen.

Wie steht es zunächst mit der Geometrie des Kreises und der Kugel?

Kreis und Kugel lassen sich auf Grund der bisherigen Axiome natürlich sehr einfach definieren durch Strahlbüschel bezw. Strahlbündel und Abtragung von Strecken. Ferner gelten unverändert die Sätze über den Schnitt zweier Kreise einer Ebene und über den Schnitt einer Ebene mit einer Kugel; alles dies braucht nicht näher erörtert zu werden. Interesse bietet erst der Satz:

<u>Wenn sich drei Kreise einer Ebene in je zwei Punkten schneiden, so laufen die drei gemeinsamen Sehnen alle durch einen Punkt.</u>



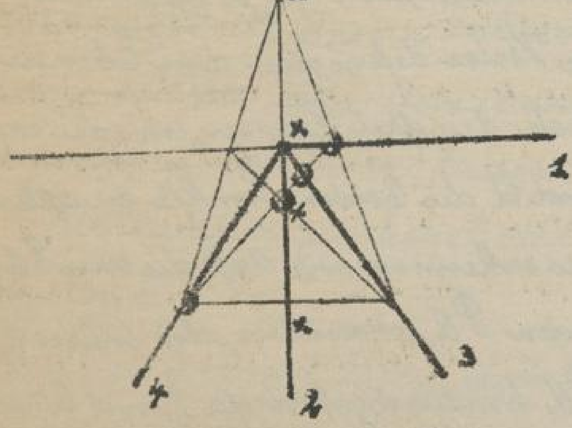
<u>Der Beweis dieses Satzes wird gewöhnlich folgendermassen geführt.</u> Um die Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 der drei Kreise denken wir uns Kugeln gelegt, welche aus der Zeichenebene grade unsere drei Kreise ausschneiden. Diese drei Kugeln schneiden sich zu je zweien in Kreisen K_{12}, K_{23}, K_{31}, und diese Kreise definieren drei Ebenen $\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}$, in denen natürlich die drei Sehnen, um die es sich handelt, liegen. Sind nun P und Q die beiden Punkte, die allen drei Kugeln gemeinsam sind, so erkennen wir, daß die drei Ebenen α_{12} α_{23} α_{31} sich in der Graden PQ schneiden, also müssen auch die drei Sehnen durch PQ hindurchgehen, da P und Q nach Symmetrie auf verschiedenen Seiten der Zeichenebene liegen. Nun liegen die drei Sehnen alle in einer Ebene; diese Ebene hat mit PQ einen und nur einen Punkt gemein, und durch diesen Punkt müssen also die drei Sehnen laufen.-

An diesem Beweis ist aber auszusetzen, daß <u>die Existenz der Punkte P und Q auf eine unbewiesene Annahme gegründet</u>

<u>ist</u>; wir wissen gar nicht, ob drei Kugeln, die sich paarweise schneiden, gemeinsame Punkte haben.

Ehe wir diesen Gegenstand näher untersuchen, schalten wir die Bemerkung ein, dass auf Grund der bisherigen Axiome die <u>Konstruktion harmonischer Strahlen und Punkte durch rechte Winkel</u> möglich ist. [cf. pag. 32]

Es mögen die Strahlen 1.2 einen rechten Winkel bilden, ferner soll 2 den Winkel zwischen 3 und 4 halbieren. Dann ist zu zeigen, dass 1, 2, 3, 4 harmonische Strahlen sind. Zum Beweis ziehen wir die in der Figur angegebenen Hülfslinien (auf 3 und 4 sind gleiche Strecken abgetragen. Dann sind nach der früheren Konstruktion pag. 32 die mit Kreuzen bezeichneten Punkte harmonisch, also auch die durch dieselben Strahlen ausgeschnittenen, mit Kreisen versehenen Punkte.



Diese werden aber andrerseits durch die Strahlen 1.2.3.4 ausgeschnitten, also sind diese Strahlen harmonisch. q. e. d.

Kehren wir nun zur Geometrie der <u>Kreise und Kugeln</u> zurück. Wir geben zunächst die <u>Schnittpunktsätze</u> ausführlich an, auf die schon pag. 60 hingewiesen wurde.

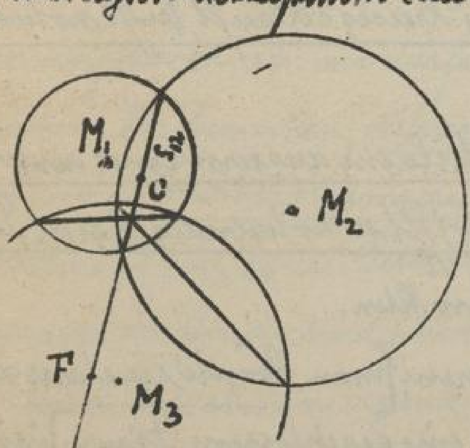
1) Eine Grade hat mit einem Kreis oder einer Kugel entweder keinen oder einen oder zwei Punkte gemein.

2) Ein Kreis hat mit einer Kugel keinen oder einen oder zwei Punkte gemein, oder er liegt ganz auf der Kugel.

3) Eine Ebene oder eine Kugel hat mit einer Kugel entweder keinen oder einen Punkt oder einen Kreis gemein.

4) Eine Grade, die durch einen Peripheriepunkt in einen Kreis oder eine Kugel eintritt, muss durch einen andern Peripheriepunkt wieder heraustreten. Dasselbe gilt von einem Kreise, der in einen andern Kreis derselben Ebene oder eine Kugel eintritt.–

Jetzt fahren wir fort in der Betrachtung des Sehnensatzes. Wir haben ihn bewiesen p. 61 unter der Annahme, dass die drei Kugeln um $M_1 M_2 M_3$ zwei Punkte P, Q gemein haben. Wir wollen diese Annahme nun genauer prüfen. Sei wieder K_{12} der den Kugeln 1 und 2 gemeinsame Kreis, dessen Ebene auf $M_1 M_2 M_3$ senkrecht steht, und dessen Mittelpunkt C die Sehne s_{12} halbiert. Die Ebene von K_{12}



schneidet die Kugel 3 in einem Kreise, dessen Mittelpunkt F auf der Verlängerung von s_{12} liegt. Es kommt also darauf an zu zeigen, dass die Kreise um C und F sich schneiden. Die Punkte P und Q, die wir so suchen, haben von C und F die Entfernungen CP, CQ, FP, FQ und es ist offenbar $FP + CP > CF$. d.h. P und Q wären die Ecken von Dreiecken, von denen wir wissen, daß die Summe zweier Seiten grösser ist als die dritte. Wir haben also zunächst das Ergebnis: Der Sehnensatz gilt sicher dann, wenn es stets möglich ist, aus drei gegebenen Seiten, wenn nur die Summe zweier grösser ist als die dritte, ein Dreieck zu konstruieren.

Daß dies thatsächlich nicht möglich ist, werden wir bald sehen. Fürs erste schliessen wir die Betrachtung des Sehnensatzes mit der Bemerkung ab: Der Sehnensatz gilt möglicherweise auch dann, wenn die genannte Konstruktion nicht stets möglich ist; wir müssen hier die Frage nach seiner Gültigkeit offen lassen. —

Nun kommen wir auf die obige Konstruktion zurück u. zeigen:

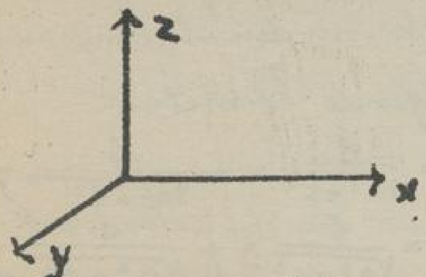
Auf Grund der bisherigen Axiome sind folgende Sätze nicht beweisbar:

1) Eine Grade, die im innern eines Kreises verläuft, trifft notwendig dessen Peripherie.

2) Wenn ein Kreis teils im innern, teils im äussern eines andern Kreises derselben Ebene verläuft, so trifft er notwendig dessen Peripherie, und zwar nach p. 53 in 2 Punkten.

Beide Sätze hängen eng zusammen; [man könnte sie etwas allgemein so aussprechen: Der Kreis ist eine geschlossene Figur;] insbesondere kommt 2) grade auf die oben verlangte Dreiecks-Konstruktion hinaus, wie man leicht sieht.

<u>Beweis:</u> Wir stellen uns eine Geometrie her, in der sämtliche Axiome I – III gelten, die Sätze 1) 2) aber nicht. Zu diesem Zwecke legen wir im R_3 ein gewöhnliches Koordinatensystem xyz zugrunde. Von den Punkten des R_3 sollen aber nur diejenigen unserer Geometrie angehören, deren sämtliche Koordinaten dem Zahlbereich angehören, der folgendermassen definiert ist:

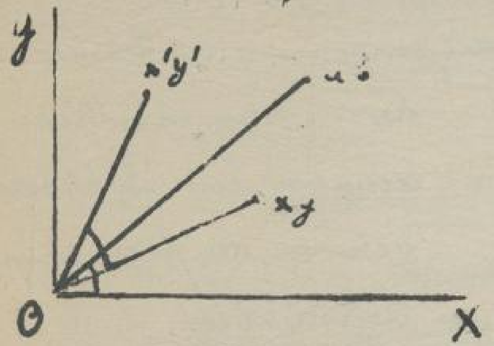


Wir bilden aus der Zahl 1 und einer transcendenten Zahl, z. B π, durch die vier Species alle möglichen Kombinationen, deren Gesamtheit den „Körper" $R(\pi)$ bildet. Dieser ganze Körper soll unserm Zahlbereich angehören, ausserdem aber auch alle Zahlen der Form $\sqrt{1+x^2}$, wo x irgend eine schon bekannte Zahl ~~von $R(\pi)$~~ ist; man sieht sofort, daß auch $\sqrt{x^2+y^2} = x.\sqrt{1+(\frac{y}{x})^2}$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2}$ u. s. w. unserm Bereich angehören, d.h. wir dürfen aus Quadratsummen Quadratwurzeln ziehen. Wir bemerken, <u>daß an dieser Stelle zum ersten Mal der Pythagoräische Lehrsatz in unsere Betrachtungen hereinspielt.</u>

Nachdem wir so die Punkte unserer Geometrie definiert haben, werden wir als Grade und Ebenen einfach die Verbindungsgraden und Verbindungsebenen irgend welcher von diesen Punkten betrachten.

In der so definierten Geometrie gelten offenbar die Axiome

I und II; aber auch die Kongruenzaxiome III, d.h. es ist Verschiebung und Drehung möglich. Denn die Verschiebung drückt sich analytisch durch Addition aus, die ja unter den fünf erlaubten Operationen sich befindet; und ebenso wird die Drehung um einen Punkt durch erlaubte Operationen dargestellt, z.B. hat man für die



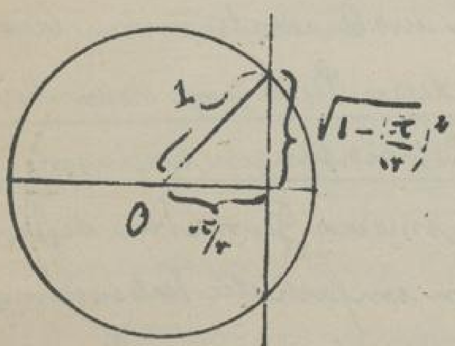
Drehung der xy = Ebene in sich um den Anfangspunkt folgende Formeln:

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\,y;$$

die Bedeutung der Buchstaben ist aus der Figur ersichtlich.

Nun aber wollen wir zeigen, daß eine Grade im innern und im äussern eines Kreises verlaufen kann, ohne ihn zu schneiden. Sei die Gleichung des Kreises $x^2+y^2=1$, die der Graden $x=\frac{\pi}{4}$. Diese hat Punkte im innern des Kreises, z.B. $x=\frac{\pi}{4}$, $y=0$, und auch im äussern, z.B. $x=\frac{\pi}{4}$, $y=1$. In der gewöhnlichen



Geometrie schneiden sich Grade und Kreis in den Punkten $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}$. Wir wollen zeigen, daß diese Punkte in unserer Geometrie nicht existieren, mit anderen Worten, daß $\sqrt{1-(\frac{\pi}{4})^2}$ sich nicht durch die fünf erlaubten Operationen aus 1 und π erzeugen lässt. Nehmen wir an, es gelte eine Beziehung

$$\sqrt{1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} = A(1,\pi),$$

wo A einen aus den fünf erlaubten Operationen gebildeten Ausdruck bezeichnet. Eine solche algebraische Beziehung für eine transzendente Zahl wie π kann aber nur dann richtig sein, wenn sie identisch gilt, d.h. wenn für jedes t

$$\sqrt{1-\left(\frac{t}{4}\right)^2} = A(1,t) \qquad \text{ist.}$$

Die rechte Seite ist für reelle t stets selbst reell, wie sich aus der Definition der 5 Operationen ergiebt; dagegen kann die linke Seite für reelle t imaginär werden. Also ist eine Gleichung der vorausgesetzten Art nicht möglich, und es giebt also keinen Schnittpunkt von Kreis und Grade.

Anmerkung: Die Heranziehung transzendenter Zahlen ist gar nicht notwendig; z.B. wenn man allein auf die Zahl 1 die 5 Operationen anwendet, so lassen sich schon sehr einfache Zahlen angeben, zu denen man nicht gelangt, z.B. die Zahl $\sqrt{1+\sqrt{2}}$. Wäre nämlich $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ durch unsere 5 Operationen darstellbar, so müsste sich $1+\sqrt{2}$ als Summe von Quadraten darstellen lassen:

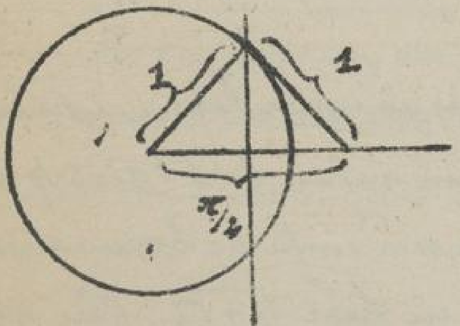
$$1+\sqrt{2} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\dots\lambda^2$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \dots \lambda$ algebraische Zahlen sind, die durch unsere 5 Operationen erhalten werden können. Algebraische Betrachtungen führen dann dazu, dass diese Gleichung auch richtig bleiben muss, wenn man $\sqrt{2}$ durch die konjugierte Zahl $-\sqrt{2}$, also $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$ durch geeignete zu $\alpha, \beta \ldots \lambda$ konjugierte Zahlen $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \ldots \lambda$ ersetzt, also:

$$-1-\sqrt{2} = \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 + \bar{\gamma}^2 + \ldots \bar{\lambda}^2$$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma} \ldots \bar{\lambda}$ sind reell, also ist die rechte Seite positiv, die linke ist aber negativ. Unsere Annahme ist also falsch, $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ mit unsern 5 Operationen nicht konstruierbar.

Jetzt ist leicht zu zeigen, dass sich z.B. aus den Seiten $a=1$, $b=1$, $c=\frac{\pi}{2}$ kein Dreieck konstruieren lässt. Gäbe es nämlich ein solches Dreieck, so könnte man es zunächst so verschieben, dass A in den Punkt $x=0, y=0$, und B in den Punkt $x=1, y=0$ fiele. Dann aber fiele C auf den Punkt $x=\frac{\pi}{4}$, $y=\sqrt{1-(\frac{\pi}{4})^2}$,



dessen Nichtexistenz wir soeben bewiesen haben. – An diese Betrachtungen werden wir später noch einmal anknüpfen, wenn wir untersuchen, mit welchen Hülfsmitteln gegebene Zahlen sich konstruieren lassen. Wir werden dabei u.a. finden, dass es einen wesentlichen Unterschied ausmacht, ob man den Zirkel unbeschränkt oder nur zum Abtragen von Strecken und von Winkeln benutzt. –

Bevor wir die Betrachtung der vierten Gruppe von Axiomen beginnen, wollen wir noch über die Beweisbarkeit oder Unbeweisbarkeit einiger wichtiger Sätze mit Hülfe der Axiome I–III einiges bemerken.

Betrachten wir zunächst die

Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreiecke.

Zum ~~besonderen~~ besseren Verständniss bemerken wir: Der Satz, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte beträgt, ist auf Grund der Axiome I–III durchaus unbeweisbar, wie unter IV ausführlich gezeigt werden wird; einen bestimmten Inhalt dagegen hat der Satz schon an dieser Stelle.

Die beiden Legendre'schen Sätze lauten:

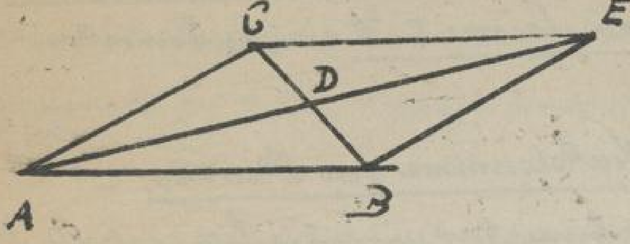
1.) In einem Dreieck kann die Summe der drei Winkel niemals grösser als 2 Rechte sein.

2.) Wenn in irgend einem Dreieck die Summe der drei Winkel gleich 2 Rechten ist, so ist sie es in jedem Dreieck.

Den ersten dieser Sätze beweist Legendre so:

Sei im ΔABC $\alpha \leqq \beta$, $\alpha \leqq \gamma$, und $AC \leqq AB$.

Halbieren wir nun BC in D und verlängern wir AD um sich selbst über D hinaus bis E. Nun betrachten wir ΔABE. Da wegen der Kongruenz der Dreiecke ADC und EDB $\sphericalangle BED = \sphericalangle CAD$ und $\sphericalangle EBD = \sphericalangle ACD$ ist, so ist $\sphericalangle EAB + \sphericalangle AEB = \alpha$, $\sphericalangle ABE = \beta + \gamma$, also die Winkelsumme im ΔABE gleich $\alpha + \beta + \gamma$, d.h. gleich der Winkelsumme im ΔABC. – Nun wollen wir zeigen, dass $\sphericalangle BAE$ der kleinste Winkel



im $\Delta\, ABE$ und zugleich $\leqq \frac{\alpha}{2}$ ist.

Zunächst ist $\sphericalangle BAE < \alpha < \beta + \gamma = \sphericalangle ABE$; weiter ist auch $\sphericalangle BAE \leqq \sphericalangle BEA$; wäre nämlich $\sphericalangle BAE > \sphericalangle BEA$, so müsste nach pag. 51 auch $BE > BA$ sein, oder da $BE = AC$ ist, auch $AC > BA$, gegen die Voraussetzung. Also ist $\sphericalangle ABE$ der kleinste Winkel im $\Delta\, ABE$. Dass ausserdem $\sphericalangle BAE \leqq \frac{\alpha}{2}$ ist, folgt nun leicht daraus, dass $\sphericalangle BAE + \sphericalangle BEA = \alpha$ und $\sphericalangle BAE \leqq \sphericalangle BEA$ ist.

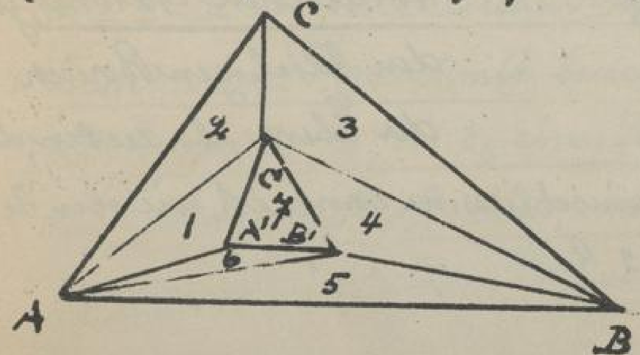
Wir können uns also aus jedem Dreieck ABC ein anderes Dreieck konstruieren mit derselben Winkelsumme, indem der kleinste Winkel höchstens halb so gross ist wie der kleinste Winkel von ABC. Nehmen wir nun an, die Winkelsumme im $\Delta\, ABC$ sei $2R + \delta$. Dann führe ich die angegebene Konstruktion n mal aus und wähle n so gross, dass $\frac{\alpha}{2^n} < \delta$ wird. Ich erhalte dann ein Dreieck, in welchem ein Winkel $< \delta$ ist, während die Winkelsumme $2R + \delta$ beträgt. Hieraus folgt, dass in diesem Dreieck die Summe zweier Winkel grösser als 2 Rechte wäre. Nun ist früher bewiesen, dass der Aussenwinkel zu $\sphericalangle A$ im Dreieck ABC stets grösser als der Winkel B ist. Es wäre dann also der $\sphericalangle A$ im Dreieck + dem Nebenwinkel zu $\sphericalangle A$ grösser als $\sphericalangle A + \sphericalangle B$ d.h. grösser als 2 Rechte, was nicht möglich ist.

In diesem Legendre'schen Beweis steckt nun aber eine Annahme, die nicht aus den Axiomen I – III bewiesen werden kann (wie wir später zeigen werden). Dass man nämlich stets ein n so finden kann, dass $\frac{\alpha}{2^n} < \delta$ wird bei gegebenem α und δ, ergiebt sich erst als Folge des Archimedischen Axioms, das wir später unter V behandeln.

Also: Der Legendre'sche Beweis ist für uns nicht zwingend; ob der Legendre'sche Satz nicht dennoch aus den Axiomen I – III folgt, lassen wir dahingestellt; fast ist zu vermuten, dass er sich in der That so beweisen lässt. –

Den Beweis des 2. Legendre'schen Satzes führen wir einfacher, als es wohl sonst zu geschehen pflegt, wobei wir übrigens den 1. Satz als richtig annehmen.

Zuerst zeigen wir: Wenn die Winkelsumme im $\Delta\, ABC$ zwei Rechte ist, und wenn $\Delta\, A'B'C'$ ganz im innern von ABC liegt, so ist auch in $A'B'C'$ die Winkelsumme 2 Rechte. Wir verbinden die Ecken der beiden Dreiecke, wie die Figur zeigt, derart dass ABC in 7 Dreiecke zerfällt. (Wir haben der Einfachheit halber angenommen, dass die Verbindungslinien der Ecken sich nirgendwo schneiden, wie der Beweis sich im andern Fall gestaltet, ist leicht zu sehen.)



Seien $W_1 \ldots W_7$ die Winkelsummen der 7 Dreiecke; dann ist $W_1 + \ldots + W_7 =$ $\alpha + \beta + \gamma + 3 \cdot 4 R$, also nach Voraussetzung:

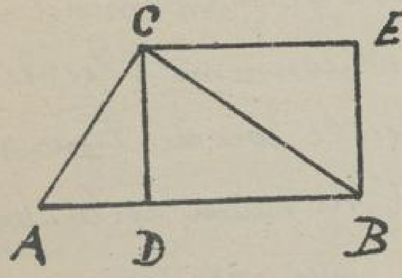
$$= (2+12) R = 14 R.$$

Andrerseits ist nach dem 1. Legendre'schen Satz:

$$W_1 \leqq 2 R, \ldots W_7 \leqq 2 R.$$

Hieraus folgt, dass notwendig $W_1 = 2 R$, $W_2 = 2 R \ldots$ und speziell auch die Winkelsumme in $A'B'C'$ $W_7 = 2 R$ sein muss.

Nun zeigen wir, dass man jedes gegebene Dreieck in das innere eines Dreiecks mit der Winkelsumme $2R$ oder, was gleichwertig ist, eines Vierecks mit der Winkelsumme $4 R$ bringen kann. Sei ABC ein Dreieck mit der Winkelsumme $2 R$. Fällen wir etwa von C ein Lot CD auf AB, dann ist wie eben bewiesen, auch im ΔBCD die Winkelsumme $2 R$, also wenn wir $\Delta BCE \cong \Delta BDC$ machen, die Winkelsumme des Vierecks $BDCE = 4R$. $\sphericalangle B = \sphericalangle C = \sphericalangle D = \sphericalangle E = R$. Durch Aneinanderlegen solcher Rechtecke kann man, unter Voraussetzung des Archimedischen Axioms, jeden beliebigen Bereich der Ebene überdecken, d.h.



auch das vorgegebene $\Delta A'B'C'$ einschliessen. Dann ist, wie oben bewiesen, auch im $\Delta A'B'C'$ $W = 2 R$. q. e. d.

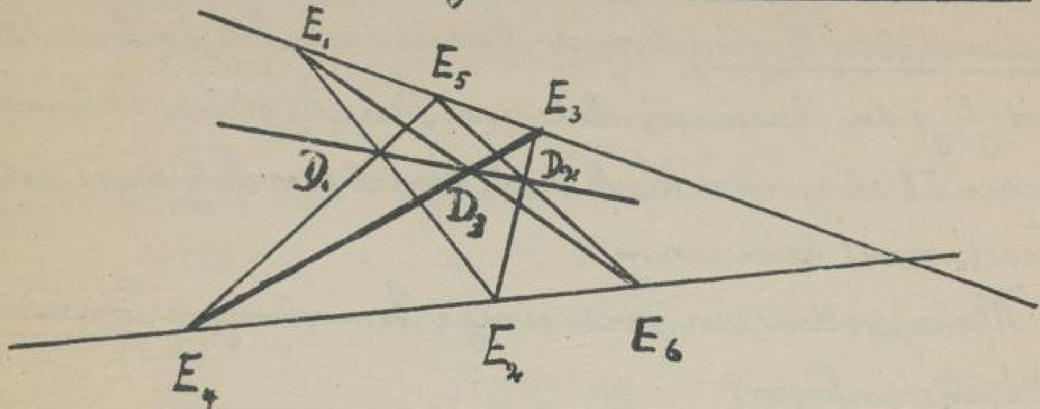
Nicht beweisbar auf Grund der Axiome I–III ist auch *z.B. der Satz von der Gleichheit zweier Peripheriewinkel über demselben Bogen*; denn der Beweis dieses Satzes erfordert den Satz, dass je der Aussenwinkel eines Dreiecks gleich der Summe der gegenüberliegenden Winkel ist. Und dieser Satz lässt sich hier noch nicht beweisen.–

Weiter wollen wir noch einige Bemerkungen *über Schnittpunktsätze* anfügen.

Wir haben bisher einen solchen, nämlich den *Satz von Desargues* kennen gelernt, und gefunden, dass er nicht beweisbar ist, wenn man nur die *ebenen* Axiome aus den Gruppen I und II zu grunde legt. Jetzt erhebt sich die Frage, ob der Satz von Desargues etwa beweisbar ist, wenn man zu den ebenen Axiomen I und II noch die Kongruenzaxiome III hinzunimmt.

Weiter bietet sich die Frage, ob aus den Axiomen I, II, III nicht noch weitere Schnittpunktsätze folgen. Das ist tatsächlich der Fall, wir können nämlich auf Grund der Axiome I–III den *Pascal'schen Satz für einen aus zwei Graden bestehenden Kegelschnitt* beweisen, der so lautet: *Liegen die Ecken $E_1, E_2, \dots E_6$ eines Sechsecks abwechselnd auf zwei sich schneidenden Graden, und schneiden sich die drei Paare gegenüberliegender Seiten in den Punkten $D_1 = (E_1 E_2, E_4 E_5)$, $D_2 = (E_2 E_3, E_5 E_6)$, $D_3 = (E_3 E_4, E_6 E_1)$, so liegen diese drei Punkte* auf einer Graden.

Der Beweis dieses Satzes (vgl. Schur, Math. Ann. 51.)



kann geführt werden mit Hülfe aller Axiome I–III, nicht etwa nur der ebenen. Er beruht im Grunde auf dem einschaligen Hyperboloid und benutzt wesentlich die Spiegelung des Raumes an einer Ebene.

Wir werden später zeigen, dass man den Pascal ohne Kongruenzsätze, allein aus I und II, nicht beweisen kann; dagegen lässt er sich beweisen, wenn man zu I und II die Stetigkeit hinzunimmt (V). – Eine weitere Frage ist, ob man den Pascal beweisen kann mit den ebenen Axiomen I–III, wenn man noch den Desargues hinzunimmt.

Schliesslich bemerken wir, dass Desargues und Pascal die beiden einzigen Schnittpunktsätze sind, die wir jetzt beweisen können; wir werden später hierauf zurückkommen. –

Werfen wir einen kurzen Rückblick auf die bisher betrachteten Axiome.

Die Axiome I. II bildeten im wesentlichen die Grundlage der projektiven Geometrie.

Die auf den Axiomen I–III ruhende Geometrie, vielfach Bolyai-Lobatschewsky'sche genannt, wollen wir als Gaussische Geometrie bezeichnen. Sie bildet einen wesentlichen Teil dessen was man im engeren Sinne Nicht-Euklidische Geometrie nennt. Eine Zusammenstellung der Litteratur über Gaussische Geometrie findet man im 2. Bande der Werke von Lobatschewsky.

Die Axiome I–IV werden uns die Euklidische Geometrie liefern.

Endlich wollen wir die auf den sämtlichen Axiomen I–V aufgebaute Geometrie die analytische Geometrie nennen. –

IV. Das Parallelenaxiom.

Die bisher betrachteten Axiome sind im wesentlichen diejenigen, die den ersten 28 Sätzen des Euklides zugrunde liegen. Euklides erkannte, dass so einfache geometrische Thatsachen wie z. B. die Existenz eines Rechtecks auf Grund dieser Axiome nicht beweisbar sind; er musste also, um weiter zu kommen, ein neues Axiom aufstellen, das berühmte sogen. Parallelenaxiom, dem wir folgende Form geben:

In einer Ebene lässt sich durch einen Punkt ausserhalb einer Graden nur eine einzige Grade ziehen, welche die erste Grade nicht schneidet. Die zweite Grade heisst eine Parallele zur ersten.

Um den Inhalt dieses Axioms ganz scharf hervorzuheben, bemerken wir: Dass es durch einen Punkt einer Ebene zu einer gegebenen Graden wenigstens eine Parallele, d.h. die gegebene Grade nicht schneidende giebt, folgt aus den Axiomen I – III; IV aber behauptet, dass es immer nur eine Parallele giebt.

Welchen Scharfsinn die Aufstellung dieses Axioms erforderte, erkennen wir am besten, wenn wir einen Blick auf die Geschichte des Parallelenaxioms werfen; wir dürfen uns dabei kurz fassen und übrigens auf Engel u. Stäckel, die Theorie der Parallellinien von Euklid bis Gauss verweisen.

Was Euklides (ca 300 v. Chr.) selbst angeht, so sei nur noch bemerkt, dass er z. B. den Satz vom Aussenwinkel vor Einführung des Parallelaxioms beweist, ein Zeichen, wie tief er in den Zusammenhang der geometrischen Sätze eingedrungen war.

Schon im Altertum begannen die Versuche, das Parallelenaxiom auf Grund der übrigen zu beweisen, man wollte z. B. die Parallele als Grade gleichen Abstandes definieren, in dieser Definition steckt aber die Forderung, dass die Punkte, die von einer Graden gleichen Abstand haben, selbst eine Grade bilden, und diese Forderung ist grade das Parallelenaxiom.

Seit dem 17. Jahrhundert finden wir von neuem Beweisversuche[x)], die aber alle erfolglos waren: immer schleicht sich in den Beweis unbemerkt eine Thatsache der Anschauung ein, die dem Parallelaxiom gleichwertig ist. Dennoch sind diese Untersuchungen nicht nutzlos gewesen, denn es wurden dabei auch manche richtige Sätze gefunden, und man erkannte wenigstens, dass das Problem nicht so einfach ist, wie es zuerst scheint.

So sagt der Engländer Henry Savile 1621: es seien duo macula in pulcherimo geometriae corpore vorhanden: die Theorie der Parallelen und die Lehre von den Proportionen, (also genau die Probleme, die wir unter IV und V behandeln werden)

Wallis gab 1693 einen neuen „Beweis" des P. A.

Einen wesentlichen Fortschritt bezeichnet das Buch von Saccheri 1733: Euclides ab omni naevo vindicatus, weiter auch Lambert 1766, Legendre 1794–1833. Dieser Fortschritt besteht

x) sie sind bis heut nicht ausgestorben: 1898 erschien in Paris: La Théorie des Parallèles, démontrée rigoureusement, par M. Frolov.

im wesentlichen darin, dass diese Mathematiker die oben besprochenen sog. Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck bewiesen; andererseits glaubten auch sie, wie alle ihre Vorgänger, das Parallelenaxiom wirklich bewiesen zu haben.

Unter den Mathematikern, die sich mit unserm Problem beschäftigten, nennen wir noch d'Alembert, (der es das Ärgernis und die Klippe der elementaren Geometrie nannte) Fourier, Lagrange.

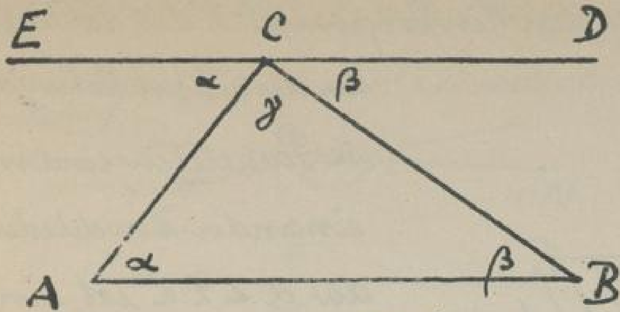
Pfaff hielt das Axiom für unbeweisbar, wollte es aber durch ein einfacheres ersetzen.

Den entscheidenden Schritt that Gauss. Er stellte, wie wir aus seinen Briefen und dem Nachlass (Werke Bd. 8) wissen, eine Geometrie auf, in welcher das Parallelenaxiom nicht gilt. Er selbst veröffentlichte nichts darüber, weil er sich vor dem „Geschrei der Böotier" scheute. Doch erschienen bereits zu Gauss' Lebzeiten die grundlegenden Arbeiten von Bolyai und Lobatschewsky.

Hiermit schliessen wir den historischen Überblick und geben zunächst

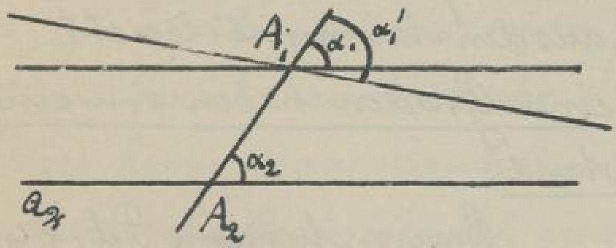
Folgerungen aus dem Parallelenaxiom.

1. Die Summe der Winkel eines Dreiecks ist stets gleich 2 R. (Jeder Aussenwinkel ist gleich der Summe der gegenüberliegenden Innenwinkel.)



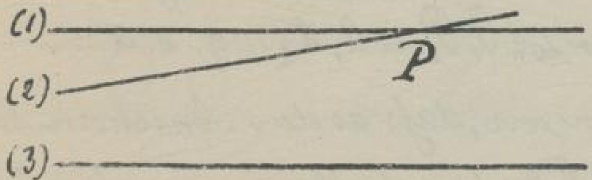
Beweis. Machen wir $\sphericalangle ECA = \alpha$, $\sphericalangle DCB = \beta$, so kann weder CE noch CD AB schneiden. Nach dem P.A. ist dann ECD eine Grade, also $\sphericalangle ECD = \alpha + \beta + \gamma = 2R$.

2. Wenn zwei Parallelen von einer dritten Graden geschnitten werden, so sind die Gegenwinkel gleich.



Beweis. Wäre etwa $\alpha_1 \neq \alpha_2$, so könnte man durch A_1 eine Grade unter dem Winkel $\alpha_1' = \alpha_2$ legen, und bekäme also durch A_1 zwei Parallelen zu a_2, gegen das P.A.

3. Zwei Graden, die einer dritten parallel sind, sind unter sich parallel. Beweis. Wären (1) und (2) nicht parallel,

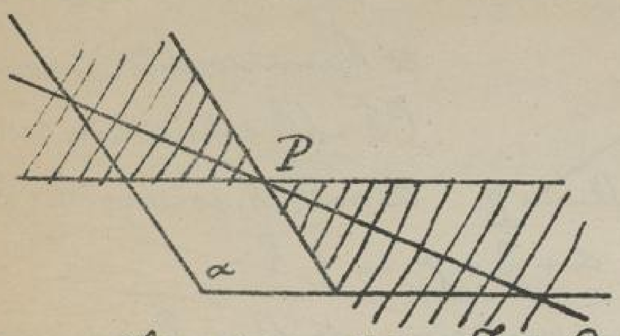


so gäbe es ja durch ihren Schnittpunkt P zwei Parallelen zu (3), was nicht möglich ist.

4. Durch jeden Winkelpunkt eines Winkels, der kleiner als ein gestreckter ist, kann ich stets Graden ziehen, die beide Schenkel [nicht etwa ihre Verlängerungen] schneiden.

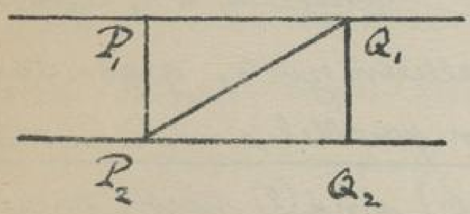
Beweis.

Bewis. Wir ziehen durch den Winkelpunkt P. die Parallelen



zu den Schenkeln; diese Parallelen sind von einander verschieden, da $\alpha < 2R$ ist, und bilden also in P zwei Paare von Scheitelwinkeln. Jede Grade durch P, die innerhalb der schraffierten Winkel verläuft, hat dann die verlangte Eigenschaft, wie sich aus den Axiomen II ergiebt.

5. Sämtliche Punkte einer Graden haben von einer Parallelen gleichen Abstand.

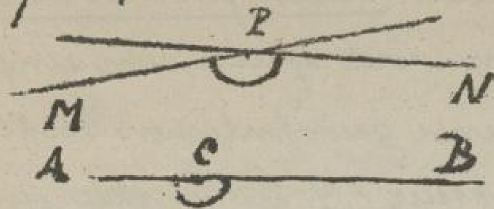


Beweis. Aus dem P.A. folgt zunächst, dass die Figur $P_1 Q_1 Q_2 P_2$ ein Rechteck ist. Dann ergiebt sich sogleich, daſs:

$\Delta P_2 Q_1 P_1 \cong \Delta Q_1 P_2 Q_2$ ist; also ist $P_1 P_2 = Q_1 Q_2$, q. e. d.—

Schlieſslich bemerken wir, daſs es den Anschein hat, als wenn jeder dieser fünf Sätze (eventuell in geeignet veränderter Fassung) gradezu als Ersatz des P.A. dienen könnte. Doch können wir auf diese interessante Frage nicht eingehen.

Unter den vielen angeblichen Beweisen des P.A. wollen wir nur einen ganz kurz besprechen. Angenommen, die von einander verschiedenen Graden PM und PN seien beide parallel zur Graden ACB. Nun ist einerseits $\sphericalangle MPN < \sphericalangle ACB$, andererseits enthält ∢ MPN, als Inbegriff seiner Winkelpunkte aufgefasst, den ∢ ACB vollständig, und hierin liegt ein Widerspruch gegen den Satz: Das ganze ist grösser als ein Teil.



Dieser Beweis ist nun völlig verfehlt, denn:

1.) Es ist unzulässig, allgemeine Grössenbeziehungen wie den obigen Satz ohne weiteres auf geometrische Dinge zu übertragen (wie schon früher betont wurde). Dies erkennt man hier sehr deutlich: mit Hülfe jenes Satzes kann man nämlich auch beweisen, dass bei Parallelen die Gegenwinkel *ungleich* sein müssen (also das grade Gegenteil des Parallelenaxioms!)

2.) Der Satz: „totum parte maius" wird hier auf Systeme von unendlich vielen Dingen angewendet; und das ist sogar schon in der reinen Grössenlehre nicht erlaubt, wie in den Elementen der Mengenlehre gezeigt wird.—

Wir kommen nun zur Hauptaufgabe, nämlich zum

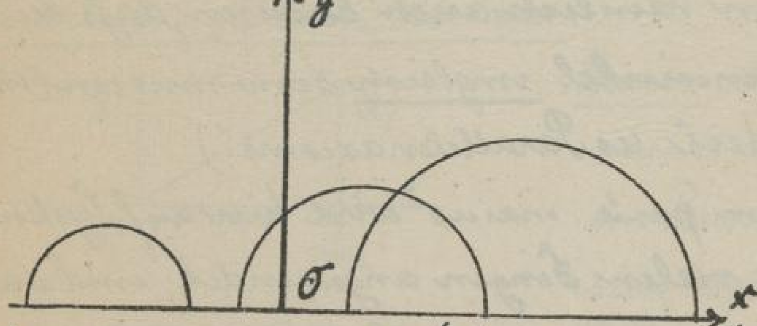
Beweis der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den Axiomen I–III.

Wir stellen uns die Aufgabe, eine „Nichteuklidische Geometrie", d.h. eine Geometrie ohne P.-A. zu konstruieren und zwar in möglichst einfacher Weise.

Zunächst geben wir den Beweis für die Ebene; die Erweiterung auf den Raum wird später sehr einfach sein.

Wir denken uns in einer gewöhnlichen Euklidischen Ebene ein Koordinatenkreuz $x\,y$. Die Punkte unserer Geometrie seien die Punkte der „positiven" Halbebene ($y > 0$), mit Ausschluß der Punkte der x = Achse ($y = 0$).

Als Graden nehmen wir die zur x = Achse orthogonalen Halbkreise. In dieser Geometrie gelten die sämtlichen ebenen Axiome I und II, wie früher schon gelegentlich bemerkt wurde.



Es kommt nur noch darauf an, die Axiome III gültig zu machen durch geeignete Definition der Kongruenzbegriffe (Abtragen von Strecken und Winkeln).

Zu diesem Zwecke brauchen wir einen kurzen Exkurs über lineare Transformationen der Halbebene in sich. Wir wollen die $x\,y$ = Ebene, wie es in der Funktionentheorie gebräuchlich ist, als Ebene der komplexen Variabeln $z = x + i\,y$ auffassen; was im Grunde nur eine, allerdings sehr bedeutende, Vereinfachung im Ausdruck ist.

Betrachten wir jetzt folgende Transformation:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ reell.}$$

Sie definiert ein eindeutiges Entsprechen zwischen z und z', ausser wenn $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ ist; wir wollen daher ein für alle mal $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ annehmen.

Die obige Transformation wollen wir auch durch S, oder durch $\left(z : \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ bezeichnen.

Aus der Realität der $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ folgt, dass bei unserer Transformation die x-Achse in sich übergeht. Denn für reelle z wird eben auch z' reell.

Für die weitere Untersuchung sind nun zwei Formeln sehr nützlich, die wir erst hinschreiben und dann erklären wollen. Sie lauten:

$$1.)\ \left(z : \frac{\alpha z + \beta}{\delta}\right) = \left(z : \frac{\alpha}{\delta} z\right)\left(z : z + \frac{\beta}{\delta}\right).$$

$$2.)\ \left(z : \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = \left(z : z + \frac{\delta}{\gamma}\right)\left(z : \frac{1}{z}\right)\left(z : \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} z\right)\left(z : z + \frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

Rechterhand stehen „Produkte" von Transformationen; sie sind so zu verstehen, daß man die als Faktoren auftretenden Transformationen hintereinander ausführt, indem man von rechts her beginnt.

Die Richtigkeit der Formeln zeigt die Ausrechnung.

Ihr Nutzen besteht in folgendem:

Die Formeln 1) und 2) zeigen uns, daß die allgemeinste reelle lineare Transformation sich zerlegen lässt in Transformationen der einfachen Gestalten: $(z : z+\lambda)$, $(z : \mu z)$, $(z : \frac{1}{z})$, λ, μ reell.

Unsere Aufgabe wird also sein, diese einfachen Transformationen näher zu untersuchen.

Zwei Eigenschaften der linearen Transformationen kommen für uns in Betracht, die wir, obwohl sie sehr bekannt sind, doch der Vollständigkeit halber nun beweisen wollen.

1. Bei der linearen Transformation gehen Kreise in Kreise über; grade Linien gelten dabei als Kreise, die durch den unendlich fernen Punkt der z = Ebene gehen.

Wir beweisen diese Eigenschaft, indem wir zeigen, dass sie für jede der drei einfachen Transformationen gilt, aus denen wir, wie gezeigt ist, die allgemeine Transformation zusammensetzen können. $z' = z + \lambda$ $(x' = x + \lambda, y' = y)$ ist eine Verschiebung der Ebene entlang der x = Achse, $z' = \mu z$ $(x' = \mu x, y' = \mu y)$ ist eine Ähnlichkeitstransformation, d.h. jede Figur wird in eine ihr ähnliche transformiert. Diese beiden Transformationen haben also offenbar die behauptete Eigenschaft. Aber auch $z' = \frac{1}{z}$ $\left(x' = \frac{x}{x^2+y^2}, \; y' = \frac{-y}{x^2+y^2} \right)$ ist eine „Kreisverwandtschaft", wie wir durch direktes Ausrechnen bestätigen. Ist nämlich $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$ die Gleichung eines Kreises, dann ist die Gleichung der transformierten Kurve:

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2} - u\right)^2 + \left(\frac{-y}{x^2+y^2} - v\right)^2 = r^2 \quad \text{oder}$$

$$(u^2+v^2-r^2)(x^2+y^2) - 2ux + 2vy + 1 = 0,$$

d.h. wieder die Gleichung eines Kreises wie zu beweisen war.

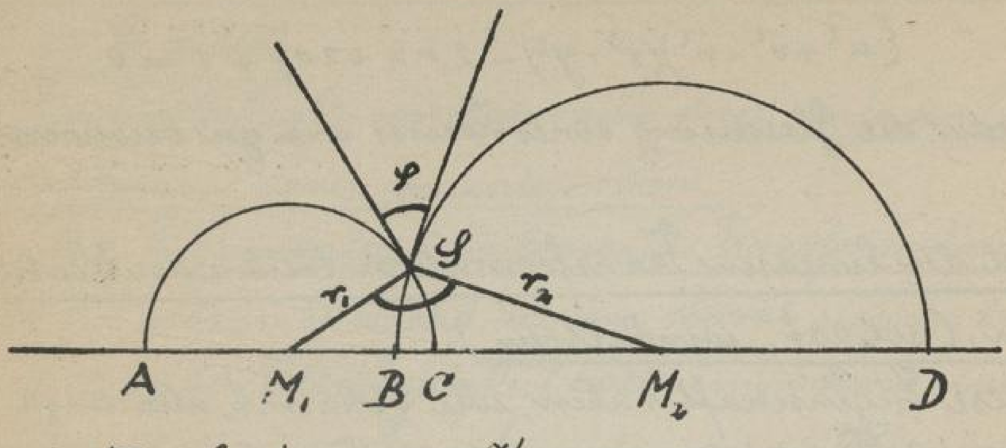
2. Bei der linearen Transformation bleiben die Winkel erhalten, (sie ist „winkeltreu").

Diese Eigenschaft haben, wie bekannt, alle durch analytische Funktionen vermittelte Transformationen.

Wir brauchen sie aber hier nur für lineare Transformationen, und zwar nur für den Winkel zwischen zwei Orthogonal-Kreisen. Auch hier benutzen wir die Zerlegung von pag. 83. Die Transformationen $z' = z + \lambda$ und $z' = \mu z$ sind selbstverständlich winkeltreu; es bleibt nur $z'' = \frac{1}{z}$ zu untersuchen übrig. Diese Transformation ist bis auf eine Spiegelung an der x-Achse mit der Transformation durch reziproke Radien identisch und letztere lässt die Winkel speciell die Winkel zwischen zwei Orthogonalkreisen ungeändert.

Wir beweisen das folgendermassen. Die Figur zweier sich schneidender Orthogonalkreise ist vollständig bestimmt, wenn ihre Schnittpunkte A, B, C, D mit der x-Achse gegeben sind; ihre Abszissen seien a, b, c, d. Nun drücken wir den Winkel φ der beiden Kreise durch a, b, c, d aus

Die Figur zeigt, dass $\cos\varphi = -\cos M_1 S M_2$ ist.



Nun folgt aus dem Kosinussatz

$$\cos M_1 S M_2 = \frac{r_1^2 + r_2^2 - M_1 M_2^2}{2 r_1 r_2}.$$

Hierin setzen wir $r_1 = \frac{c-a}{2}$, $r_2 = \frac{d-b}{2}$, $M_1 M_2 = \frac{d+b-(c+a)}{2}$.
Dann wird $\cos\varphi = \dfrac{2(ac+bd)-(ab+cd)-(ad+bc)}{ab+cd-(ad+bc)}$.

Nun transformieren wir unsere Figur durch reziproke Radien; wir brauchen dazu nur a, b, c, d durch $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ zu ersetzen. Machen wir diese Substitution in dem Ausdruck für $\cos\varphi$, so sehen wir, dass dieser ungeändert bleibt, und das war zu beweisen. –

Aus der ersten Eigenschaft folgt nun, sobald man $v=0$ setzt, dass bei einer lin. Transf. mit reellen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die zur x = Achse orthogonalen Kreise in einander übergehen. Und zwar werden dabei die oberen Halbkreise in obere Halbkreise übergehen, sobald die Transformation die obere Halbebene in sich überführt. Dies ist nun, wie man aus den Zerlegungen auf p. 83 sieht, dann und nur dann der Fall, wenn $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$ ist; wir wollen daher von nun an annehmen, es sei $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$. Dann gilt, wie man durch Ausrechnen findet, die Beziehung: $y' = \frac{y}{|\gamma z + \delta|^2}$, wo $|\gamma z + \delta|$ den absoluten Wert von $\gamma z + \delta$ bezeichnet.

Die bisher gewonnenen Resultate fassen wir nun so zusammen: Bei einer linearen Transformation $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reell, $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$) gehen die Punkte unserer Nichteuklidischen Geometrie in Punkte über, die Graden in Gräden, und der Winkel zwischen zwei Graden ändert sich nicht.

Um nun die Kongruenz zu definieren, haben wir nur noch den Begriff der Länge nötig. Wir wollen unter der nichteuklidischen Länge eines die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ verbindenden Kurvenstückes das Integral verstehen: $\int_{x_1 y_1}^{x_2 y_2} \frac{|dz|}{y}$ hinerstreckt an der Kurve. Das Integral hat einen Sinn, da y niemals null wird. Es lautet, ausführlicher geschrieben:

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,\frac{dt}{y},$$

$$\text{wenn } x = x(t),\ y = y(t)$$

die Integrationskurve darstellen.

Wählen wir als Integrationskurve die durch $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ hindurchlaufende nichteuklidische Grade, so nennen wir das obige Integral die nichteuklidische Entfernung der beiden Punkte.

Wir beweisen nun eine Reihe von Sätzen, die obiges Integral betreffen. Vor allem gilt:

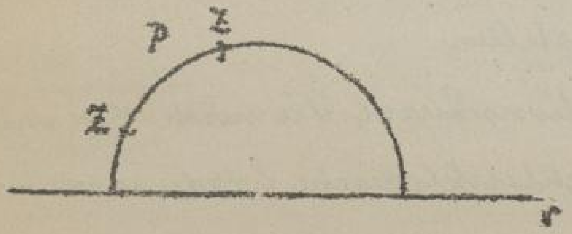
Die nichteuklidische Länge eines Kurvenstückes bleibt bei linearer Transformation ungeändert. (Dasselbe gilt von dem Integral $J = \iint \frac{dx\,dy}{y^2}$, dem „nichteuklidischen Flächeninhalt".)

Es ist nämlich $\frac{dz'}{dz} = \frac{1}{(\gamma z+\delta)^2}$, also $|dz'| = \frac{|dz|}{|\gamma z+\delta|^2}$

und $y' = \frac{y}{|\gamma z+\delta|^2}$, also $\frac{|dz'|}{y'} = \frac{|dz|}{y}$, wie zu beweisen war.

Weiter gilt: Die nichteuklidische Entfernung eines Punktes von sich selbst ist null; denn es fallen dann obere und untere Grenze des Integrals zusammen.

Ist P ein fester Punkt, und lässt man den Punkt Z auf einem durch P gehenden Orthogonalhalbkreis nach der einen oder andern Seite von P weg bis zur x = Achse laufen, so wächst die nichteuklidische Entfernung PZ beständig, und zwar über alle Grenzen.



Dass PZ beständig wächst, folgt daraus, daß der Integrand $\frac{|dz|}{y}$ stets positiv ist. Aber PZ wächst auch über alle Grenzen, denn es ist:

$$PZ = \int_P^Z \frac{|dz|}{y} = \int_P^Z \frac{\left|\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right|}{y}|dx| > \int_P^Z \frac{|dy|}{y}.$$

Nun ist von einem gewissen Punkt an stets $|dy| = -dy$, folglich ist $PZ > \log\frac{1}{y} - \text{const.}$, wo y die Ordinate im Punkte Z ist. Da nun $\log\frac{1}{y}$ für hinreichend kleine y beliebig gross wird, so ist unser Satz bewiesen.

Nun sind wir imstande, die Kongruenz von Strecken und Winkeln zu definieren:

Zwei Winkel unserer Geometrie sollen kongruent heissen, wenn sie im Euklidischen Sinne gleich sind.

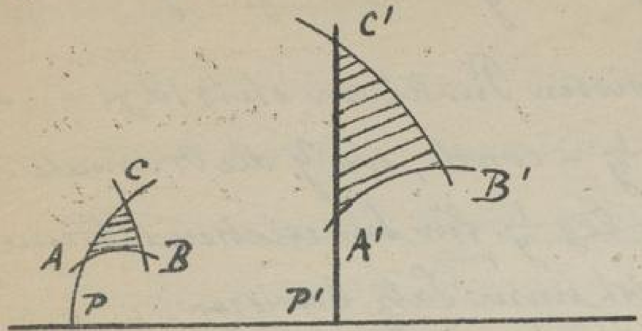
Zwei Strecken Z_1Z_2 und $Z_1'Z_2'$ sollen kongruent heissen, sobald die Nichteuklidischen Entfernungen Z_1Z_2 und $Z_1'Z_2'$ gleich sind.

Damit haben wir erreicht, daß in unserer Geometrie die ersten neun Axiome der III. Gruppe gelten.

Wir wollen nun beweisen, dass auf Grund unserer Festsetzungen auch das 10. Axiom, nämlich der erste Kongruenzsatz gilt: Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Der Einfachheit halber wählen wir zunächst das eine Dreieck $A'B'C'$ so, daß eine Seite, etwa $A'C'$ auch im Euklidischen Sinne grade ist.

Sei nun $AC = A'C'$, $AB = A'B'$, $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ (alle Gleichheiten nichteuklidisch aufgefasst) dann ist zu zeigen, dass $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$, $BC = B'C'$ ist.



Die Grade AC, über A hinaus verlängert, treffe die x=Achse in P; $A'C'$, über A' hinaus verlängert, treffe die x=Achse in P'.

Den Punkten A, A', P, P' mögen die Zahlen $c = a + ib$, $c' = a' + ib'$, e, e' entsprechen.

Wir beweisen nun, dass es <u>eine lineare Transformation der Halbebene in sich giebt, die P in P', A in A' überführt.</u> Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die (reellen) Koeffizienten dieser Transformation, so müssen die Gleichungen gelten:

$$c'(\gamma c + \delta) = \alpha c + \beta$$
$$e'(\gamma e + \delta) = \alpha e + \beta.$$

Das sind thatsächlich drei von einander unabhängige lineare homogene Gleichungen für die 4 Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Demnach lassen sich $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (bis auf einen konstanten Faktor) hieraus bestimmen, derart, dass diese Grössen nicht sämtlich null sind.

Nun kann weder $\gamma c + \delta$ noch $\gamma e + \delta$ null sein. Denn aus $\gamma c + \delta = 0$ folgt, wenn $\gamma \neq 0$ ist: $c = -\frac{\delta}{\gamma}$, was unmöglich ist, denn c ist nicht reell; ist aber $\gamma = 0$, so folgt $\delta = 0$, also auch $\alpha c + \beta = 0$, also entweder $c = -\frac{\beta}{\alpha}$, was nicht möglich ist, oder $\alpha = \beta = 0$, was auch nicht möglich ist. – Aus $\gamma e + \delta = 0$ folgte:

$\alpha e+\beta = 0$, also $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$. Dann wäre aber

$$\frac{\alpha c+\beta}{\gamma c+\delta} = \frac{(\alpha c+\beta)(\gamma \bar{c}+\delta)}{|\gamma c+\delta|^2}$$ was unmöglich

ist, da $\frac{\alpha c+\beta}{\gamma c+\delta} = c'$ komplex ist.

Also ist $\gamma c+\delta \neq 0$, $\gamma e+\delta \neq 0$, dh. wir dürfen schreiben: $c' = \frac{\alpha c+\beta}{\gamma c+\delta}$, $e' = \frac{\alpha e+\beta}{\gamma e+\delta}$, womit die Existenz der verlangten Substitution bewiesen ist:

$$S = \left(z : \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right),\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \text{ reell.}$$

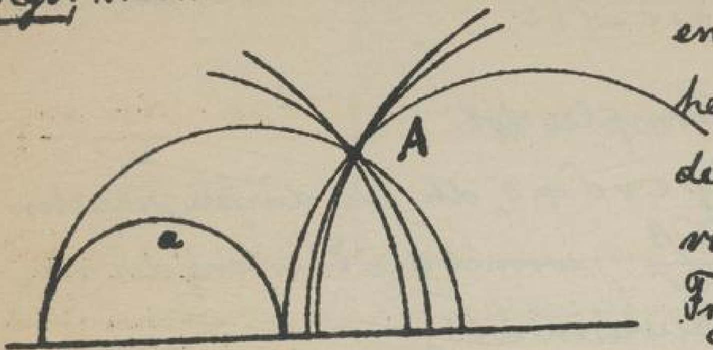
Thatsächlich ist $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$, da C und C' beide in derselben (oberen) Halbebene liegen, und wir können, indem wir Zähler und Nenner durch $\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}$ dividieren, es erreichen, daß $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$ wird.

Die Eigenschaften der linearen Transformation und das Verhalten der nichteuklidischen Entfernung lassen nun ohne weiteres erkennen, dass bei unserer Transformation S das ΔABC genau in das $\Delta A'B'C'$ übergeht, woraus dann die Kongruenz beider Dreiecke folgt.

Endlich können wir uns von der Annahme, daß $A'C'$ eine wirkliche Grade im gewöhnlichen Sinne sei, frei machen. Sind nämlich zwei beliebige Dreiecke I, II vorgelegt, so haben wir nur ein drittes III mit einer euklidisch graden Seite dazu zu nehmen, so dass $I \cong III$, $II \cong III$ ist; dann folgt: $I \cong II$.

Demnach haben wir das <u>Schlussresultat</u>: <u>In der von uns konstruierten Geometrie gelten sämtliche Axiome der Gruppen I–III.</u>

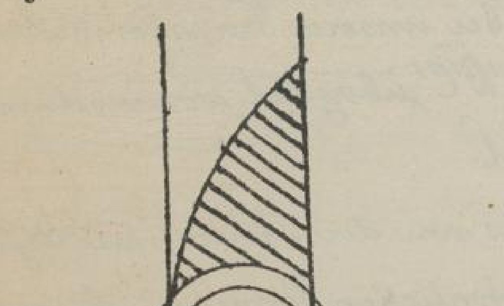
Das Parallelenaxiom gilt aber in dieser Geometrie keines-wegs; vielmehr lassen sich durch einen Punkt A stets unendlich viele Graden ziehen, die eine gegebene Grade a nicht schneiden, wovon uns der Anblick der Figur überzeugt.



Damit ist der Beweis der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den ebenen Axiomen I–III geführt.

Wir wollen jetzt zeigen, dass in der oben definierten Geometrie die sämtlichen 5 Folgerungen, die wir seiner Zeit aus dem Parallelenaxiom ableiteten, ungültig sind, dass also diese 5 Sätze nicht schon aus den Axiomen I – III folgen.

1. Es giebt Dreiecke, deren Winkelsumme kleiner ist als jede vorgegebene Grösse. [cf das schraffierte Dreieck in der Figur.] Die genauere Untersuchung liefert für die Winkelsumme eines Dreiecks:



$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - \frac{J}{4}.$$

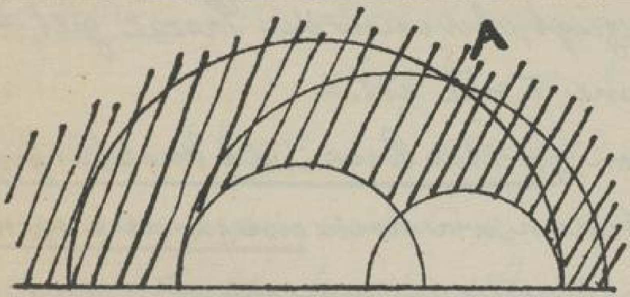
Hier ist J, der nichteuklidische Inhalt [cf. p.] stets positiv, sodass wir sogar sagen dürfen: Es giebt in unserer Geometrie kein Dreieck, dessen Winkelsumme w zwei Rechte beträgt, stets ist $w < \pi$.

2. Gegenwinkel bei Parallelen sind durchaus nicht stets gleich, wie die Figur der vorigen Seite erkennen lässt.

Und ebenso zeigt sie:

3. Zwei Grade können einer dritten parallel sein, ohne untereinander parallel zu sein.

4. Man kann in jedem Winkel, der kleiner ist als ein gestreckter, Punkte A angeben derart, dass keine durch A gehende Grade beide Schenkel des Winkels schneidet. In der Figur ist der



Winkelraum schraffiert, A ist offenbar ein Punkt von der gewünschten Beschaffenheit; eine durch A gehende Grade schneidet entweder keinen oder einen Schenkel des Winkels, aber niemals beide.

5. Es giebt in unserer Geometrie kein Rechteck, weil es keine Dreiecke mit der Winkelsumme 2 R giebt.

Es ist jetzt sehr leicht, auch eine räumliche Geometrie ohne das IV. Axiom zu konstruieren. Wir nehmen als Punkte alle Punkte eines Euklidischen Halbraums, der von der xy = Ebene begrenzt sein mag, die Punkte dieser Grenzebene selbst ausgenommen. Die Nichteuklidischen Ebenen seien die zur xy = Ebene orthogonalen Halbkugeln, die Graden seien die orthogonalen Halbkreise. Dann gelten zunächst alle Axiome I, II. Um auch die Axiome III, die sich ja nur auf die Ebene beziehen, gültig zu machen, haben wir nur die Kongruenz geeignet zu definieren. Als Winkel nehmen wir die euklidischen Winkel, als nichteuklidische Länge bezeichnen wir das Integral $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \cdot \frac{dt}{z}$.

Dann gelten auch alle Axiome III; IV gilt natürlich nicht.

Und damit ist die Unabhängigkeit des Axioms IV von sämtlichen Axiomen I–III vollständig bewiesen.

Dass in unserer Geometrie der Satz von Desargues gilt, haben wir schon früher gezeigt, aber auch der Pascal gilt, da er ja eine Folge der Axiome I–III ist. –

Wir geben noch einen zweiten Beweis der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms, indem wir noch eine andere nichteuklidische Geometrie angeben, die in mancher Hinsicht einfacher ist als die oben besprochene.

Wir betrachten in der xy-Ebene den Kreis $x^2+y^2-1=0$. Die Punkte im inneren dieses Kreises sollen die Punkte unserer Nichteuklidischen Geometrie sein, dagegen sollen die Punkte des Kreises selbst nicht dazu gehören. Die Graden der N.E. Geometrie sollen die gewöhnlichen Euklidischen Graden sein, aber nur soweit sie im innern des Kreises $x^2+y^2-1=0$ verlaufen. In der so definierten Geometrie gelten die Axiome I und II.

Um die Kongruenz zu definieren, betrachten wir diejenigen Kollineationen der Ebene, bei welchen unser Einheitskreis in sich übergeht. Eine beliebige Kollineation der Ebene ist gegeben durch die Gleichungen:

$$x' = \frac{a'x+b'y+c'}{ax+by+c}, \quad y' = \frac{a''x+b''y+c''}{ax+by+c},$$

wo die $a, \dots c''$ reelle Konstanten sind. Die Gesamtheit dieser Operationen bildet eine (9 = parametrige) Gruppe d.h. wenn man zwei Kollineationen zusammensetzt, so entsteht wieder eine Kollimation.

In dieser Gruppe ist als Untergruppe enthalten die Gesamtheit derjenigen Kollineationen, die den Einheitskreis in sich überführen. Eine solche K. muss so beschaffen sein, daß identisch gibt:

$$x'^2+y'^2-1 = x^2+y^2-1$$

(Genauer: $x'^2+y'^2-1 = \text{const}(x^2+y^2-1)$; doch darf const. $= 1$ genommen werden, weil die $a, \dots c''$ nur bis auf einen Faktor bestimmt sind.) Aus dieser Bedingung ergeben sich 6 Relationen für die 9 Koeffizienten:

$$a'^2+a''^2-a^2 = 1 \qquad a'b'+a''b''-ab = 0$$
$$b'^2+b''^2-b^2 = 1 \qquad b'c'+b''c''-bc = 0$$
$$c'^2+c''^2-c^2 = -1 \qquad c'a'+c''a''-ca = 0. -$$

Diese Kollineationen sind vor allen Dingen umkehrbar, denn ihre Determinante ist $= \pm 1$; es ist nämlich:

$$\begin{vmatrix} a' & a'' & a \\ b' & b'' & b \\ c' & c'' & c \end{vmatrix}^2 = -\begin{vmatrix} a' & a'' & -a \\ b' & b'' & -b \\ c' & c'' & -c \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a' & a'' & a \\ b' & b'' & b \\ c' & c'' & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Der Mittelpunkt M des Einheitskreises geht stets in einen ganz bestimmten Punkt im innern des Kreises über. Denn für

$x=0$, $y=0$ wird $x'=\frac{c'}{c}$, $y'=\frac{c''}{c}$, und es ist $x'^2+y'^2=\frac{c'^2+c''^2}{c^2}=1-\frac{1}{c^2}<1$.–

Umgekehrt kann man stets Kollineationen, bei denen der Einheitskreis in sich übergeht, so angeben, daß ein gegebener Punkt im innern des Kreises in den Mittelpunkt übergeht, wie man leicht sieht.

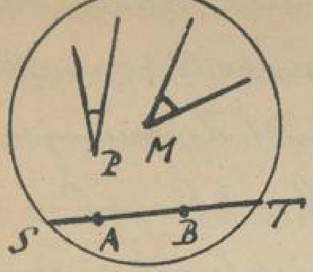
Endlich gilt der Satz: Jede Kollineation, die den Einheitskreis in sich überführt und zugleich den Mittelpunkt fest lässt, ist eine Drehung der Ebene um M.

In diesem Fall ist nämlich $\frac{c'}{c}=0$, $\frac{c''}{c}=0$, folglich $c'=0$, $c''=0$. Dann ergiebt sich mit Hülfe der 6 Koeffizientenrelationen: $c=\pm 1$, $a=0$, $b=0$, sodass die genannten Kollineationen die Form annehmen:

$$\begin{matrix} x'=a'x+b'y \\ y'=a''x+b''y \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} a'^2+a''^2=1 \\ b'^2+b''^2=1 \end{matrix} \quad a'b'+a''b''=0 \right)$$

und das sind genau die Formeln für die Drehung.–

Nun definieren wir zunächst den Winkel zwischen zwei Graden, die sich in einem Punkte P schneiden, und zwar folgendermassen: Wir suchen eine unserer Kollineationen, die P in M transformiert. Dabei gehen die Graden durch P in zwei Durchmesser des Kreises über. Diese Collineation ist, wie wir oben bewiesen haben, bestimmt bis auf eine Drehung um M. Daraus folgt aber, daß der Winkel zwischen den

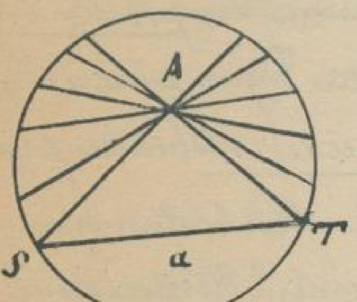


beiden Durchmessern völlig bestimmt ist, wenn P und die durch P gehenden beiden Graden gegeben sind. Diesen Winkel zwischen den beiden Durchmessern will ich als nichteuklidischen Winkel der beiden Graden bei P bezeichnen. – Um die Länge einer Strecke AB zu definieren, verfahre ich so: Ich verlängere AB nach beiden Seiten bis zum Schnitt mit dem Einheitskreis in S und T. Unter den 6 Werten, welche das Doppelverhältnis der 4 Punkte A, B, S, T besitzt, wähle ich denjenigen aus, der positiv und >1 ist, und bezeichne ihn mit δ. (In der Figur wäre $\delta = \frac{AS}{AT} : \frac{BS}{BT}$.) Dann nenne ich $\log \delta$ die Länge der Strecke AB (siehe folgende Seite). Näher können wir hier auf diese Massbestimmung (Cayley) nicht eingehen, wir begnügen uns mit einem Hinweis auf: Cayley, Mathematical papers, II, p. 561 ff. Klein, Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie I. p. 65 ff. Fricke-Klein, Automorphe Funktionen, I, p. 6.7. – Auf Grund der Definitionen von Winkel und Strecke gelten nun die Axiome III, 1–9. Wieder ist die Aufgabe, das 10. Axiom, den ersten Kongruenzsatz, zu beweisen.

Wir setzen voraus, es sei $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$.

Nun transformieren wir so, dass einmal A, dann A' nach M fällt, und erhalten so die beiden Dreiecke MB_1C_1 und $MB_1'C_1'$. Diese beiden Dreiecke sind, wie man sofort sieht, auch im gewöhnlichen euklidischen Sinne kongruent, also ist, wenn wir den 1. Kongruenzsatz aus der Euklid. G. anwenden $B_1C_1 = B_1'C_1'$, $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_1'$, $\sphericalangle C_1 = \sphericalangle C_2'$; Diese Gleichheiten gelten aber auch im nichteuklidischen Sinne, und hieraus folgt, wenn man die Invarianz der Winkel und Strecken bei unseren Kollineationen berücksichtigt, dass $BC = B'C'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle C = \sphericalangle C'$ ist. – q. e. d.

Wir haben nunmehr eine ebene Geometrie mit allen Axiomen I–III. Dass das Parallelenaxiom nicht gilt, lehrt ein

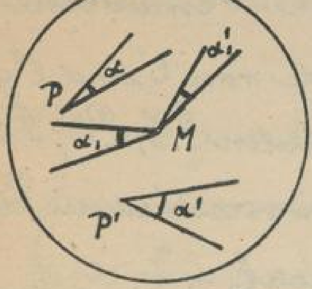


Blick auf die Figur: Durch jeden Punkt A giebt es ein ganzes Büschel von Strahlen, die eine gegebene Grade a nicht schneiden. Sämtliche Strahlen des Büschels liegen zwischen zwei bestimmten Strahlen AS und AT, den „Grenzstrahlen", die ebenfalls a nicht schneiden, denn die Punkte S und T gehören unserer Geometrie nicht an.

Auch diese Geometrie kann leicht auf den Raum ausgedehnt werden; man wird dann diejenigen Kollineationen des Raumes betrachten, welche die Kugel $x^2+y^2+z^2-1=0$ in sich überführen. –

Wir wollen nachträglich (siehe vorige Seite) ausdrücklich bemerken: <u>Bei unseren Kollineationen bleiben Strecken und</u>

Winkel erhalten. Das erstere ergiebt sich aus den bekannten Eigenschaften des Doppelverhältnisses; das zweite erkennt man folgendermassen. Es möge $\sphericalangle \alpha$ bei P durch die Kollineation S in den $\sphericalangle \alpha'$ bei P' übergehen. Nun können wir zwei Kollineationen T und T' finden, welche P bezw. P' in M, α in α_1, α' in α_1' transformieren.



Bezeichnen wir die noch unbekannte Operation, bei der α_1 in α_1' übergeht, mit U, so gilt die Gleichung $T'^{-1} U T = S$, (das Produkt ist von rechts nach links zu lesen) aus der folgt:

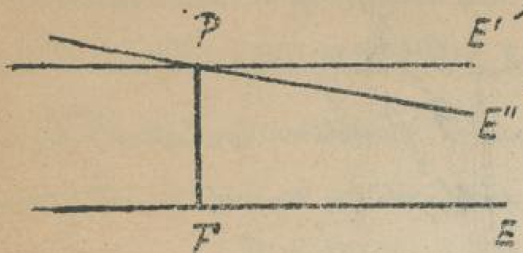
$$U = T' S T^{-1}.$$

Hieraus folgt, dass U eine Kollineation ist, die den Einheitskreis in sich überführt; andererseits wissen wir, dass U den Punkt M fest lässt. Demnach ist U eine einfache Drehung um M, also ist, im euklidischen und im nichteuklidischen Sinne $\sphericalangle \alpha_1 = \sphericalangle \alpha_1'$. Vermöge der Definition des nichteuklidischen Winkels gelten im nichteuklidischen Sinne die Gleichungen: $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha_1$, $\sphericalangle \alpha' = \sphericalangle \alpha_1'$, also folgt endlich $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$, wie zu beweisen war. —

Wir ergänzen nun das Parallelenaxiom durch folgenden Satz: Durch einen beliebigen Punkt P ausserhalb einer Ebene E lässt sich nur eine Ebene E' legen, welche die erste Ebene nicht schneidet. E' heisst eine Parallelebene zu E.

Beweis. Ich fälle von P auf E das Lot PF, und lege durch P

eine zu PF senkrechte Ebene ε'. Dann folgt aus den Kongruenzsätzen, dass ε' und ε sich nicht schneiden. Nehmen wir nun an, es gebe eine von ε' verschiedene Ebene ε'' durch P, die ε nicht schneidet. Dann legen wir durch PF eine Ebene ξ, die



nicht grade durch die Schnittgrade von ε' und ε'' geht. ξ schneide die Ebenen ε, ε', ε'' in den Graden FE, PE', PE''. Dann hätten wir in der Ebene ξ durch P zwei verschiedene Parallelen zu FE, was dem Axiom IV widerspricht. –

Nachdem wir das Parallelenaxiom eingeführt und seine Unabhängigkeit von den vorhergehenden Axiomen bewiesen haben, sind zwei Fragen zu erledigen:

1. <u>Können früher bewiesene Sätze vielleicht auch bewiesen werden, wenn man das Parallelenaxiom zu Hülfe nimmt, dafür aber einige der Axiome I – III fortlässt?</u> Lässt sich beispielsweise der Satz von Desargues beweisen aus dem Parallelenaxiom und den ebenen Axiomen I – III?

2. <u>Wieweit können wir die Geometrie mit Hülfe des Parallelenaxioms aufbauen, ehe wir ein neues Axiom nötig haben?</u> Es wird sich zeigen, dass wir die ganze „<u>Schulgeometrie</u>" (Pythagoras, Sätze über Flächengleichheit etc.) allein mit unsern Axiomen I – IV aufbauen können, und das ist ein neues Resultat.

Zur Einleitung bemerken wir, dass wir jetzt mit Hülfe des Axioms IV imstande sind, die Axiome I zu erweitern und ihnen gewisse andere Sätze dualistisch gegenüber zu stellen. Das wesentliche hierbei ist, dass wir ideale Punkte, Graden, Ebenen einführen. (analog verfährt man in der Mathematik häufig, z.B. wenn man in der höheren Zahlentheorie neben den „wirklichen" auch ideale Zahlen einführt.)

Bleiben wir zunächst in der *Ebene*. Den Begriff „idealer Punkt" führen wir durch folgende Festsetzung ein: *Statt zu sagen, zwei Graden a und b sind parallel wollen wir sagen sie schneiden sich in einem idealen Punkt.* Demgegenüber nennen wir die bisher allein betrachteten Punkte *wirkliche Punkte*. Eine solche Erweiterung des Begriffes „Punkt" ist nun aber nur dann zweckmässig, wenn die idealen Punkte wenigstens einige Eigenschaften mit den wirklichen Punkten gemeinsam haben. *Wir werden also zunächst die Axiome der I. Gruppe daraufhin untersuchen, ob sie auch für ideale Punkte gültig bleiben.* Wir wollen diese Untersuchung für die Ebene ausführlich anstellen, um uns später beim Raume kürzer zu fassen. Das Axiom I, 1 besagt, dass irgend zwei Punkte stets eine Grade bestimmen. Sei nun einer der beiden Punkte ideal; dann verlangt das Axiom, dass durch zwei parallele Grade a, b und einen wirklichen Punkt P eine Grade g bestimmt werde.

Diese Grade darf offenbar weder a noch b in einem wirklichen Punkte A, B schneiden, denn sonst hätten die Graden g und a, ohne zusammenzufallen, sowohl A als auch den durch a, b bestimmten idealen Punkt gemein, und das ist im Widerspruch mit Axiom I, 2, nach welchem zwei Grade höchstens einen Punkt gemein haben können; und auch dies Axiom soll für ideale Punkte gelten.

Nach dem Parallelenaxiom giebt es aber nur eine Grade durch P, die weder a noch b schneidet, nämlich die zu a und b durch P gezogene Parallele p. Diese Parallele aber ist bereits durch die Grade a allein und den Punkt P bestimmt. Das führt nun zu folgendem Satze: Jeder Graden ist ein einziger idealer Punkt zuzuschreiben; alle unter einander parallelen Graden laufen durch ein und denselben idealen Punkt. Jeder ideale Punkt der Ebene ist also gewissermassen repräsentiert durch eine bestimmte Richtung. Wenn wir diese Festsetzungen gemacht haben, so gelten die Axiome I, 1 und I, 2, falls einer der beiden Punkte ideal ist. Und sie werden auch für zwei ideale Punkte gelten, wenn wir noch festsetzen: Die Gesamtheit aller idealen Punkte einer Ebene wollen wir die ideale Grade der Ebene nennen. So haben wir das Resultat:

A. Irgend zwei Punkte bestimmen stets eine und nur eine Grade.

Damit haben wir die Axiome I, 1.2 auf ideale Punkte erweitert. Der Nutzen der idealen Punkte tritt aber erst hervor, wenn wir diesem Satze folgenden zur Seite stellen:

B. Irgend zwei Graden einer Ebene bestimmen stets einen und nur einen Punkt, nämlich ihren Schnittpunkt.

Dieser Satz gilt offenbar nur dann, wenn wir ideale Punkte zulassen. Dass er wirklich gilt, folgt aus den Festsetzungen über ideale Punkte. Die beiden Sätze A und B unterscheiden sich nur dadurch, daß die Worte „Punkt" und „Grade" in ihnen vertauscht sind; wir sagen: Die beiden Sätze A, B entsprechen sich (in der Ebene) in dualistischer Weise. Jedem Satz, der aus A und B gefolgert ist, entspricht also ein anderer, der ihm dualistisch gegenübersteht. –

Nun wollen wir analoge Überlegungen für den Raum anstellen; dann gelangen wir zu folgenden Resultaten: Jede Grade im Raum hat einen einzigen idealen Punkt; parallele Grade laufen durch denselben idealen Punkt. Jede Ebene besitzt eine einzige ideale Grade; parallele Ebenen haben dieselbe ideale Grade. Die Gesamtheit aller idealen Punkte (oder Graden) nennen wir die ideale Ebene des Raumes. – Alle Axiome der Gruppe I gelten dann auch für ideale Elemente, wir erhalten auch im Raume eine Dualität derart, dass jedes Axiom und jeder aus ihnen folgende Satz richtig bleibt, wenn man die Worte „Punkt" und „Ebene" vertauscht, während die Grade sich selbst dualistisch entspricht. Beispielsweise wollen wir einige solche Sätze mit ihren dualen Gegenstücken anführen.

1.) Zwei Punkte bestimmen stets eine einzige Grade.	1.) Zwei Ebenen schneiden sich stets in einer einzigen Graden.
2.) Drei nicht auf einer Graden liegenden Punkte bestimmen stets eine einzige Ebene.	2.) Drei Ebenen, die nicht durch eine Grade gehen, schneiden sich in einem einzigen Punkt.
3.) Durch eine Grade und einen nicht auf ihr liegenden Punkt ist eine einzige Ebene bestimmt.	3.) Eine Grade und eine nicht durch sie hindurchgehende Ebene schneiden sich in einem einzigen Punkt.
4.) Zwei durch einen Punkt gehende Graden bestimmen eine einzige Ebene.	4.) Zwei in einer Ebene liegende Grade schneiden sich in einem einzigen Punkt.

Links stehen Axiome bezw. Sätze, die wir von früher her kennen, die rechts stehenden dualistischentsprechenden Sätze auszusprechen, erlaubt uns erst das Parallelenaxiom. Wir erkennen, welche wichtige Rolle dies Axiom für den symmetrischen Aufbau der Geometrie spielt.

Noch einige Bemerkungen zum Begriff der idealen Elemente. Man findet häufig die Namen: „unendlich ferner Punkt" etc. Dieser Name erscheint uns aber wenig passend, weil er störende Nebenvorstellungen erweckt. – Auch in der Gaussischen Geometrie kann man die idealen Punkte einführen, doch gestalten sich dann die Verhältnisse erheblich komplicierter, wie man allein daraus ersehen kann, dass dort jeder Graden unendlich viele ideale Punkte zukommen.–

Endlich weisen wir darauf hin, daß nun nicht etwa auch die Axiome II oder gar III. für ideale Elemente gelten, wie übrigens leicht erkannt wird.–

Wenden wir uns nun zu erneuter Betrachtung der Schnittpunktssätze. Wir behaupten:

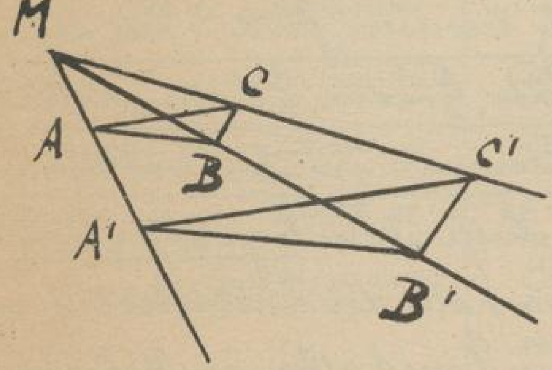
Ist ein Schnittpunktsatz bewiesen, für den Fall dass alle in ihm vorkommenden Punkte, Graden, Ebenen wirklich sind, so gilt er auch, wenn ideale Elemente in ihm vorkommen.

Der Beweis wird mit Hülfe einer Projektion im Raume geführt. Wir nehmen außerhalb der Zeichenebene einen Punkt P an und verbinden P mit allen in Betracht kommenden (wirklichen und idealen) Punkten der Figur in der Zeichenebene. Wir erhalten so eine endliche Anzahl von Graden durch P. Nun können wir, wie leicht zu zeigen, eine zweite Ebene so annehmen, dass sie von sämtlichen durch P laufenden Strahlen in wirklichen Punkten geschnitten wird. Hierdurch wird die Figur der Zeichenebene in der Weise projiziert, daß das Schneiden von Graden erhalten bleibt. Nach Voraussetzung gilt der betreffende Schnittpunktsatz in der zweiten Ebene, also gilt er auch in der

Zeichenebene.-

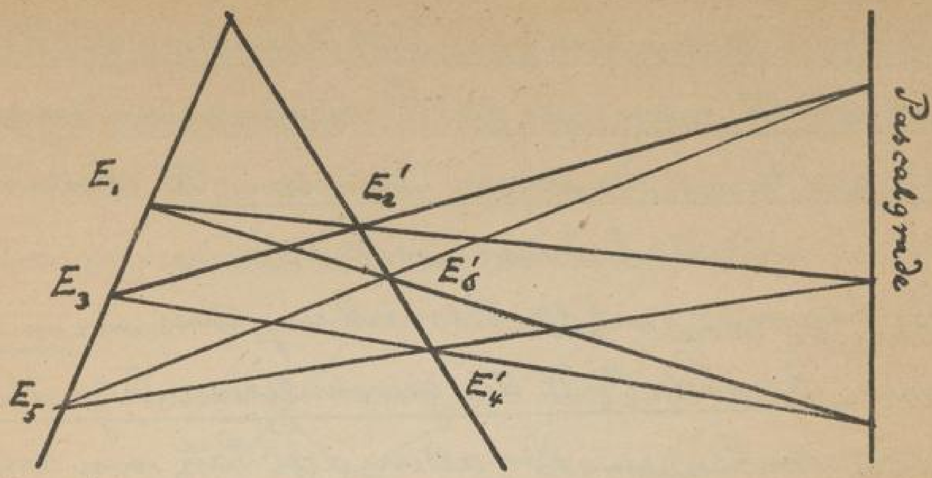
Wir wollen nun, indem wir den eben bewiesenen Satz anwenden, die beiden früher besprochenen Schnittpunktsätze, den von Desargues und den von Pascal, durch Einführung idealer Elemente specialisieren, wodurch wir zu Sätzen gelangen, die weiterhin von grosser Bedeutung sind.

Beim Satz von Desargues wollen wir annehmen, dass

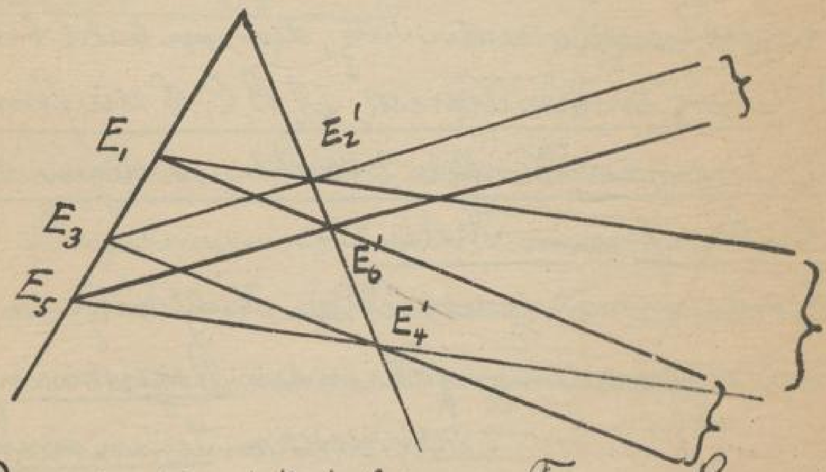


die Grade, auf welcher die drei Schnittpunkte entsprechender Seiten liegen, zur idealen Graden wird, während der Schnittpunkt der Verbindungslinien entsprechender Ecken wirklich bleiben soll. Dann können wir den <u>Satz von Desargues</u> so fassen: <u>Wenn sich die drei Graden AA', BB', CC' in einem Punkte M schneiden, und wenn $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$ ist, so ist auch $AC \parallel A'C'$.</u>

Ebenso wollen wir beim Pascalsatz die sogenannte Pascalgrade zur idealen Graden machen. Dabei geht die folgende Figur:



über in diese:



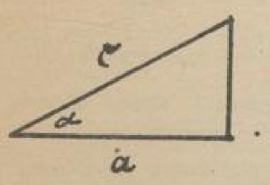
und der Pascalsatz erhält folgende Form: Liegen die sechs Punkte E_1, E_2', E_3, E_4', E_5, E_6' abwechselnd auf zwei sich in einem (wirklichen) Punkte schneidenden Graden, und ist $E_1 E_2' \parallel E_4' E_5$, $E_2' E_3 \parallel E_5 E_6'$, so ist auch $E_3 E_4' \parallel E_6' E_1$.

Die fundamentale Bedeutung dieses Satzes wird sich bald herausstellen.–

Wir beantworten jetzt die erste der pag. 100 aufgeworfenen Fragen, indem wir den Satz beweisen: Die Sätze von Pascal und Desargues lassen sich ohne Zuhilfenahme des Raumes beweisen, sobald man nur das Parallelenaxiom hinzunimmt, d.h. also, auf Grund der ebenen Axiome I–IV. Dieser Satz ist bisher noch niemals bewiesen worden.

Wir beginnen mit der Bemerkung, dass wir mit Hülfe der ebenen Axiome I–IV die gewöhnlichen Sätze über den Kreis beweisen können, vor allen den Satz von den Peripheriewinkeln über gleichen Bögen, sowie den Satz vom Sehnenwinkel; [die ohne das Axiom IV nicht galten.] hieraus ergiebt sich u.a. der Satz, den wir bald brauchen werden: Ist in einem Viereck A, B, C, D die Summe zweier gegenüberliegender Winkel 2 Rechte, so liegen die vier Punkte A, B, C, D auf einem Kreise.–

Wir beweisen nun zuerst einen Hülfssatz, den wir mit Hülfe einer sogleich einzuführenden Bezeichnung formulieren wollen.



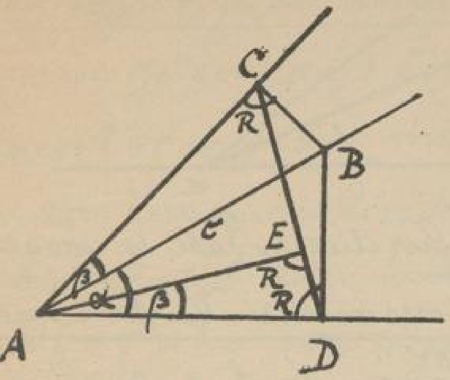
Sei in einem rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse c, eine Kathete a, der Winkel zwischen a und c sei α, dann wollen wir schreiben: $a = \alpha c$. In der That ist a durch α und c vollständig bestimmt.

Unser Hülfssatz lautet dann einfach:

Es ist stets: $\alpha\beta c = \beta\alpha c$.

Zum Beweise machen wir $AB = c$ und tragen in A

an AB zu beiden Seiten die Winkel α und β ab. Dann fällen wir von B auf die freien Schenkel dieser Winkel die Lote BC und BD, verbinden C mit D und fällen schliesslich das Lot AE auf CD.



Nun zeigen wir zuerst, dass $\sphericalangle EAD = \beta$ ist.

Wir haben nämlich:

$$\sphericalangle EAD + \sphericalangle ADE = R$$
$$\sphericalangle \beta \quad + \sphericalangle ABC = R,$$

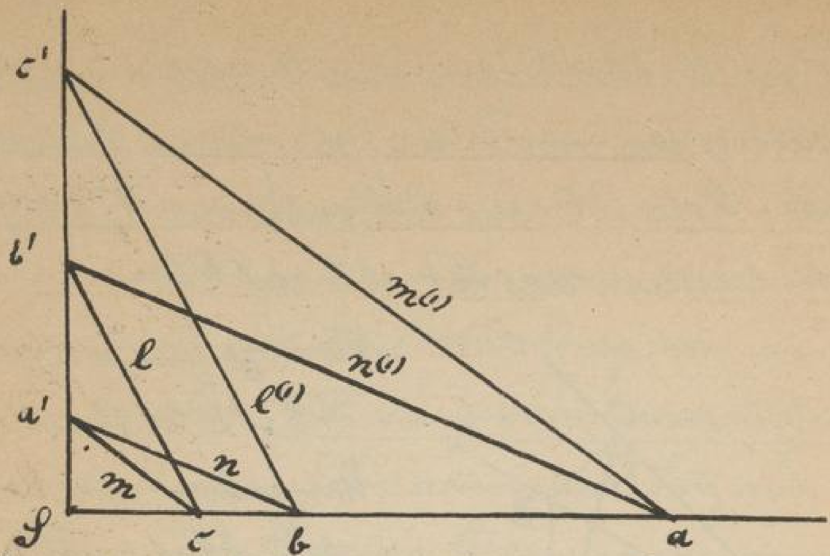
nun liegen, wegen $\sphericalangle ACB + \sphericalangle ADB = 2R$, die 4 Punkte A, C, B, D auf einem Kreise, demnach sind $\sphericalangle ADE$ und $\sphericalangle ABC$ Peripheriewinkel über demselben Bogen AC, also ist $\sphericalangle ADE = \sphericalangle ABC$, also ist auch $\sphericalangle EAD = \sphericalangle \beta$, wie wir beweisen wollten. Es folgt daraus: $\sphericalangle CAE = \sphericalangle \alpha$.

Nun ist, wie man sofort sieht:

$$\beta c = AC, \quad \alpha\beta c = \alpha AC = AE,$$
$$\alpha c = AD, \quad \beta\alpha c = \beta AD = AE,$$

womit bewiesen ist: $\alpha\beta c = \beta\alpha c$.–

Mit Hülfe dieses Satzes wollen wir nun den <u>Pascal</u> in der Ebene beweisen, und zwar <u>zunächst für den Spezialfall, daß die Pascalgrade die ideale Grade ist, und daß die Graden $E_1 E_3 E_5$ und $E_2' E_4' E_6'$ sich unter einem rechten Winkel schneiden</u> (siehe die Anmerkung).



Der Pascal'sche Satz kann für diesen Fall so ausgesprochen werden. Auf den Schenkeln eines rechten Winkels seien je drei Strecken abgetragen von den Längen a, b, c, a', b', c'; durch geeignete Verbindung der 6 Endpunkte entstehen 6 rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen $l, l^{(1)}, m, m^{(1)}, n, n^{(1)}$. Wenn dann $l \parallel l^{(1)}$, $m \parallel m^{(1)}$ ist, so ist auch $n \parallel n^{(1)}$.

Zum Beweise nehmen wir an, dass $l; m; n$ mit den beiden Schenkeln die Winkel $\lambda, \lambda'; \mu, \mu'; \nu, \nu'$ bilden.

Dann bilden nach Voraussetzung auch $l^{(1)}; m^{(1)}$ mit den Schenkeln die Winkel $\lambda, \lambda'; \mu, \mu'$. Zu beweisen ist, dass $n^{(1)}$ mit den Schenkeln die Winkel ν, ν' bildet.

Denken wir uns von S aus auf jede der sechs Hypotenusen ein Lot gefällt, so können wir die Länge jedes dieser Lote mit Hülfe der Katheten und spitzen Winkel des betreffenden Dreiecks auf doppelte Weise ausdrücken, z. B. das auf l gefällte Lot ist $= \lambda b' = \lambda' c$. So erhalten wir sechs

Gleichungen, und der Pascal lässt sich nunmehr so aussprechen: Von den sechs Gleichungen:

1) $\lambda b' = \lambda' c$ 3) $\mu c' = \mu' a$ 5) $\nu a' = \nu' b$

2) $\lambda c' = \lambda' b$ 4) $\mu a' = \mu' c$ 6) $\nu b' = \nu' a$

ist jede eine Folge der fünf übrigen. Wir wollen beispielsweise zeigen, dass 6) aus 1)–5) folgt. Wenn wir zuerst 5) mit $\mu\lambda'$ multiplizieren, so kommt wegen der Kommutativität der Operationen $\lambda, \mu \ldots \nu'$:

$\nu\lambda'\mu a' = \nu'\mu\lambda' b$, oder, wenn wir links 4), rechts 2) anwenden:

$\nu\lambda'\mu' c = \nu'\mu\lambda c'$ oder wegen der Kommutativität:

$\nu\mu'\lambda' c = \nu'\lambda\mu c'$; nun wenden wir links 1), rechts 3) an:

$\nu\mu'\lambda b' = \nu'\lambda\mu' a$, oder:

$\lambda\mu'\nu b' = \lambda\mu'\nu' a$. Hieraus folgt aber offenbar:

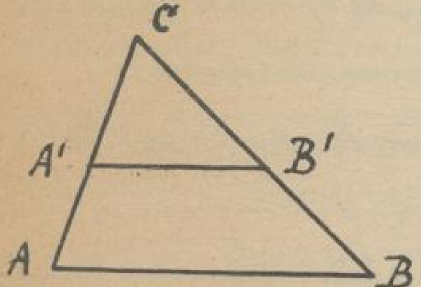
$\nu b' = \nu' a$, q.e.d. –

Anmerkung: Dieser Beweis überträgt sich übrigens sofort auf den Fall, dass die Graden $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_5$ und $\mathfrak{E}_2', \mathfrak{E}_4', \mathfrak{E}_6'$ bei S einen beliebigen Winkel einschliessen. Nur muss man dann nicht die oben eingeführten Winkel $\lambda \ldots \nu'$, sondern die Winkel benutzen, welche die von S gefällten Lote bei S mit den Schenkeln Sa und Sa' bilden. Ist $\sphericalangle S = R$, so kommt beides auf eins hinaus.

Die fundamentale Bedeutung des soeben bewiesenen Satzes liegt darin, dass er uns in den Stand setzt, die

Lehre von den Proportionen ohne irgend ein neues Axiom zu begründen. Wir sehen also, dass auch hier *Euklid* schliesslich Recht behält: auch er führt die Lehre von den Proportionen ohne neues Axiom ein. Allerdings müssen wir hinzufügen: *Die Art dieser Einführung bei Euklid ist gänzlich verfehlt.*

Euklid basiert nämlich die Lehre von den Proportionen auf folgende zwei Sätze: 1) *Wenn in einem Dreiecke ABC zu AB die Parallele $A'B'$ gezogen wird, so ist $AC : BC = A'C : B'C$.*



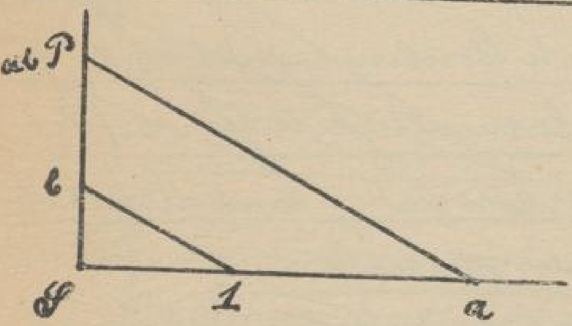
2) *die Umkehrung: Wenn in einem Dreieck $AC : BC = A'C : B'C$ ist, so ist $AB \parallel A'B'$.*

Die Beweise dieser Sätze bei Euklid sind in dem Falle durchaus streng, wo AC und BC beide durch wiederholtes Abtragen einer und derselben Strecke entstanden sind. Nun aber beruft sich Euklid auf allgemeine Grössenbeziehungen, indem er die obige Proportion als eine *Zahlengleichung* auffasst, und schliesst so, dass der Satz bei beliebiger Lage von A und A' gültig bleibt. Hiergegen ist einzuwenden: 1) Dass man eine Proportion zwischen *Strecken* stets als eine *Zahlenrelation* auffassen darf, ist ein neues Axiom. (welches wir unter V besprechen werden). 2) Selbst, wenn man dies neue Axiom eingeführt hat, muss man ausdrücklich beweisen, dass die dadurch neu eingeführten Zahlen (cf. später) denselben Rechnungsgesetzen folgen wie die bereits bekannten. –

Statt im folgenden von Proportionen zu sprechen, wollen wir, weil es einfacher ist, von Gleichungen zwischen Produkten reden. An die Spitze stellen wir demgemäss die

Definition des Streckenprodukts.

Gegeben seien zwei Strecken a, b. Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels tragen wir die Strecke b, auf dem andern die Strecke a und ausserdem eine Strecke a b, die während der ganzen Untersuchung dieselbe bleiben soll, und die wir mit 1 bezeichnen wollen. Nun ziehen wir die Grade 1 b und ziehen an ihr die Parallele durch a. Diese Parallele trifft den andern Schenkel des rechten Winkels in einem Punkte P. Die Strecke SP wollen wir das Produkt der Strecken a und b nennen und mit a b bezeichnen. – Wir betonen, dass diese Definition rein geometrisch ist; a b ist keineswegs ein Produkt zweier Zahlen.



Aus dieser Definition ergeben sich zunächst die folgenden Sätze:

<u>Es ist stets $a.1 = a$, $1.a = a$.</u>

<u>Wenn $a.b = 0$ ist, so ist entweder $a = 0$ oder $b = 0$.</u>

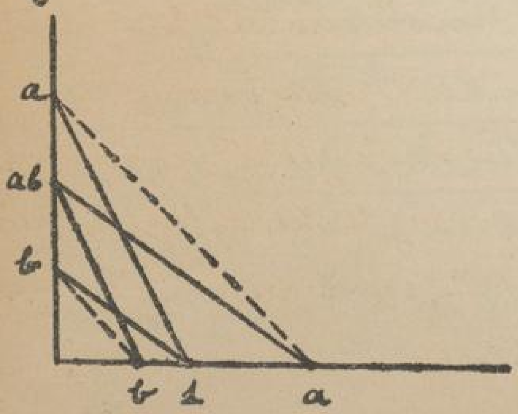
<u>Wenn $a_1 > a_2$ $b_1 > b_2$ ist,</u> (das Zeichen $>$ ist rein geometrisch aufzufassen!) <u>so ist $a_1 b > a_2 b$ und $a b_1 > a b_2$.</u>

Dieser Satz sagt nichts anderes aus wie: Die Anordnung der Punkte auf einer Graden bleibt erhalten, wenn man diese Punkte durch parallele Grade auf eine andere Grade überträgt.–

Wir werden jetzt, mit Hülfe des Pascal'schen Satzes, beweisen, <u>dass das soeben definierte Streckenprodukt ab die fundamentalen Gesetze der Zahlenmultipeikation befolgt, nämlich das kommutative, assoziative und distributive Gesetz</u>, die sich in den Formeln ausdrücken:

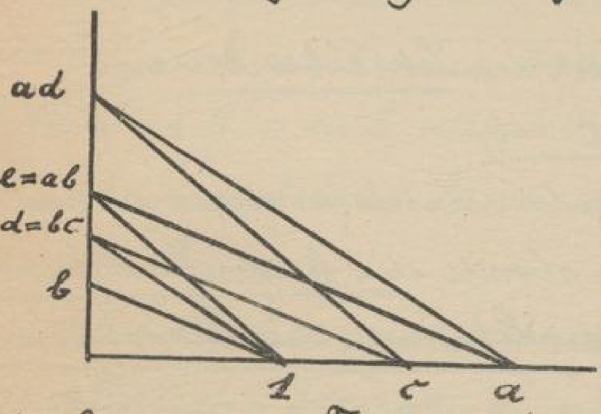
1) <u>$ab = ba$.</u> 2) <u>$a(bc) = (ab)c$.</u> 3) <u>$a(b+c) = ab + ac$.</u>

1.) Um das <u>kommutative Gesetz zu beweisen</u>, konstruieren wir zuerst die Strecke ab nach der Definition, indem wir durch den Endpunkt von a die Parallele zu 1 b ziehen, der Endpunkt von a b heisse E. Die Strecke b a erhalten wir, wenn wir durch den Endpunkt von b



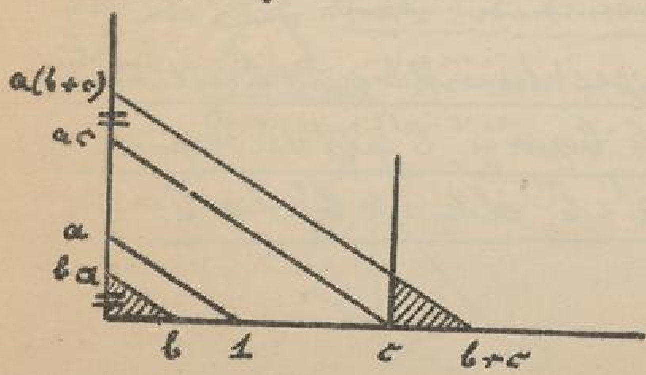
die Parallele zu $1a$ ziehen; der Endpunkt von ba heisse E'. Dann ist zu zeigen, dass E und E' zusammenfallen, oder anders ausgedrückt, dass die Verbindungslinie $Eb \parallel 1a$ ist. Das ist aber genau der Pascal'sche Satz wie wir ihn bewiesen haben; es kommt dabei in Betracht, dass die Graden $a\,a$ und $b\,b$ parallel sind.

2.) Beim Beweis des assoziativen Gesetzes (wobei wir $ab = ba$ benutzen dürfen) verfahren wir ganz analog; wir



konstruiren erst $bc = d$, dann ad, dann $ab = e$, endlich ec. Dass die Endpunkte von ad und ec zusammenfallen, ist wiederum nichts wie der Pascal'sche Satz, wie die Figur zeigt.

3.) Der Beweis des distributiven Gesetzes kommt darauf hinaus, die Gleichheit der in der Figur doppelt durchstrichenen



Strecken zu zeigen. Diese Gleichheit folgt aber, sobald man durch c eine Verticale zieht, aus der Kongruenz der schraffierten Dreiecke, sowie aus dem Satz von

von der Gleichheit der Gegenseiten im Parallelogramm.

Wir können nun auch <u>negative Strecken</u> einführen und für ihre Multiplikation die bekannten Vorzeichenregeln festsetzen. Wir können ferner durch jede Strecke $b \neq 0$ <u>dividieren</u>, indem wir definieren: $a = \frac{c}{b}$ $(b \neq 0)$ soll bedeuten $ab = c$. In der That, aus c und $b \neq 0$ ist a eindeutig bestimmt. –

Ferner führen wir die <u>Schreibweise</u> ein

$$\underline{a : b = c : d,}$$

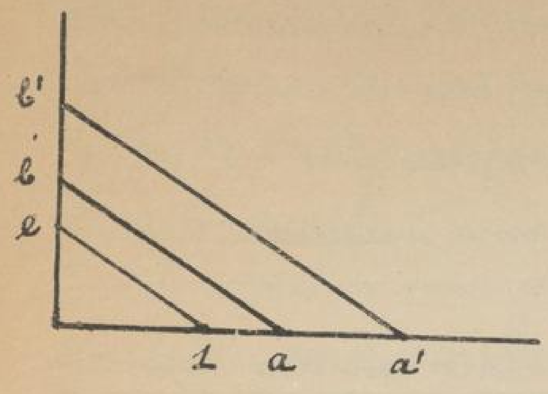
und verstehen darunter nichts anderes wie $ad = bc$. –

Nun sind wir im stande, <u>die beiden Euklidischen Fundamental-Sätze der Lehre von den Proportionen streng zu beweisen</u>.

Wir beginnen mit der <u>Definition</u>: Zwei Dreiecke sollen <u>ähnlich</u> heissen, wenn ihre Winkel paarweise übereinstimmen. Dann gilt der Satz:

<u>In zwei ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten a, b bezw. a', b' gilt die Proportion:</u>

$$\underline{a : b = a' : b', \text{ dh.: } ab' = a'b.}$$



Zum **Beweis** tragen wir beide Dreiecke in einen rechten Winkel ein, und ziehen durch den Punkt 1 des einen Schenkels die Parallele zu den beiden Hypotenusen

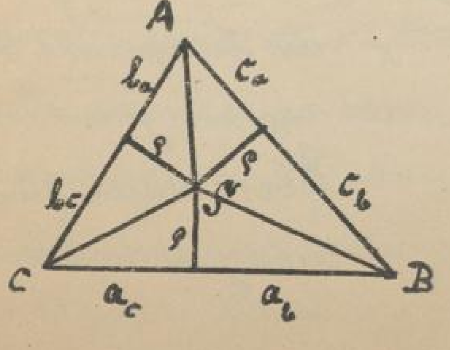
Dadurch erhalten wir die Strecke e auf dem andern Schenkel, und es ist nach Definition $b = ea$, $b' = ea'$, folglich $eab' = ea'b$, also $ab' = a'b$. q. e. d.

Ebenso leicht lässt sich die Umkehrung beweisen.

Nun ist es nicht schwer, diesen Satz auf beliebige ähnliche Dreiecke zu übertragen dh. zu beweisen: In ähnlichen Dreiecken sind die Seiten proportional, dh. es ist:

$$a : b : c = a' : b' : c'$$

Zum **Beweise** teilen wir jedes der beiden Dreiecke ABC und A'B'C' in sechs paarweise ähnliche rechtwinklige Dreiecke, indem wir den Mittelpunkt S des eingeschriebenen Kreises (dessen Radius ρ



bezw. ρ' sei) mit den Ecken verbinden und von S Lote auf die drei Seiten fallen. Dann liefert der vorige Satz:

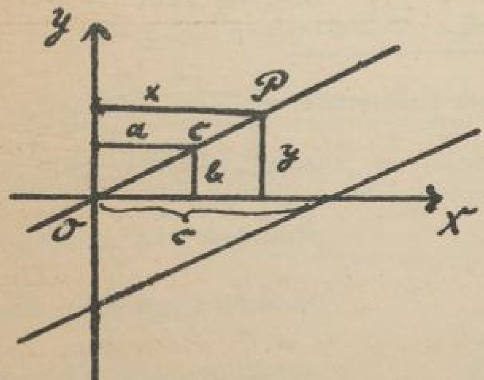
$$a_b : \rho = a'_b : \rho', \quad a_c : \rho = a'_c : \rho', \quad \text{also } a : \rho = a' : \rho'$$
$$b_c : \rho = b'_c : \rho', \quad b_a : \rho = b'_a : \rho', \quad \text{also } b : \rho = b' : \rho';$$

hieraus folgt: $a : b = a' : b'$, und weiter: $a : b : c = a' : b' : c'$, q. e. d.

<u>Damit haben wir die Lehre von den Proportionen vollständig streng auf Grund der Axiomgruppen I–IV aufgebaut.</u>

Unser Ziel ist jetzt, zu beweisen, daß die bisher betrachteten Schnittpunktsätze (Desargues und Pascal) die einzigen sind, die wir jetzt beweisen können.

Zunächst zeigen wir, <u>daß wir jetzt die analytische Geometrie der Graden und Ebene aufbauen können.</u> Wir zeichnen uns ein rechtwinkliges Achsenkreuz in der Ebene.



Die eine Achse nennen wir x-Achse, die andere y-Achse. Ihr Schnittpunkt heisse der Nullpunkt. Dann können wir jeden Punkt P der Ebene durch zwei <u>Strecken</u> x und y charakterisieren, die positiv oder negativ sein können, (von *Zahlen* ist hier noch gar keine Rede, die werden erst durch das V. Axiom eingeführt werden). x sei das Lot von P auf die y-Achse, y das auf die x-Achse. x und y nennen wir die *Koordinaten von P.*

Wir ziehen nun durch den Nullpunkt irgend eine Grade, die durch den Punkt C mit den Koordinaten a, b gehen möge. Durch a, b ist offenbar diese Grade völlig bestimmt. Sei ferner $P(x, y)$ *irgend ein* Punkt der Graden OC. Dann ist die Frage: *welcher Bedingung müssen x, y genügen, wenn eben x, y auf OC liegen soll?*

Nun gilt nach den vorangehenden Sätzen:

$$a : b = x : y \quad \text{oder} \quad bx - ay = 0.$$

Das ist die gesuchte Bedingung, denn auch umgekehrt sieht man, daſs jeder Punkt, dessen Koordinaten diese Bedingung erfüllen, auf der Graden OC liegt. Wir wollen daher die obige Gleichung als die *Gleichung der Graden OC bezeichnen.*

Nun ist es leicht, die Gleichung einer beliebigen Graden zu finden, die etwa die x-Achse bei $x = c$ schneiden mag. Ziehen wir nämlich zu dieser Graden die Parallele durch O, so ist deren Gleichung $bx - ay = 0$; hieraus ergiebt sich offenbar die gesuchte Gleichung, wenn wir x durch $x - c$ ersetzen, was zu der Gleichung führt:

$$bx - ay - bc = 0.$$

Also haben wir den Satz: Jede Grade wird durch eine lineare Gleichung in x und y dargestellt. Umgekehrt stellt jede lineare Gleichung in x und y eine Grade dar.

Wir wollen nun die fundamentalen Eigenschaften der Graden aus ihrer Gleichung herleiten.

Zwei Grade schneiden sich in einem Punkte, oder sie sind parallel. In der That haben die Gleichungen

$$ux + vy + w = 0 \text{ und } u_1 x + v_1 y + w_1 = 0$$

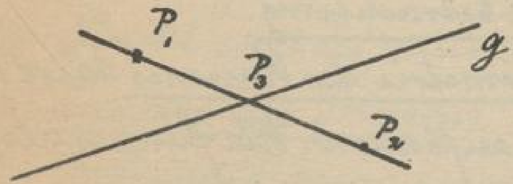
stets ein Paar gemeinsamer Wurzeln x, y, die beide endlich sind, ausser wenn $uv_1 - u_1 v = 0$ ist. (Parallelität.)

Von drei Punkten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ einer Graden liegt der zweite zwischen den beiden andern, wenn $x_1 \gtrless x_2 \gtrless x_3$ und $y_1 \gtrless y_2 \gtrless y_3$ ist, wo in jeder von beiden Ungleichungen entweder beide obere oder beide untere Zeichen gelten sollen. (Übrigens kann auch Gleichheit vorkommen, was nichts wesentliches ändert).

Sollen nun unsere Axiome über den Begriff „zwischen" gelten, so müssen wir zeigen, dass die eine der beiden Ungleichungen die andere nach sich zieht. Nehmen wir also an, es sei $ux + vy + w = 0$ die Gleichung der Graden und $x_1 \gtrless x_2 \gtrless x_3$. Dann folgt, da wir ja mit Strecken wie mit Zahlen rechnen dürfen:

$$u x_1 + w \gtrless u x_2 + w \gtrless u x_3 + w \text{ oder:}$$
$$- v y_1 \gtrless - v y_2 \gtrless - v y_3 \text{, also:}$$
$$y_1 \gtrless y_2 \gtrless y_3 \text{, q. e. d.} -$$

Jede Grade teilt die Ebene in zwei Teile von bekannter Eigenschaft. Wir wollen sagen, dass xy auf der einen bezw. andern Seite der Graden liegt, wenn $ux + vy + w > 0$ bezw. < 0 ist. Wir zeigen nun, dass, wenn $P_1(x_1 y_1)$ und $P_2(x_2 y_2)$ auf verschiedenen Seiten der Graden g liegen, notwendig auf der Strecke $P_1 P_2$ ein Punkt von g liegt. Zum Beweis nehmen wir an, die Verbindungsgrade $P_1 P_2$ habe die Gleichung $ax + by + c = 0$. Ihr Schnittpunkt mit g sei P_3 $(x_3 y_3.)$ Dann haben wir nach Vorraussetzung:



$$u x_1 + v y_1 + w \gtrless 0 = u x_3 + v y_3 + w = 0 \gtrless u x_2 + v y_1 + w \text{, und:}$$
$$a x_1 + b y_1 + c = 0, \quad a x_3 + b_3 + c = 0, \quad a x_2 + b y_2 + c = 0.$$

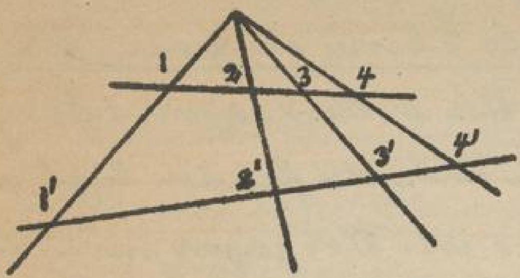
Multiplizieren wir die obere Zeile mit b, die untere mit v, so ergiebt sich durch Subtraktion:

$$(bu - va)x_1 + bw - vc \gtrless (bu - va)x_3 + bw - vc \gtrless (bu - va)x_2 + bw - v\ldots$$

Hieraus folgt aber sogleich: $x_1 \gtrless x_3 \gtrless x_2$, dh. P_3 liegt zwischen P_1 und P_2, q. e. d.

Diese Betrachtungen werden uns später nützlich sein.

Wir können jetzt, was wir aber nicht ausführen wollen, den Satz von der Erhaltung des Doppelverhältnisses beweisen (in der Figur ist: $\frac{12}{23} : \frac{14}{43} = \frac{1'2'}{2'3'} : \frac{1'4'}{4'3'}$) und damit die projektive Geometrie begründen; im Anschluss daran können wir die Sätze von Menelaus und Ceva fernerhin den Sehnen- und Sekantensatz in der Theorie des Kreises, die Theorie des Feuerbach'schen Kreises, den Satz von Ptolemaeus beweisen, alles ohne jede Stetigkeitsbetrachtung.



Auch die analytische Geometrie des Raumes lässt sich für Graden und Ebenen jetzt aufbauen. Wir finden als Gleichung einer Ebene $ux + vy + wz + t = 0$, und könnten hieran ähnliche Betrachtungen knüpfen wie an die Gleichung der Graden in der Ebene.

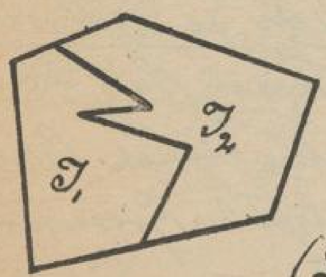
[Beiläufig bemerken wir, dass wir für die idealen Punkte auch das Zeichen ∞ einführen können, für welches dann zB. folgende Regeln gelten:

$$\infty \pm a = \infty,\quad a\infty = b\infty,\quad \frac{a}{0} = \infty.$$]–

Von unseren Axiomen I – IV machen wir jetzt eine letzte und wohl die interessanteste Anwendung, indem wir die Theorie der Flächenmessung auf sie basiren.

Wir beginnen mit der Definition: Unter einem Polygon verstehen wir einen gebrochenen Linienzug, bei dem Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, und der (in leicht verständlicher Ausdrucksweise) keine Doppelpunkte enthält. Ein solches Polygon teilt die Ebene in zwei Gebiete von der Art, dass sich zwei in demselben Gebiet liegende Punkte stets durch einen gebrochenen Linienzug verbinden lassen, der das Polygon nicht schneidet. Diesen Satz kann man übrigens bereits auf Grund der Axiome I, II beweisen. Dasjenige der beiden Gebiete, welches keinen idealen Punkt enthält, nennen wir das innere, das andere das äussere des Polygons.

Verbindet man zwei Punkte des Polygons durch einen gradlinigen Zug, der ganz im innern verläuft, so sagen wir, das Polygon J sei zerlegt in die beiden Polygone J_1 und J_2 und schreiben:



$$J = J_1 + J_2.$$

(Das ist wieder eine rein geometrische Beziehung!)

Durch Schluss von n auf $n+1$ kann man zeigen, dass jedes Polygon sich in Dreiecke zerlegen lässt. –

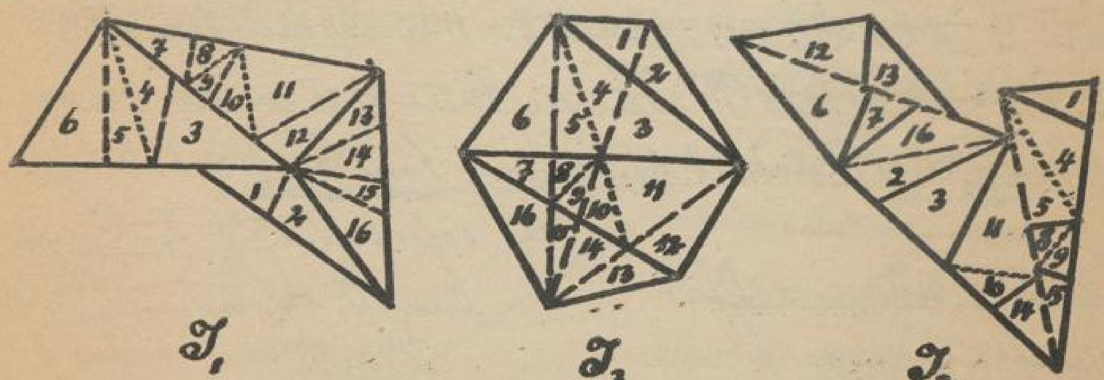
Die Definition der Flächengleichheit fassen wir nun so: Zwei Polygone heissen flächengleich, wenn sie in gleich viele paarweise kongruente Dreiecke zerlegt werden können. Etwas weiter ist der Begriff der Inhaltsgleichheit, den wir so definieren:

Zwei Polygone heissen inhaltsgleich, wenn es möglich ist, flächengleiche Stücke so hinzuzufügen, dass die entstehenden Polygone flächengleich sind.

Das ist im wesentlichen die Euklidische Definition. Er gründet seine Theorie der Inhaltsgleichheit auf die Lehre von den Proportionen; wir werden zeigen, dass eine solche Begründung thatsächlich möglich ist, daß aber in Euklid's Beweisen erhebliche Lücken bestehen

Wir beweisen nun zuerst den Satz: Sind zwei Polygone einem dritten flächengleich, so sind sie untereinander flächengleich. (Diesen Satz hat Euklid auch; doch beweist er ihn durch Berufung auf einen allgemeinen Satz über Grössen — ein Irrthum den wir bereits mehrmals erwähnten.)

Sei also $J_1 = J_3$, $J_2 = J_3$; wir wollen zeigen, dass $J_1 = J_2$ ist. Nach Voraussetzung lässt sich sowohl für J_1 als auch für J_2 eine Dreiecksteilung angeben, sodass jeder dieser beiden Teilungen eine Dreiecksteilung von J_3 „entspricht", wie wir kurz sagen wollen. Bei Superposition dieser beiden Teilungen wird im allgemeinen jedes Dreieck der einen Teilung durch Grade, die der andern Teilung angehören, zerlegt in irgendwelche Polygone. Nun füge ich noch soviele (punktierte) Graden hinzu, dass jedes Dreieck jeder der beiden Teilungen in lauter kleinere <u>Dreiecke</u> zerlegt wird. Die entsprechende Teilung in kleinere Dreiecke kann ich dann in jedem Dreieck von J_1 und J_2 anbringen. Dann sind offenbar J_1 und J_2 in gleich viele paarweis kongruente Dreiecke zerlegt, d.h. es ist $J_1 = J_2$ —



J_1 J_3 J_2

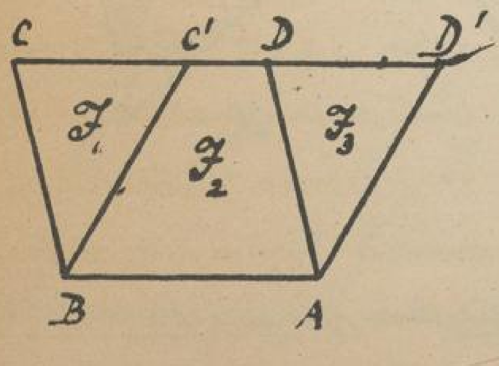
Wir weisen auf die <u>Analogie</u> hin, die <u>zwischen diesem Beweis und dem Existenzbeweis des bestimmten Integrals</u>

besteht.

Aus der Definition der Flächengleichheit folgt sofort: <u>Flächengleiches zu flächengleichem addiert giebt flächengleiches</u>. <u>Dagegen gilt für die Subtraktion</u>, was wir besonders betonen, nur der Satz: <u>Flächengleiches von flächengleichem subtrahiert giebt inhaltsgleiches</u>.

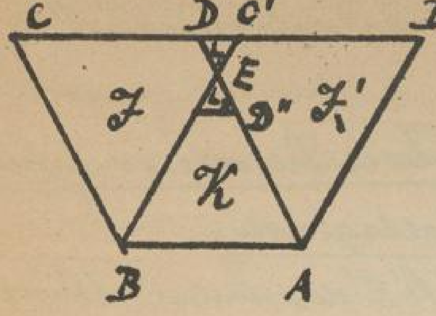
Auf Grund unserer Definitionen beweisen wir jetzt den Satz: <u>Zwei Parallelogramme sind inhaltsgleich, wenn sie gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben</u>.

Zum <u>Beweise</u> legen wir die Parallelogramme so aufeinander, dass die gleichen Grundlinien zusammenfallen. Dann unterscheiden wir folgende <u>drei Fälle</u>: 1) C' zwischen C und D; 2) 3) D zwischen C und C', und zwar 2) $AE > DE$, 3) $AE < DE$. Wir bezeichnen $ABCD$ mit P, $ABC'D'$ mit P'. Für die Fälle 1) 2) werden wir sogar <u>Flächengleichheit</u> beweisen. <u>Im Fall 1)</u> haben wir sofort: $F_1 = F_3$, $F_2 = F_2$, folglich: $F_1 + F_2 = F_3 + F_2$, d. h. $P = P'$.

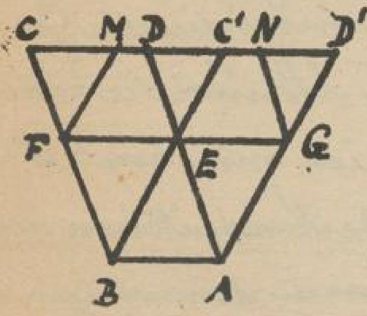


<u>Im Falle 2)</u> tragen wir DE in E ab, sodass $ED'' = ED$ wird, und ziehen

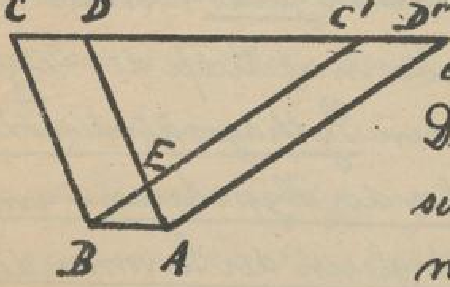
durch D'' die Parallele zu AB. Dann ist $L_1 = L_2$,



folglich $J + L_1 = J + L_2$,
und ebenso:
$$J' + L_1 = J' + L_2.$$
Nun ist $J + L_2 = J' + L_2$, also auch $J + L_1 = J' + L_1$ und: $J + L_1 + K = J' + L_1 + K$, d.h. $P = P'$. – Man kann auch leicht direkt (ohne Benutzung von L_2) eine Zerlegung von P und P' in kongruente Dreiecke angeben, indem man $FEG \parallel AB$ und $FM \parallel AD'$, $GN \parallel BC$ zieht.



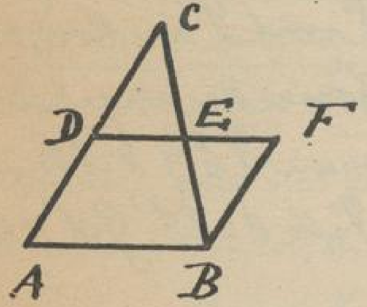
Im Fall 3) können wir nur <u>Inhaltsgleichheit</u> beweisen. [Der Beweis der Flächengleichheit erfordert hier das Archimedische Axiom.] Die Dreiecke $BC'C$ und ADD' sind kongruent, also um so mehr flächengleich. Subtrahieren wir von jedem Dreieck das $\Delta C'DE$ und fügen wir ΔABE hinzu, so sehen wir, dass



P und P' inhaltsgleich sind. – (Das Gleichheitszeichen soll weiterhin im allgemeinen Inhaltsgleichheit bedeuten.)

Hieraus folgt nun der Satz: Zwei Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind inhaltsgleich.

Sei ABC das eine Dreieck, A'B'C' das andere, AB = A'B'. Halbieren wir AC in D, BC in E und machen wir EF = DE, so ist das Parallelogramm ABFD inhaltsgleich dem △ABC,



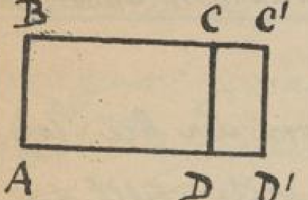
ferner hat es dieselbe Grundlinie AB und die halbe Höhe. Führe ich nun am △A'B'C' dieselbe Konstruktion aus, so wird nach dem vorigen Satze ABFD = A'B'F'D', also auch

△ABC = △A'B'C'. –

Wir bemerken, dass im Raume ein analoger Satz wahrscheinlich nicht gilt, wie schon Gauss vermutete.

Endlich können wir mit Hülfe des letzten Satzes in der gewöhnlichen Art den Pythagoräischen Lehrsatz beweisen: Das Quadrat über der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck ist inhaltsgleich der Summe der Kathetenquadrate. –

Die bewiesenen Sätze über Inhaltsgleichheit sind vollkommen streng; indessen erkennt man bei näherer Untersuchung, daß sie sämtlich vorläufig gar keinen Inhalt haben. Wir wissen ja noch gar nicht, ob es überhaupt Polygone giebt, die verschiedenen Inhalt haben. Und nicht nur dies müssen wir wissen, wenn wir mit unseren Sätzen etwas anfangen wollen, sondern wir brauchen noch folgenden Satz:



Sind A, B, B, D, C', D' sechs verschiedene Punkte derart, daß ABCD und ABC'D' Rechtecke sind, und dass C zwischen B und C' liegt, so sind diese Rechtecke nicht inhaltsgleich.

Wir werden sehen, dass wir nur diesen Satz brauchen, den wir auch so fassen können: Wenn zwei inhaltsgleiche Dreiecke gleiche Grundlinien haben, so haben sie auch gleiche Höhe.

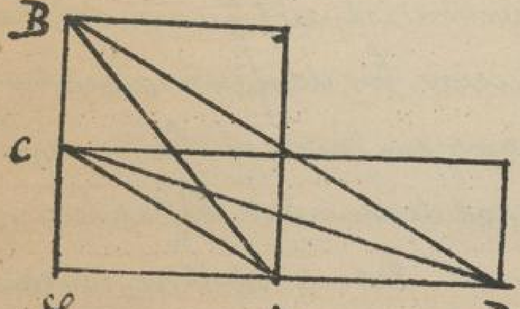
Euklid hat die Schwierigkeit, die hier vorliegt, bei Seite gelassen. Wir werden den genannten Satz, der offenbar die Umkehrung eines vorhergehenden ist, auf Grund der Lehre von den Proportionen beweisen. Es darf uns nicht wundern, wenn dieser Beweis nicht ganz einfach ist. Denn die Inhaltsgleichheit zweier Dreiecke sagt doch nach Definition nur aus, dass gewisse „entsprechende" Dreiecksteilungen existieren; dabei kann die Anzahl der Dreiecke sehr gross sein, und man sieht nicht unmittelbar, wie man von da aus, bei Gleichheit der Grundlinien, auf Gleichheit der Höhen schliessen soll.

Der zu beweisende Satz ist zuerst von Killing und Stolz besonders formuliert worden; letzterer giebt ihm die Fassung: Zerlegt man ein Rechteck durch Grade in Dreiecke und lässt man auch nur eines dieser Dreiecke fort, so kann man das mit den übrigen Rechteck auf keine Weise mehr bedecken.

Unsere Darstellung ist übrigens von der bei Stolz und Killing durchaus verschieden. Denn der erste stellt den in Rede stehenden Satz als Axiom auf, der zweite dagegen beweist ihn mit Hülfe des Archimedischen Axioms, was kein besonderes Interesse hat.

Dem Beweise schicken wir zwei Hülfssätze voraus:

1. Hülfssatz. Wenn für die vier Strecken a, b, c, d die Gleichung $ab = cd$ besteht, so sind die aus a, b einerseits und c, d andrerseits gebildeten Rechtecke inhaltsgleich.



Der Beweis ist einfach. Aus der Voraussetzung $a : c = d : b$ folgt, dass die Verbindungsgraden $\overline{ac}$ und $\overline{bd}$ parallel sind. Hieraus folgt, dass $\triangle ACB = \triangle ACD$ ist, also, wenn wir auf beiden Seiten $\Delta\, ACS$ addieren, dass auch

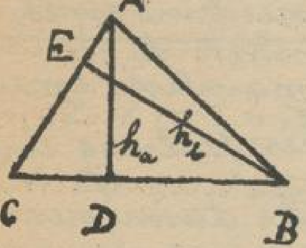
$$\Delta ABS = \Delta CDS \text{ ist, also auch:}$$

$$\Delta ABS + \Delta ABS = \Delta CDS + \Delta CDS. \quad \text{q. e. d.}$$

2. Schwieriger ist der 2. Hülfssatz zu beweisen: Wenn die aus a, b bezw. c, d gebildeten Rechtecke inhaltsgleich sind, so ist $ab = cd$.

Wir beginnen damit, den Begriff „Flächenmass" und zwar zunächst beim Dreieck, zu definieren.

Def. I. Wir wollen unter dem Flächenmass eines Dreiecks das halbe Produkt aus einer Seite und der auf ihr senkrecht stehenden Höhe verstehen. Die Berechtigung dieser Bezeichnungsweise ergiebt sich erst daraus, dass das genannte Produkt unabhängig ist von der Wahl der Dreiecksseite. In der That folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACD und BCE:



$$AC : AD = BC : BE, \text{ oder:}$$

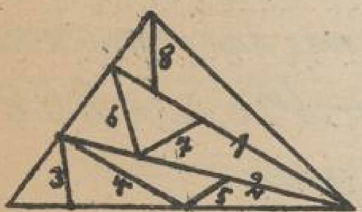
$$b : h_a = a : h_b, \text{ also } a . h_a = b . h_b, \quad \text{q. e. d.}$$

Def. II. Nun definieren wir weiter: Denken wir uns ein beliebiges Polygon irgendwie in Dreiecke zerlegt, so wollen wir die Summe der Flächenmasse aller dieser Dreiecke als das Flächenmass des Polygons bezeichnen.

Hierin steckt implizite die Behauptung, dass die genannte Summe unabhängig ist von der Art der Einteilung des Polygons, und diese Behauptung wollen wir beweisen. (Dieser Beweis ist der Kern dieser ganzen Untersuchung.) Man kann leicht zeigen, dass alles darauf ankommt, folgenden Satz zu beweisen:

Wenn man ein Dreieck ABC auf irgend eine Weise in Dreiecke zerlegt, so ist die Summe der Flächenmasse dieser Dreiecke (also das Flächenmass von ABC im Sinne der Definition II) gleich dem Flächenmass von ABC im Sinne der Def. I.

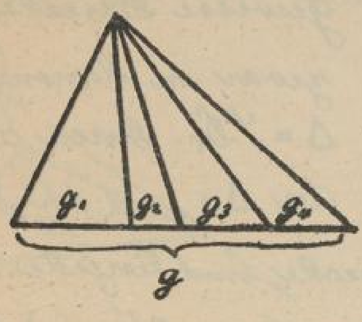
Der Beweis dieses Satzes wird erleichtert, ~~wenn~~ wir den Begriff der kanonischen Zerschneidung eines Dreiecks einführen. So wollen wir nämlich eine Dreiecks-Einteilung eines Dreiecks dann nennen, wenn sie durch fortgesetztes Ziehen von Transversalen hergestellt werden kann. (vgl. die Figur, in der die Teilungslinien so numeriert sind, wie man sie successive zu ziehen hat.)



Nun zeigen wir erstens, dass für eine kanonische

Zerschneidung der zu beweisende Satz gilt, und zweitens, dass jede beliebige Dreiecks-Teilung sich auf kanonische zurückführen lässt.

Erstens. Denken wir uns ein Dreieck Δ dadurch in Dreiecke δ_i zerlegt, dass von einer Ecke aus Transversalen gezogen sind, wobei die Grundlinie g von Δ in Stücke g_i zerfallen mag; diese Art der Zerlegung wollen wir andeuten durch $\Delta = S\,\delta_i$.

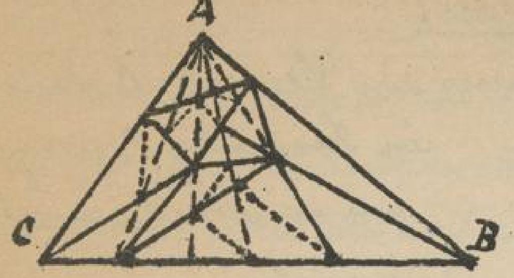


Bezeichnen wir nun das Flächenmass eines Dreiecks Δ im Sinne der Definition I mit $F(\Delta)$, so haben wir $F(\delta_i) = \frac{1}{2} g_i h$, also:

$$\Sigma F(\delta_i) = \Sigma \tfrac{1}{2} g_i h = \tfrac{1}{2} h \Sigma g_i = \tfrac{1}{2} g h = F(\Delta),$$

d.h. der zu beweisende Satz gilt für eine Zerschneidung S. Folglich gilt er auch für eine Zerschneidung $S^{(1)} S^{(2)} \dots S^{(k)}$; in dieser Form ist aber jede kanonische Zerschneidung darstellbar, also gilt unser Satz für jede solche.

Zweitens. Um zu zeigen, dass jede beliebige Dreieckszerschneidung eines Dreiecks ABC sich auf kanonische zurückführen lässt, verfahren wir so. Sei das Dreieck Δ in beliebiger Weise in Dreiecke Δ_i zerlegt: $\Delta = \Sigma \Delta_i$.



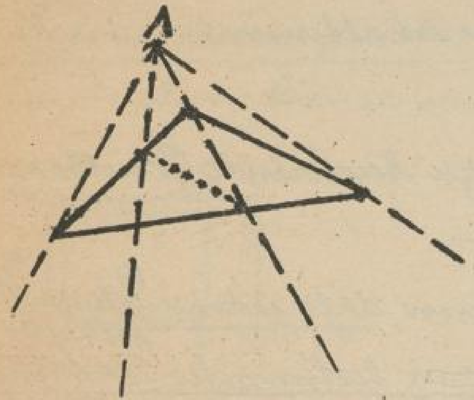
Nun ziehen wir etwa von der Ecke A durch jeden Eckpunkt der Δ-Teilung eine Transversale; durch diese Transversalen zerfällt Δ in gewisse Dreiecke D_k und zwar in kanonischer Weise: $\Delta = S D_k$. Durch die Linien der Δ- und der D-Teilung zusammen zerfällt Δ in Dreiecke und Vierecke. Ziehen wir noch in jedem dieser Vierecke eine (punktierte) Diagonale (wodurch keine neuen Endpunkte entstehen) so zerfällt sowohl Δ als auch jedes Δ_i und D_k in Dreiecke δ. Wir wollen zeigen, dass die δ-Teilung jedes Δ_i und jedes D_k kanonisch ist.

In der That, die δ-Teilung jedes D_k ist so beschaffen, dass sowohl das innere von D_k als auch eine Seite, nämlich die A gegenüberliegende, von Teilpunkten frei ist; daraus folgt aber, dass die Zerschneidung kanonisch ist. Hieraus folgt weiter, dass auch die δ-Teilung des Gesamtdreiecks Δ kanonisch ist, sodass wir haben:

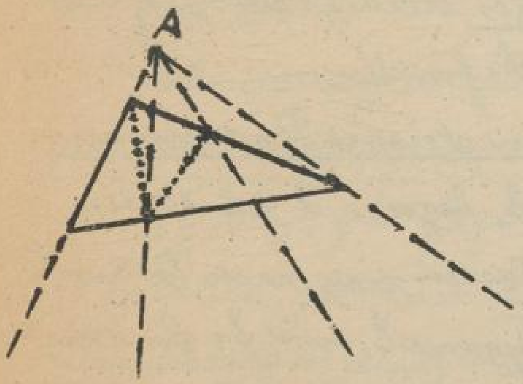
$$\mathfrak{F}(\Delta) = \sum \mathfrak{F}(\delta),$$

wo über alle δ zu summieren ist.

Aber auch die δ=Teilung jedes Δ_i ist kanonisch. Bemerken wir zunächst, dass im innern keines Δ_i Teilpunkte liegen. Nach Konstruktion geht durch jede Ecke von Δ_i eine Transversale durch A, und zwar giebt es stets eine Ecke von Δ_i, für welche diese Transversale nicht im äusseren von Δ_i verläuft; sie geht also entweder durch das innere von Δ_i,



oder sie fällt mit einer Seite von Δ_i zusammen. Im ersten Fall haben wir eine Dreieckteilung ohne innere Punkte mit einer Transversale; eine solche aber ist kanonisch. Im zweiten Fall haben wir eine Dreiecksteilung ohne innere Punkte, bei der überdies



noch eine Seite frei von Teilpunkten ist. Läge nämlich auf der, mit der Transversale durch A zusammenfallenden Seite von Δ_i ein Eckpunkt der δ=Teilung von Δ_i, so könnte das nur ein Schnittpunkt dieser Seite mit einer andern Transversale durch A, d.h. der Punkt A selber sein, was unmöglich ist. Also liegt auf der betreffenden Seite von Δ_i kein Teilpunkt, und daraus schliessen wir weiter, dass die δ = Teilung jedes Δ_i kanonisch ist. Daraus folgt aber:

$$\mathfrak{F}(\Delta_i) = \sum_{\Delta_i} \mathfrak{F}(\delta) \text{ und folglich:}$$

$$\sum_i \mathfrak{F}(\Delta_i) = \sum \mathfrak{F}(\delta)$$

wo rechts über alle δ zu summieren ist. Kombinieren wir diese Gleichung mit der oben erhaltenen:

$$\mathfrak{F}(\Delta) = \sum \mathfrak{F}(\delta),$$

so bekommen wir endlich die zu beweisende Gleichung:

$$\mathfrak{F}(\Delta) = \sum \mathfrak{F}(\Delta_i). -$$

Hiermit ist denn auch bewiesen, <u>dass jedem Polygon P im Sinne der Definition II ein ganz bestimmtes Flächen-mass zukommt, welches wir von nun an mit $\mathfrak{F}(P)$ bezeichnen wollen.</u>

Der <u>Beweis des 2. Hülfssatzes</u> erledigt sich jetzt sehr rasch. Zunächst folgt aus den Definitionen:

<u>Flächengleiche Polygone haben gleiches Flächenmass.</u>

Bezeichnen wir nun die aus a, b, bezw. c, d gebildeten Rechtecke mit R_1 und R_2, so lassen sich nach Voraussetzung zwei flächengleiche Polygone E_1 und E_2 finden, sodass $R_1 + E_1$ und $R_2 + E_2$ flächengleich sind, dass also gilt:

$$\mathfrak{F}(R_1 + E_1) = \mathfrak{F}(R_2 + E_2) \text{ oder:}$$

$$\mathfrak{F}(R_1) + \mathfrak{F}(E_1) = \mathfrak{F}(R_2) + \mathfrak{F}(E_2).$$

Von dieser Gleichung zwischen Streckenprodukten subtrahieren wir $F(E_1) = F(E_2)$ und erhalten:

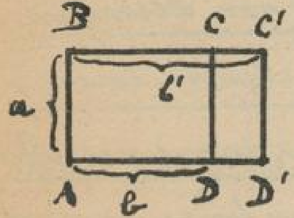
$$F(R_1) = F(R_2).$$

Nun ist offenbar $F(R_1) = ab$, $F(R_2) = cd$, also folgt:

$ab = cd$, was zu beweisen war.–

Aus diesem Beweise ergiebt sich: Inhaltsgleiche Polygone haben gleiches Flächenmass.

Nun können wir leicht beweisen, dass in der nebenstehenden Figur die Rechtecke ABCD und ABC'D' nicht inhaltsgleich sein können. Wären sie es nämlich, so hätten sie gleiches Flächenmass, d.h. es wäre $ab = ab'$, also $b = b'$, was nicht der Fall ist.



Ebenso ergiebt sich der Satz: Inhaltsgleiche Dreiecke von gleicher Grundlinie haben gleiche Höhe. Denn aus:

$\frac{1}{2} g h = \frac{1}{2} g h'$ folgt ohne weiteres: $h = h'$.

Endlich gilt auch der Killing-Stolz'sche Satz. Im entgegengesetzten Fall nämlich würde man, entgegen unserm Theorem, für ein Polygon zwei verschiedene Flächenmasse finden können.–

Jetzt lassen sich auch die Begriffe „inhaltsgrösser“

und „inhaltskleiner" so definieren, dass für zwei Polygone P und Q stets eine und nur eine der Beziehungen gilt:

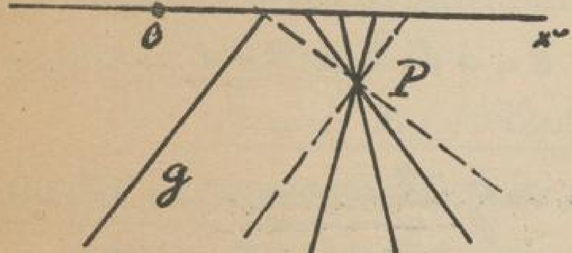
$$P < Q, \quad P = Q, \quad P > Q.$$

Es soll nämlich $P < Q$ heissen, wenn $F(P) < F(Q)$ ist.

Damit haben wir denn die Theorie der Flächenmessung vollständig begründet. –

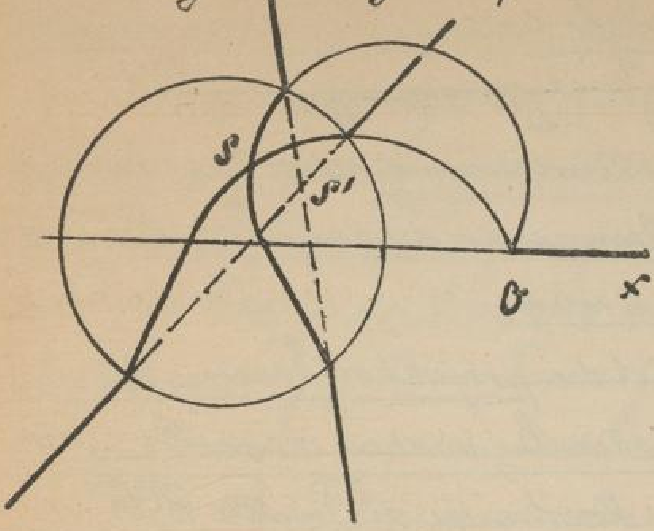
Wir wollen den Abschnitt IV abschliessen mit einer Bemerkung über den Satz von Desargues.

Wir haben seinerzeit gezeigt, daß der Satz von Desargues nicht bewiesen werden kann mit Hülfe der ebenen Axiome I und II; wir wollen jetzt zeigen, dass er auch dann noch unbeweisbar ist, wenn man das Parallelaxiom hinzunimmt.



Wir erinnern uns zu diesem Zwecke an die früher (p. 28) erörterte Geometrie ohne Desargues. In dieser Geometrie gilt freilich auch das Parallelenaxiom nicht; so giebt es durch P in der Figur ein Parallelenbüschel zu g. Jene Geometrie ist also für den vorliegenden Zweck unbrauchbar. Indessen können wir aus ihr eine brauchbare folgendermassen herstellen. Wir legen um irgend einen Punkt der negativen x = Achse einen Kreis, welcher nicht die positive x = Achse schneidet.

Ausserhalb dieses Kreises soll überall die gewöhnliche Euklidische Geometrie gelten; innerhalb des Kreises dagegen sollen die graden Linien im Sinne der Geometrie p. 28 definiert sein. In der so definierten Geometrie gilt der Desargues nicht; man erkennt dies sofort, wenn man die Figur p. 30 ganz ins innere des genannten Kreises bringt.



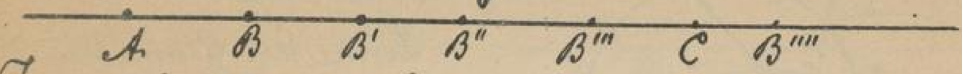
Wohl aber gilt das Parallelenaxiom. Man kann nämlich zeigen, dass zwei Grade unserer Geometrie, die durch den Kreis hindurch gehen, sich im innern des Kreises (in S) dann und nur dann schneiden, wenn sie sich als Euklidische Grade, im innern des Kreises (in S') schneiden würden. –

V. Das Axiom des Archimedes.

Wir wollen dieses letzte unserer Axiome zuerst in drei verschiedenen Formen aussprechen.

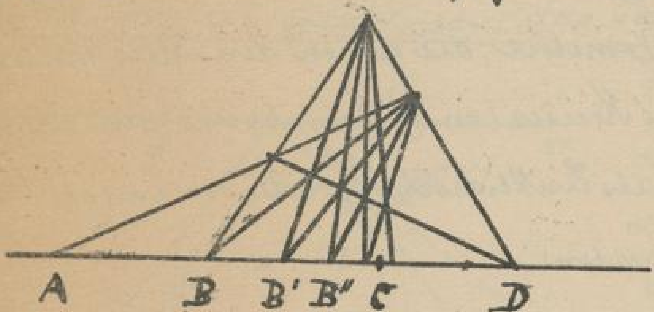
1. Archimedes selbst giebt es in folgender Form:
Liegt der Punkt B auf einer Graden zwischen A und C, und konstruieren wir die Punkte B', B'', B''', ... derart, dass die Reihenfolge A B B' B'' B''' ... gilt, und dass ferner

$AB = BB' = B'B'' \ldots\ldots$ ist, dann giebt es in der Reihe der Punkte $B', B'', B''' \ldots$ einen Punkt $B^{(n)}$ derart, dass C zwischen A und $B^{(n)}$ liegt.



In der Sprache der Streckenrechnung heisst das: Sind a, b irgend zwei Strecken, so kann man die ganze positive Zahl n stets so wählen, dass $na > b$ wird.

2. Etwas allgemeiner ist die projektive Fassung des Axioms: Es liege auf einer Graden B zwischen A und D, und C zwischen B und D; man konstruiere die Punkte $B', B'', \ldots$ derart, dass die Reihenfolge $A\,B\,B'\,B'' \ldots$ gilt und dass



$ABB'D$, $BB'B''D$, $B'B''B'''D, \ldots$ je vier harmonische Punkte sind. Dann giebt es in der Reihe der Punkte B einen Punkt $B^{(n)}$, welcher zwischen C und D liegt.

3. In gewisser Hinsicht noch allgemeiner ist die folgende Fassung: Wenn $B, B', B'', \ldots$ eine unendliche Reihe von Punkten einer Graden ist, und D ein weiterer Punkt dieser Graden, sodass die Reihenfolge $B\,B'\,B'' \ldots D$ gilt, so giebt es stets einen Punkt P, welcher folgende Eigenschaften besitzt: Sämtliche Punkte $B', B'', B''' \ldots$

liegen zwischen B und P; jeder andere Punkt P', für welchen

dasselbe gilt, liegt zwischen P und S.

In der Ausdrucksweise der Mengenlehre sagt dieser Satz die Existenz eines Grenzpunktes der unendlichen Punktmenge aus. Es ist kaum nötig, auf die Analogie dieses Satzes mit der Theorie der Dedekind'schen Schnitte hinzuweisen.

Die drei gegebenen Fassungen des Axioms sind nicht völlig gleichwertig; ~~wir werden darauf zurückkommen.~~

Wir bemerken noch, dass man das Axiom für den ganzen Raum hat, sobald es auf einer einzigen Graden gilt.

Wir haben nun wieder die Aufgabe, zu beweisen, dass unser neues Axiom von allen früheren unabhängig ist. Wir geben den Beweis ausführlich nur für die Ebene; die Ausdehnung auf den Raum ergiebt sich dann ganz von selbst.

Wir werden uns eine Geometrie konstruieren, in welcher alle Axiome I–IV gelten, das V. aber nicht. Zu diesem Zwecke betrachten wir den Funktionenkörper, der entsteht, wenn man zum Bereich der rationalen Zahlen eine reelle Veränderliche t adjungiert, mit andern Worten die Gesamtheit der Grössen, die sich aus 1 und t durch endlich oft angewandte Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division erzeugen lassen. Den so gewonnenen Funktionenbereich erweitern wir noch, indem wir jede Funktion von der Form $\sqrt{1+u^2}$ aufnehmen, wo u irgend eine bereits vorkommende Funktion ist. Die so definierte Gesamtheit (die übrigens eine abzählbare Menge bildet) wollen wir als eine Zahlenmannigfaltigkeit auffassen und demgemäss die einzelne Funktion $F(t)$ als Komplexe Zahl bezeichnen. Dieser Zahlbereich hat offenbar die Eigenschaft, dass man durch die vier Species und durch die Operation $\sqrt{1+u^2}$ nicht aus ihm hinauskommt.

Wir wollen zusehen, wie man mit diesen Zahlen rechnen kann. Seien α und β zwei solche Komplexen Zahlen. Der Sinn einer Gleichung $\alpha=\beta$ ist dann klar; dagegen müssen wir nun verabreden, was eine Ungleichung $\alpha>\beta$ bedeuten soll. Die α, β sind nach Definition algebraische Funktionen von t, und zwar reell für alle reellen t. Hieraus folgt, dass von einem gewissen t ab z. B. α sein Vorzeichen nicht mehr wechselt, d. h. entweder beständig positiv oder beständig negativ bleibt. Jenachdem für die Funktion $\alpha-\beta$ das erste oder das letzte der Fall ist, wollen wir $\alpha-\beta>0$ $(\alpha>\beta)$ oder $\alpha-\beta<0$ $(\alpha<\beta)$ setzen.

Es ist dann klar, dass für beliebiges α, β stets eine und nur eine der Beziehungen $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha < \beta$ gelten muss, (hierbei müssen wir noch eine Festsetzung über das Vorzeichen der Quadratwurzeln machen; wir wollen verabreden, dass alle Wurzeln positiv gerechnet werden sollen), ferner dass aus $\alpha > \beta$, $\beta > \gamma$ folgt $\alpha > \gamma$; dass $\alpha\beta$ nur dann $= 0$ sein kann, wenn mindestens ein Faktor verschwindet, etc. Kurz, unsere komplexen Zahlen verhalten sich so, wie reelle Zahlen im gewöhnlichen Sinne.

Hingegen gilt bei diesen Zahlen nicht das Archimedische Axiom. Betrachten wir z. B. die Zahlen 1 und t, so erkennen wir, dass es keine noch so grosse Zahl n giebt, sodass $n > t$ würde; denn nach Definition ist $0 < t - n$, da ja t eben selbst unbegrenzt wächst, während n fest ist.

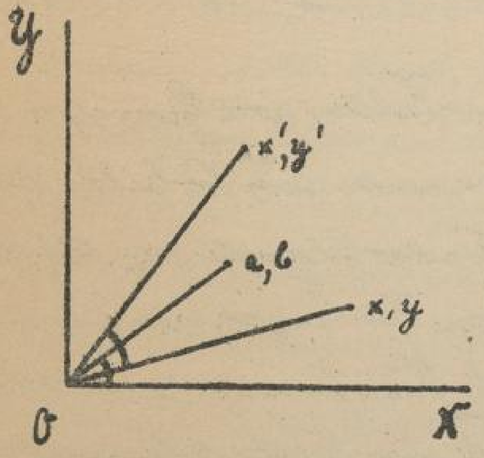
Um nun aus diesen Zahlen eine Geometrie aufzubauen, verfahren wir genau nach dem Vorbilde der analytischen Geometrie. [vgl. für das folgende pag. 65 ff. 118 ff.].

Sind x, y zwei komplexe Zahlen, so nennen wir das Zahlenpaar $\underline{x\,y}$ einen <u>Punkt</u>. Sind ferner u, v, w drei komplexe Zahlen, so soll <u>$u : v : w$ eine Grade</u> definieren. Die <u>vereinigte Lage von Punkt und Grade</u> sei charakterisiert

durch die Gleichung $\underline{ux + vy + w = 0}$.
Sind $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ Punkte einer Graden, so sagen wir, dass der zweite zwischen den beiden andern liegt, sobald $x_1 \gtrless x_2 \gtrless x_3$ ist; hieraus ergiebt sich dann durch Rechnung grade wie früher, dass auch $y_1 \gtrless y_2 \gtrless y_3$ ist. Ist $x_1 y_1$ irgend ein Punkt, so kann ich die beiden Seiten der Graden $u:v:w$ durch das Vorzeichen von $ux_1 + vy_1 + w$ charakterisieren. Kurz, alle Axiome I, II, und ebenso IV gelten.

Aber auch die Kongruenzaxiome gelten, wenn man folgende Festsetzungen macht; (hier tritt hervor, warum wir die Operation $\sqrt{1+u^2}$ einführen mussten).

Die Parallelverschiebung (das Streckenabtragen) sei definiert durch $x' = x + a$, $y' = y + b$. Unter der Entfernung zweier Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ verstehen wir den Ausdruck $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Die Drehung um einen Punkt, (das Abtragen von Winkeln) definieren wir durch die Formeln (die durch die Figur motiviert werden):



$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\, x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\, y$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\, x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\, y.$$

Die Ausführbarkeit der Operationen rechts folgt aus unsern Festsetzungen. Durch blosse Rechnung folgt dann, dass alle Kongruenzaxiome, insbesondere auch der 1. Kongruenzsatz für Dreiecke, gültig sind.

Das Archimedische Axiom gilt natürlich nicht. Betrachten wir z.B. die auf der Graden $y = 0$ liegenden Punkte $1, 0$ und $t, 0$; wie schon oben bemerkt, kann man dann durch Abtragen der Strecke 1 den Punkt $t, 0$ niemals erreichen, da für jedes n gilt: $t - n > n$. Auch der Satz, dass man durch fortgesetztes Halbieren einer Strecke einem Endpunkte beliebig nahe kommen kann, gilt hier nicht, wie die Ungleichung $\frac{1}{t} < \frac{1}{2^n}$ zeigt.

Hiermit ist die Unabhängigkeit des Axioms V von allen vorangehenden bewiesen, zunächst für die Ebene; die Übertragung auf den Raum liegt auf der Hand. –

Wir bemerken, dass auch nicht etwa das Parallelenaxiom eine Folge von I, II, III, V ist; das ergiebt sich einfach daraus, dass in den Beispielen von Geometrieen ohne Parallelenaxiom [p. 82–99] das Axiom V gilt. –

Es möge hier noch eine allgemeine Bemerkung über den Charakter unserer Axiome I–V Platz finden. Die Axiome I–III sprechen sehr einfache, man könnte sagen ursprüngliche, Thatsachen aus; ihre Gültigkeit in der

Natur lässt sich durch das Experiment leicht nachweisen. Hingegen ist die Gültigkeit der Axiome IV, V nicht so unmittelbar einleuchtend; ihre experimentelle Bestätigung erfordert eine grössere Zahl von Versuchen. –

Zum Schluss wollen wir noch einen Einblick gewinnen in die Beziehungen, die zwischen den Sätzen von Desargues, von Pascal und dem Axiom des Archimedes bestehen. Zunächst bemerken wir, dass wir im folgenden die Kongruenzaxiome III ein für alle mal ausschalten wollen; denn mit ihrer Hülfe ist der Desargues wie der Pascal auf Grund der ebenen Axiome I, II beweisbar. Dagegen wollen wir das IV. Axiom hinzunehmen; das wäre allerdings nicht nötig, doch vereinfacht es die Untersuchungen sehr bedeutend.

Wir wissen, dass der Desargues unbeweisbar ist aus den ebenen Axiomen I, II und aus IV [p. 138]; er bleibt unbeweisbar, wenn man V hinzunimmt; denn in der pag. 138 ff. konstruierten Geometrie gilt ersichtlich das V. Axiom, und zwar in der 3. Fassung. Der Pascal verhält sich ganz anders; wir behaupten:

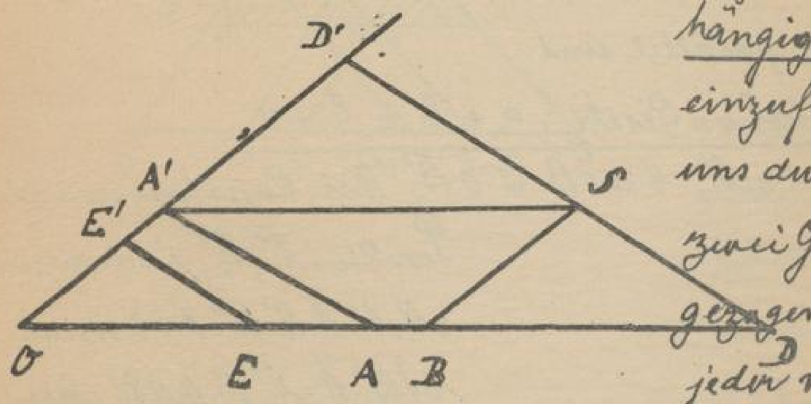
1.) Der Pascal ist beweisbar auf Grund der Axiome I, II, IV, V (wo man die räumlichen Axiome I, II durch den Desargues ersetzen kann).

2.) Der Pascal ist nicht beweisbar, wenn man V. weglässt, d.h. allein auf Grund der Axiome I, II, IV.

Diese Sätze werden wir beweisen und dabei ihren inneren Grund deutlich erkennen.

Dass der Pascal sich aus I, II, IV, V beweisen lassen muss, folgt schon daraus, dass man ihn in der projektiven Geometrie beweist, zu deren Voraussetzungen die Stetigkeit, d.h. das V. Axiom, gehört.

Unsere erste Aufgabe soll sein, eine neue von den Kongruenzaxiomen unabhängige Streckenrechnung einzuführen. Wir denken uns durch einen Punkt O zwei Graden Ox und Oy gezogen und nehmen auf jeder von ihnen einen Punkt an, E und E'.



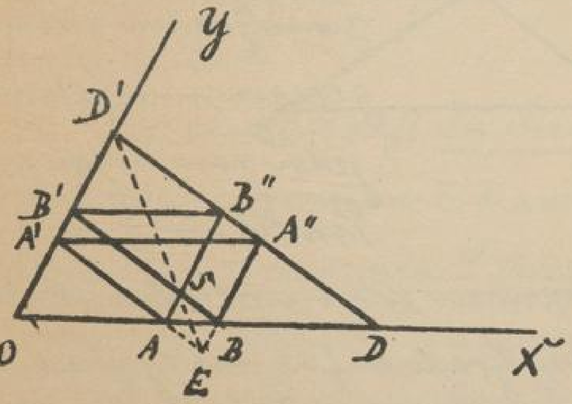
Jede der Strecken OE und E' nennen wir 1 und setzen überhaupt fest, dass jede zu EE' parallele Grade auf Ox und Oy gleiche Strecken abschneiden soll. Um nun die Summe $a + b$ zweier Strecken $a = OA$, $b = OB$ zu definieren, ziehe ich AA' parallel zu EE', ferner durch B eine Parallele zu Oy, durch A' eine Parallele zu Ox. Diese beiden mögen sich in S schneiden.

Dann ziehe ich durch S eine Parallele DD' zu EE'; jede der Strecken OD, OD' nenne ich die <u>Summe</u> $a + b$. Durch diese Festsetzung ist das Streckenabtragen definiert, natürlich nur auf den Graden OX und OY; mehr brauchen wir aber auch nicht, wie sich zeigen wird.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die soeben definierte Addition sowohl das kommutative als auch das assoziative Gesetz befolgt; bei diesem Beweise müssen wir uns lediglich auf den Satz von Desargues stützen, von dem übrigens nur der spezielle Fall hier vorkommt, in welchem die Seiten der Dreiecke paarweise parallel sind.

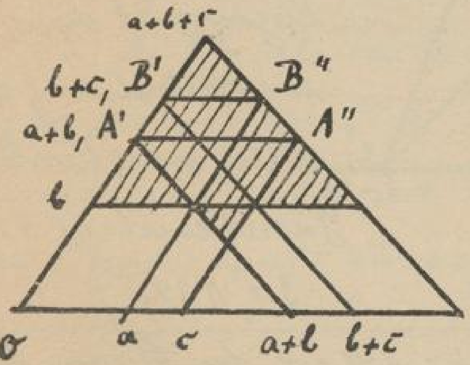
1) <u>Das kommutative Gesetz</u>: $a + b = b + a$.

Es sei $a = OA = OA'$, $b = OB = OB'$. Wir konstruieren die Punkte A'', B'', indem wir $A'A'' \parallel B'B'' \parallel OX$ und $AB'' \parallel A''B \parallel OY$ ziehen; dann verlangt unser Satz, dass $A''B'' \parallel AA'$ ist. Oder, anders gewandt: Wenn im $\triangle ODD'$ ist: $AA' \parallel BB' \parallel DD'$, $AB'' \parallel A''B \parallel OD'$, $A'A'' \parallel OD$,



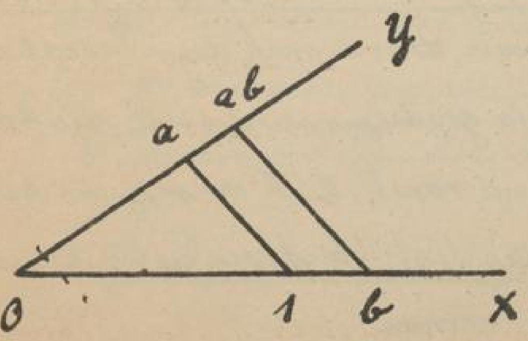
dann ist auch $B'B'' \parallel A'A''$. Diesen Satz beweisen wir so: Wir verlängern AA' und $A''B$ bis zum Schnitt in E. Nach Voraussetzung sind in den Dreiecken $A'A''D$ und ABS die Seiten paarweise parallel; Daraus ergiebt sich mit Hülfe des Desargues, dass D, S, E auf einer Graden liegen. Demnach sind die Dreiecke $A'A''E$ und $B'B''S$ perspektiv, woraus sich die Parallelität von $A'A''$ und $B'B''$ ergiebt.

<u>2.)</u> <u>Das assoziative Gesetz $(a+b)+c = a+(b+c)$</u> führt auf die folgende ohne weiteres verständliche Figur.



Zu beweisen ist die Parallelität von $A'A''$ und $B'B''$. Dieser Beweis reduziert sich sofort auf den vorigen, denn der schraffierte Teil der Figur ist identisch mit der zu $a+b = b+a$ gehörigen Figur.–

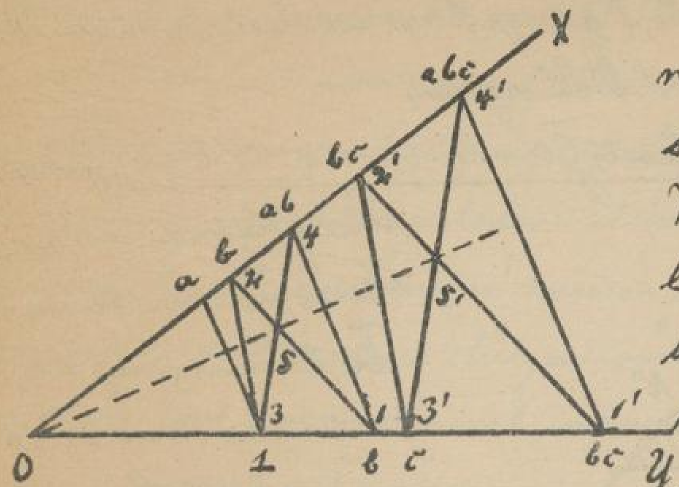
<u>Das Produkt ab zweier Strecken</u> definieren wir jetzt, analog der früheren Definition [p. 113] folgendermassen: Man trage auf OX die Strecken 1 und b, auf OY die Strecke a ab, verbinde 1 mit a und ziehe durch b die Parallele zu $1a$; diese



schneidet auf OY die Strecke $a\,b$ ab.

<u>Dies Produkt folgt dem assoziativen Gesetz:</u>

$$a(bc) = (ab)c.$$



Zum Beweise dient die nebenstehende Figur, die sich so beschreiben lässt: Zwei Vierecke 1234 und $1'2'3'4'$ liegen mit ihren Ecken abwechselnd auf den Schenkeln eines Winkels XOY, und es ist: $1'2' \parallel 12$, $2'3' \parallel 23$, $3'4' \parallel 34$,

zu beweisen ist, dass auch $4'1' \parallel 41$ ist. Den Beweis führen wir wieder mit Hülfe des Desargues. In den Dreiecken $23S$ und $2'3'S'$ sind die Seiten paarweise parallel; dann ergiebt sich, dass O, S, S' auf einer Graden liegen. Folglich liegen die Dreiecke $14S$ und $1'4'S'$ perspektiv, woraus dann $4'1' \parallel 41$ folgt.

<u>Das kommutative Gesetz $ab = ba$ lassen wir bei Seite</u>, denn von früher her wissen wir, dass es mit dem Pascal'schen Satz identisch ist, und es ist ja grade unser Zweck, die Unbeweisbarkeit des Pascal auf Grund von I, II, IV nachzuweisen.—

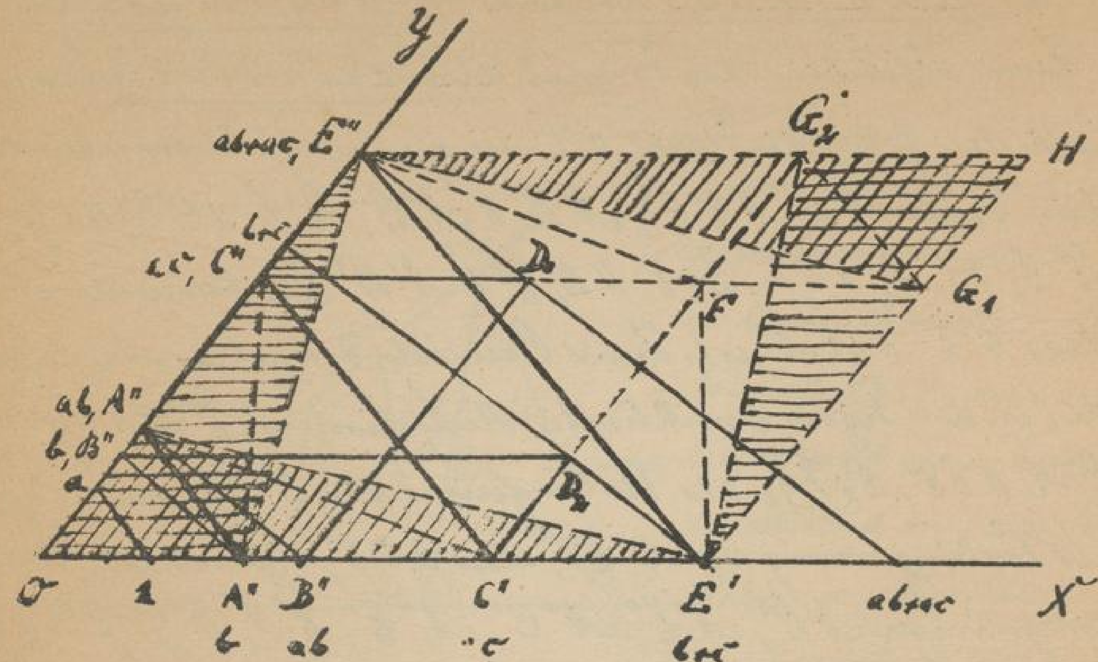
Hingegen wollen wir <u>das distributive Gesetz</u> beweisen und zwar in den beiden Formen:

α) $a(b+c) = ab + ac$ und β) $(a+b)c = ac + bc$.

α) Zum Beweise der Formel $a(b+c) = ab+ac$ brauchen wir die folgende Figur, die wir zunächst beschreiben wollen. Es ist $A'A'' \parallel C'C''$, $A'B'' \parallel A''B'$, $B'D_1 \parallel C'D_2 \parallel OY$, $B''D_2 \parallel C''D_1 \parallel OX$, $D_2E' \parallel D_1E'' \parallel A'B''$. Zu beweisen ist, dass $E'E'' \parallel A'A''$ ist. Zum Beweise brauchen wir folgende (in der Figur punktierte) Hülfslinien: $E'H \parallel OY$, $E''H \parallel OX$, D_2FG_2 als Verlängerung von $C'D_2$, also $\parallel OY$, D_1FG_1 als Verlängerung von $C''D_1$, also $\parallel OX$, endlich die Verbindungslinien $A'C''$, $A'E''$, $A''C'$, $A''E'$; $E''F$, $E''G_1$, $E'F$, $E'G_2$, G_1G_2.

Der Beweis läuft darauf hinaus zunächst zu zeigen, daß die schraffierten Dreiecke zu je zweien perspektiv liegen, nämlich $OA'E''$ und HG_2E' einerseits, $OA''E'$ und HG_1E'' andrerseits.

1) Da $A'E' \parallel B''D_2 \parallel C''F$ ist, so liegen die Dreiecke $A'B''C''$ und $E'D_2F$ perspektiv; also ist $A'C'' \parallel E'F$. Also ist, da auch die Dreiecke $A'C''E''$ und $E'FG_2$ perspektiv liegen, $A'E'' \parallel E'G_2$. Also sind in den Dreiecken $OA'E''$ und HG_2E' die Seiten paarweise parallel; also schneiden sich OH, $A'G_2$, $E''E'$ in einem Punkte S.

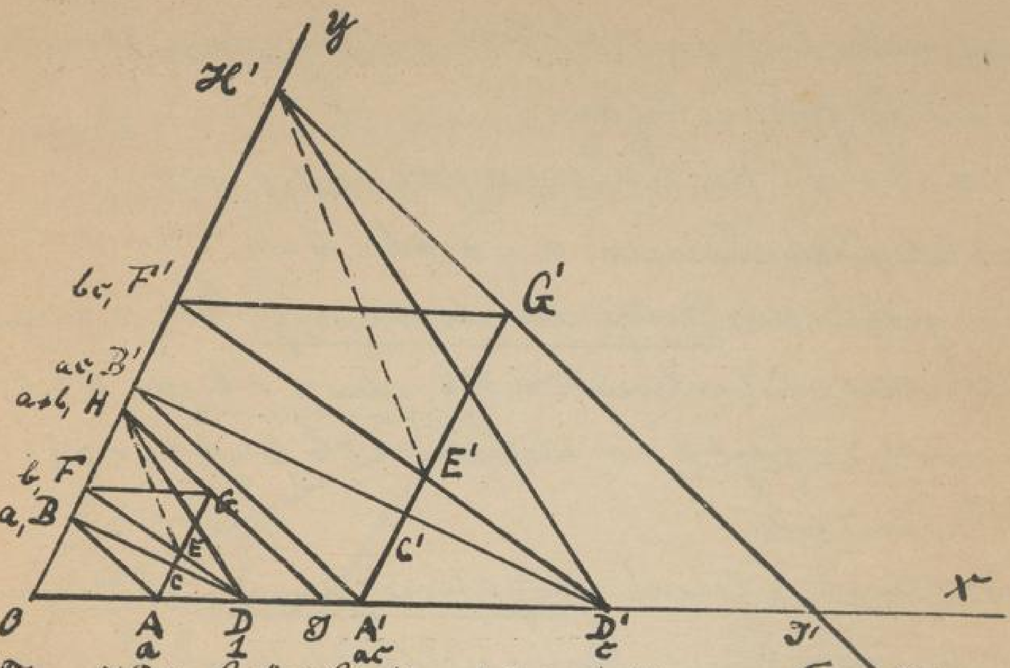


2.) Ebenso findet man, dass die Dreiecke $0A''E'$ und HG_1E'' die Seiten paarweise parallel haben, dass also auch $0H$, $A''G_1$, $E'E''$ sich in einem Punkte, also auch in Schneiden müssen.

3.) Hieraus folgt, dass die Dreiecke $0A''A''$ und HG_2G_1 perspektiv liegen; also ist $G_1G_2 \parallel A'A''$.

4.) Endlich betrachten wir die Figur $C'C''G_1E'E''G_2C'$; aus ihr ergiebt sich, [cf. den Beweis von $a+b = b+a$] dass $E'E'' \parallel C'C''$, also auch $\parallel A'A''$ ist, q. e. d.

- $\underline{B)}$ Beim Beweise von $\underline{(a+b)c = ac+bc}$ kommt man auf die folgende Figur. In ihr ist $AB \parallel HF \parallel A'B' \parallel H'F'$,



$JF \parallel J'F'$, $BJ \parallel B'J'$ $AG \parallel A'G' \parallel OY$, $FG \parallel F'G' \parallel OX$. zu beweisen ist: $DH \parallel D'H'$. Wir ziehen die Hülfslinien EH und $E'H'$ und finden: 1) $\Delta\, ABC$ und $\Delta\, A'B'C'$ haben paarweis parallele Seiten, also ist OCC' eine Grade. 2) Dann folgt aus $\Delta\, CJE$ und $\Delta\, C'J'E'$, dass OEE' eine Grade ist. 3.) Aus $\Delta\, EFG$ und $\Delta\, E'F'G'$ folgt, dass OGG' eine Grade ist. 4.) Aus der perspektiven Lage von $\Delta\, EGH$ und $\Delta\, E'G'H'$ folgt, dass $EH \parallel E'H'$ ist. 5) Endlich folgt aus der perspektiven Lage von $\Delta\, DEH$ und $\Delta\, D'E'H'$, dass $DH \parallel D'H'$ ist, q.e.d.

In der von uns allein auf Grund der Axiome I, II, IV eingeführten Streckenrechnung gelten also die gewöhnlichen formalen Rechnungsregeln, ausgenommen das kommutative Gesetz der Multiplikation. Ferner existiren die Strecken 0 und 1.

unter 0 verstehen wir naturgemäss eine Strecke mit zusammenfallenden Endpunkten. Ist a eine beliebige Strecke, so gelten die folgenden Regeln:

$$a + 0 = a; \quad 1.a = a.1 = a, \quad 0.a = a.0 = 0.$$

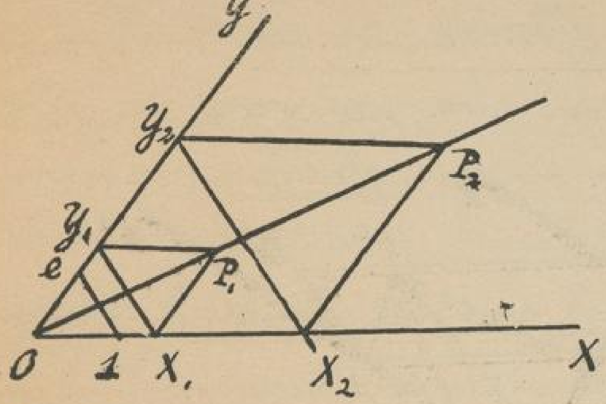
Aus $ab = 0$ folgt entweder $a = 0$ oder $b = 0$.

Ferner gelten die Gesetze der Anordnung: Sind a, b irgend zwei Strecken, so ist entweder $a > b$, oder $a = b$, oder $a < b$. Aus $a > b$, $b > c$ folgt $a > c$ etc. Aus $a > b$ folgt $a + c > b + c$, $ac > bc$, $ca > cb$.

Weiter ist es leicht, „negative" Strecken einzuführen, d.h. solche, die < 0 sind. Dann giebt es stets eine und nur eine Strecke x, sodass $a + x = b$ wird; wir setzen $x = b - a$, und es ist also die Subtraktion von Strecken „unbeschränkt" und eindeutig ausführbar. Ähnliches gilt von der Division. Man zeigt zunächst, dass die Gleichungen $ax = 1$ und $xa = 1$ stets eine einzige Lösung haben (ausser wenn $a = 0$ ist) und zwar beide dieselbe, die wir mit a^{-1} bezeichnen wollen. Dann sind ersichtlich die Gleichungen $ax = b$ und $xa = b$ stets auf eine einzige Weise lösbar; ihre Wurzeln sind $x = a^{-1}b$ und $x = ba^{-1}$.

Wir wollen noch die Gleichung der Graden aufstellen. Jeden Punkt P der Ebene denken wir uns bestimmt durch die Strecken x, y, welche die zu $0X$ und $0Y$ durch P gezogenen

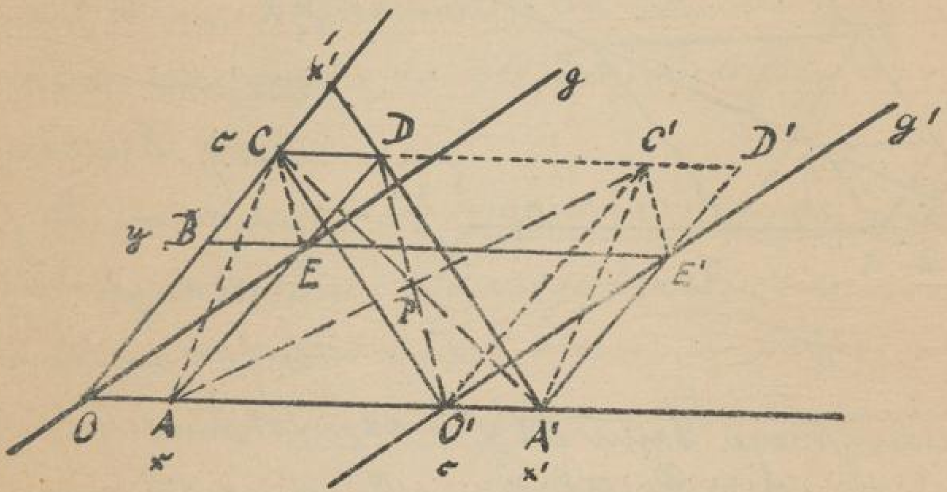
Graden auf den Achsen abschneiden. Es handelt sich darum, eine Beziehung zwischen x und y aufzustellen, die für jeden Punkt x, y einer bestimmten Graden gilt. Betrachten wir zunächst eine durch O gehende Grade. Sei $P_1(x_1 y_1)$ ein Punkt auf ihr; wir ziehen durch P_1 die Parallelen P_1X_1 und P_1Y_1 zu den Achsen und verbinden X_1 mit Y_1. Endlich ziehen wir durch 1 auf OX die Parallele zu X_1Y_1, die auf OY die Strecke e abschneiden möge.



Dann ist $y_1 = e x_1$. Ist nun $P_2(x_2 y_2)$ irgend ein anderer Punkt unserer Graden, so ist nach dem Desargues $X_2Y_2 \parallel X_1Y_1$, folglich $y_2 = e x_2$.

Demnach ist $y = e x$ die Gleichung unserer Graden, wofür wir allgemeiner $a x + b y = 0$ schreiben können.

Wir kommen nun zu dem allgemeineren Fall, dass unsere Grade g' nicht durch O geht, sondern etwa durch einen Punkt O' der x-Achse; es sei $OO' = c$. Wir ziehen dann durch O die Parallele g zu g', und beweisen nun, dass, im Sinne unserer Streckenrechnung, g' aus g durch Parallelverschiebung hervorgeht, d.h. dass die zu gleichen y gehörenden x beider Graden sich um c unterscheiden. Dazu brauchen wir die folgende Figur, in welcher $A'D \parallel O'C$ zu beweisen ist. Wir ziehen als Hülfslinien DD' als Verlängerung von CD, $E'D'$ als Verlängerung von $A'E'$, $O'C' \parallel OY$, AC, $A'C'$, CE, $C'E'$.



Dann liegen 1) $\Delta\, OCE$ und $\Delta\, O'C'E'$ perspektiv, also ist $CE \parallel C'E'$; da 2) $\Delta\, ACE$ und $\Delta\, A'C'E'$ perspektiv liegen, ist $AC \parallel A'C'$. Folglich haben 3) $\Delta\, ACD$ und $\Delta\, C'A'O'$ die Seiten paarweise parallel, sie liegen also perspektiv, d. h. AC', CA', DO' gehen durch einen Punkt P. Also liegen 4) $\Delta\, ACO'$ und $\Delta\, C'A'D$ perspektiv, also ist $CO' \parallel A'D$, q. e. d.

Nun können wir leicht die Gleichung der Graden g' finden. Sind x', y' die Koordinaten eines ihrer Punkte, x, y'

die Koordinaten des entsprechenden Punktes von g, so ist nach dem eben bewiesenen Satze stets $x' = x + c$. Die Gleichung von g lautet $ax + by = 0$; demnach ist die Gleichung von g' $a(x - c) + by = 0$, oder wenn $-ac$ mit c bezeichnet wird: $ax + by + c = 0$.

Wir haben also den Satz: *Bei unserer Streckenrechnung wird jede Grade durch eine lineare Gleichung in x und y, bei welcher die Koeffizienten vor den Variabeln stehen, dargestellt.* Und man sieht leicht: *Umgekehrt stellt jede Gleichung von solcher Beschaffenheit eine Grade dar.*

Die Angabe, dass die Koeffizienten vor den Variabeln stehen, ist notwendig, weil wir ja das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht haben. Es lässt sich leicht zeigen, dass eine Gleichung von der Form $xa' + yb' + c' = 0$ im allgemeinen keine Grade darstellt. Im entgegengesetzten Falle nämlich wäre diese Grade wie eben bewiesen auch durch eine Gleichung $ax + by + c = 0$ darstellbar, beide Gleichungen müssten also genau dieselben Streckenpaare x, y liefern. Bringen wir also (durch rechtsseitige bezw. linksseitige Multiplikation mit a'^{-1} bezw. a^{-1}) die Gleichungen auf die Form $x = yB' + C'$, $x = By + C$, so müsste für jedes y gelten: $yB' + C' = By + C$. Für $y = 0$ kommt $C = C'$, für $y = 1$ kommt dann $B = B'$; d.h. es wäre für jedes y: $yB = By$. Das ist aber nicht der Fall, da wir eben das kommutative Gesetz der Multiplikation nicht haben. –

Wir können nun umgekehrt zeigen: Wenn eine Streckenrechnung von der vorher gekennzeichneten Art gegeben ist, so lassen sich aus ihr die sämtlichen ebenen Axiome I und II, sowie der Satz von Desargues ableiten.

Wir wollen den Beweis nur für das Axiom II, 5 ausführen, welches von der Teilung der Ebene durch eine Grade handelt; wir verfahren analog pag. 121.

Es sei $ax + by + c = 0$ die Gleichung einer Graden g. Wir rechnen einen Punkt x, y der Ebene zur einen oder andern Seite der Graden g, je nachdem $ax + by + c > 0$ oder < 0 ist. Seien $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ Punkte derart, dass:

$$ax_1 + by_1 + c < 0, \quad ax_2 + by_2 + c > 0 \text{ ist.}$$

Die Gleichung ihrer Verbindungsgraden G sei $Ax + By + C = 0$, sodass also: $Ax_1 + By_1 + C = 0$, $Ax_2 + By_2 + C = 0$ ist.

Wir wollen zeigen, dass G und g sich in einem Punkte $x_3 y_3$ schneiden, der auf G zwischen $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ liegt, d.h. dass $x_1 \gtrless x_3 \gtrless x_2$ ist. Durch linksseitige Multiplikation mit b^{-1} bzw. B^{-1} erhalten wir:

$$b^{-1}ax_1 + y_1 < -b^{-1}c < b^{-1}ax_2 + y_2 \text{ und:}$$

$$B^{-1}Ax_1 + y_1 = -B^{-1}C = B^{-1}Ax_2 + y_2; \text{ also:}$$

$$(B^{-1}A - b^{-1}a)x_3 = b^{-1}c - B^{-1}C.$$

Also wird die obige Ungleichung:

$$(B^{-1}A - b^{-1}a)x_1 > (B^{-1}A - b^{-1}a)x_3 > (B^{-1}A - b^{-1}a)x_2,$$

also: $\qquad x_1 \gtrless x_3 \gtrless x_2$. —

NB. Wir haben beim Beweis stillschweigend angenommen, dass gewisse Strecken $\neq 0$ sind; das ist natürlich für den Satz selbst unwesentlich.

Mit Hülfe dieser Resultate können wir nun vorerst eine Frage erledigen, die wir früher (pag. 32) offen lassen mussten; wir wollen nämlich zeigen: *Der Satz von Desargues ist die hinreichende Bedingung dafür, dass die Ebene als ein Stück des Raumes angesehen werden kann.* In der That, wir haben eben gesehen, dass auf Grund des Desargues jede Grade sich darstellen lässt durch $ax + by + c = 0$, und dass umgekehrt aus dieser Darstellung der Desargues folgt. Nun ist es leicht, einen Raum, d. h. ein System von Punkten, Graden, Ebenen, die sämtliche Axiome I, II erfüllen, anzugeben, von welchem die xy = Ebene ein Stück ist. Als Punkte dieses Raumes nehmen wir alle Streckentripel xyz, als Ebenen die Inbegriffe von Punkten, die einer linearen Gleichung $ax + by + cz + d = 0$ genügen, als Graden die Punktmannigfaltigkeiten, die in zwei Ebenen zugleich liegen, die also den Gleichungen $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ gleichzeitig genügen. Hiermit ist denn, bei Heranziehung des Satzes pag. 28 gezeigt: *Die sämtlichen Axiome I, II sind* aequivalent den ebenen Axiomen I, II und dem Desargues.

Nach all diesen Vorbereitungen können wir jetzt an die Frage der Beweisbarkeit des Pascal'schen Satzes gehen. Wir haben auf Grund der Axiome I und II eine Strecken-rechnung aufgebaut, in welcher die Gesetze der gewöhnlichen reellen Zahlen gelten, bis auf das kommutative Gesetz der Multiplikation und das Axiom des Archimedes. Wir wissen ferner, dass der Pascal aus $ab = ba$ folgt, und umgekehrt. Wir sehen also, dass der Pascal allein auf Grund der Axiome I und II dann und nur dann beweisbar ist, wenn bei Ausschluss des Archimedischen Axioms, das kommutative Gesetz der Multiplikation eine Folge der übrigen Rechnungsgesetze ist; dass ferner der Pascal aus I, II und V dann beweisbar ist, wenn $ab = ba$ eine Folge aller übrigen Rechnungsgesetze, einschliesslich des Archimedischen Axioms ist. Wir werden zeigen, dass der zweite Satz richtig ist, der erste nicht.

Unsere Untersuchung hat uns auf die Grundgesetze der Arithmetik geführt. Wir wollen daher jetzt zunächst definieren, wann wir ein System von Dingen $a, b, c, \ldots$ als komplexe Zahlen im allgemeinsten Sinne bezeichnen wollen; wir wollen folgendes verlangen:

I. a) Aus irgend zwei Dingen a, b soll sich eindeutig ein drittes c finden lassen, was wir durch $a + b = c$ ausdrücken wollen. Diese Operation heisse <u>Addition</u>; gleiches zu gleichem addiert soll gleiches ergeben; aus $a = b$, $b = c$ soll $a = c$ folgen.

I b) Es soll stets möglich sein, auf eine einzige Weise x, y so zu bestimmen, dass $x + a = b$, $a + y = b$ wird. Hierzu fügen wir die Forderung der <u>Existenz der Null</u>, d. h. einer Zahl 0, die bei beliebigem a die Gleichungen erfüllt:

$a + 0 = a$, $0 + a = a$.

II. a) Neben der Addition soll es noch eine zweite Weise geben, aus zwei Zahlen a, b eindeutig eine dritte c zu finden: $ab = c$. Auch für diese Operation (<u>Multiplikation</u>) soll gelten: aus $a = b$ folgt $ac = bc$, $ca = cd$.

II b) Es soll stets möglich sein, x und y eindeutig zu bestimmen aus $ax = b$, $ya = b$, ausser wenn $a = 0$ ist. Dazu kommt die Forderung der <u>Existenz der eins</u>, für welche bei beliebigem a gelten soll $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Ferner sei $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Die genannten Eigenschaften dienen wie gesagt zur Definition des Begriffs „komplexe Zahl." In speziellen Fällen können bei komplexen Zahlen noch <u>weitere Gesetze</u> gelten, die wir kurz aufzählen wollen.

1) <u>Gesetze der Anordnung</u>.

Zwischen irgend zwei Zahlen a, b besteht eine, und nur eine der Beziehungen: $a > b$, $a = b$, $a < b$. Aus $a > b$, $b > c$ folgt $a > c$; Aus $a > b$ folgt $a + c > b + c$, $c + a > c + b$,

$ac > bc$, $ca > cb$ u. s. w. Hier lassen sich die Begriffe „positive" und „negative Zahl" einführen; wir nennen a positiv oder negativ, je nachdem $a > 0$ oder $a < 0$ ist.

2.) Die formalen Rechnungsregeln.

α) Addition: $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$.

β) Multiplikation: $ab = ba$, $a(bc) = (ab)c$.

γ) Distributives Gesetz für Addition und Multiplikation: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$.

Auf Grund der Existenz der 1 und der formalen Rechnungsregeln ergiebt sich die Existenz der ganzen Zahlen: $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 1 = 3$, ... Wir bemerken, dass für ganze Zahlen m, n und beliebiges a die kommutativen Gesetze $mn = nm$, $ma = am$ bewiesen werden können, sobald die übrigen formalen Rechnungsregeln gelten. Näher können wir hier auf diese Fragen nicht eingehen.

3) Das Archimedische Axiom.

Ist $0 < a < b$, so lässt sich stets mit Hülfe einer endlichen Anzahl von Summanden erreichen, dass $a + a + a + a + \cdots > b$ wird. –

Wenn alle Eigenschaften 1) – 3) gelten, haben wir das System der gewöhnlichen reellen Zahlen vor uns.

Man kann sich ganz allgemein die Frage vorlegen, wie die genannten Gesetze unter einander zusammenhängen. In unserm Falle – wir wollen ja die beiden

Sätze pag. 146/147 beweisen – haben wir nur folgendes zu zeigen:

1.) $ab = ba$ ist eine Folge aller übrigen Gesetze mit Einschluss des Archimedischen Axioms.

2.) $ab = ba$ folgt nicht aus den übrigen Gesetzen, wenn man das Archimedische Axiom fortlässt.

1) Bemerken wir zunächst noch, dass die Forderung, „n stets so bestimmen zu können, dass $na > b$ wird, im Sinne unserer Streckenrechnung genommen, genau die projektive Fassung des Archimedischen Axioms ist; es lässt sich nämlich leicht zeigen, dass $0, a, 2a, \infty$ etc. vier harmonische Punkte sind. –

Nehmen wir nun an, es sei $a > 0$, $b > 0$ und $ab - ba = d > 0$. Wir wählen eine positive Zahl $\varepsilon < 1$, die ausserdem $< \frac{d}{a+b+1}$ ist. Nach dem Archimedischen Axiom kann man zwei ganze Zahlen m, n so finden, dass $m\varepsilon < a \leqq (m+1)\varepsilon$, $n\varepsilon < b \leqq (n+1)\varepsilon$ ist.

Durch Multiplikation folgt:

$$ab \leqq (m+1)\varepsilon(n+1)\varepsilon, \quad ba > n\varepsilon\, m\varepsilon,$$

oder, da für die ganzen Zahlen das kommutative Gesetz gilt:

$$ab \leqq mn\varepsilon^2 + (m+n+1)\varepsilon^2$$
$$ba > mn\varepsilon^2.$$

Also: $$d \leqq (m+n+1)\varepsilon^2 = (m\varepsilon + n\varepsilon + \varepsilon)\varepsilon,$$

also auch $< (a+b+1)\varepsilon$, d. h.

$$\varepsilon > \frac{d}{a+b+1},$$

was unserer Annahme widerspricht. Damit ist 1) bewiesen.

2.) Um die zweite Behauptung zu beweisen, haben wir ein System komplexer Zahlen anzugeben, in welchem alle vorher aufgezählten Gesetze gelten, ausgenommen das Archimedische Axiom und das kommutative Gesetz der Multiplikation. Ein solches System bilden wir uns folgendermassen: Es seien s, t zwei Parameter, für welche das Gesetz $ts = 2st$ gilt, mit denen aber im übrigen nach den gewöhnlichen Regeln gerechnet werden soll. Als komplexe Zahl bezeichnen wir jeden Ausdruck der Form $Z = \sum_{\sigma,\tau}^{\infty} r_{\sigma\tau}\, s^{\sigma} t^{\tau}$ (wo die $r_{\sigma\tau}$ irgend welche reelle, die σ, τ positive oder negative ganze Zahlen bedeuten), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Unter allen vorkommenden σ giebt es ein kleinstes, σ_0; unter allen mit einem gegebenen s^{σ} multiplizierten t^{τ} giebt es eine niedrigste Potenz; diese sei für s^{σ_0} speziell $= t^{\tau_0}$, der zugehörige Zahlenkoeffizient sei r_0. Dann lässt sich, wie leicht zu sehen, Z auf die Form bringen:

$$Z = r_0\, s^{\sigma_0} t^{\tau_0} \{ 1 + t\,\mathfrak{P}(t) + s\,t^{-\tau_1} \cdot \mathfrak{P}_1(t) + s^2 t^{-\tau_2} \cdot \mathfrak{P}_2(t) + \dots \}$$

Hierin sind $\mathfrak{P}(t), \mathfrak{P}_1(t), \mathfrak{P}_2(t) \dots$ Reihen, die nach ganzen positiven Potenzen von t fortschreiten, die τ_i sind $\geqq 0$, und endlich für jedes endliche i; σ_0, τ_0 sind positiv oder negativ, alle Zahlkoeffizienten reell. Auf die Konvergenz der unendlichen Reihen kommt es gar nicht an. –

Um die Gesetze der Anordnung gültig zu machen, definieren wir die Beziehungen „grösser", „kleiner" wie folgt.

Sind zwei Zahlen $A = r s^{\sigma} t^{\tau}$, $A' = r' s^{\sigma'} t^{\tau'}$ gegeben, so setzen wir $A > A'$, wenn entweder $\sigma < \sigma'$, oder $\sigma = \sigma'$, $\tau < \tau'$, oder $\sigma = \sigma'$, $\tau = \tau'$, $r > r'$ ist. Dann besitzt, wenn Z, Z' irgend zwei verschiedene Zahlen sind, die Differenz $Z - Z'$ ein nach dieser Definition grösstes Glied A; wir setzen $Z > Z'$, sobald $A > 0$ ist. Analog wird der Begriff „kleiner" definiert.

Man erkennt, dass auf Grund dieser Definitionen die Gesetze der Anordnung gelten.

Dass Addition, Subtraktion, Multiplikation stets ausführbar sind, ist klar; nur für die <u>Division</u> muss dies näher erörtert werden. Es genügt offenbar zu zeigen, dass der Ausdruck $(1 + t\,\mathfrak{p}(t) + s t^{-\tau_1} \mathfrak{p}_1(t) + \dots)^{-1} = (1 - R)^{-1} = 1 + R + R^2 + R$ wieder eine Zahl des Bereiches ist. 1) Da in R nur positive Potenzen von s vorkommen, so gilt dasselbe von $1 + R + R^2 + \dots$ 2) Für die mit s^m multiplizierten Glieder kommen von R nur die ersten Glieder bis $s^m t^{-\tau_m} \mathfrak{p}_m(t)$ in Betracht. Ist $-T_m$ die kleinste der Zahlen $-\tau_1, -\tau_2 \dots -\tau_m$, so ist der niedrigste Exponent von t, der, von R^k herrührend, im Koeffizienten von s^m auftritt, jedenfalls $> k - m(T_m + 1)$, also positiv, sobald $k > m(T_m + 1)$ ist. Also, da $m(T_m + 1)$ eine endliche Anzahl ist, giebt es unter den mit s^m multiplizierten Potenzen von t stets eine mit kleinsten Exponenten. 3.) Es ist noch zu zeigen, dass zu gegebenem $s^m t^n$ ein endlicher Zahlkoeffizient r_{mn} gehört. Nun kommt für die Berechnung dieses Koeffizienten nur eine endliche Anzahl von Potenzen von R in Betracht, die nämlich, deren Exponent $< m(T_m+1)+n$ ist; aus jeder Potenz von R nur eine endliche Anzahl von Gliedern $s^i t^{-T_i} P_i(t)$, aus jedem $P_i(t)$ höchstens die $n+T_i$-ersten Glieder. Also ist τ_{mn} endlich. – Damit sind für unser Zahlensystem alle erforderlichen Eigenschaften bewiesen; $Z \cdot Z' = Z' \cdot Z$ gilt natürlich nicht, ebensowenig das Archimedische Axiom. q. e. d. –

Auf Grund des Archimedischen Axioms kann nun die Einführung der Zahl in die Geometrie erfolgen.

Seien etwa auf einer Graden die Punkte 0, 1 und ein beliebiger Punkt P gegeben. Dann lässt sich nach dem Archimedischen Axiom n so angeben, dass P zwischen n und $n+1$ liegt. Durch fortgesetztes Halbieren der Strecke $n, n+1$ lässt sich dann ein im allgemeinen ins unendliche verlaufender Dualbruch angeben, der als Repräsentant der Strecke $0P$ dienen kann. Auf diese Weise wird jedem Punkt P der Graden eine ganz bestimmte reelle Zahl zugeordnet; jeder Zahl entspricht höchstens ein Punkt der Graden. –

Dass auch wirklich jeder reellen Zahl ein Punkt der Graden entspricht, folgt aus unsern Axiomen nicht. Man kann es aber erreichen durch Einführung von idealen (irrationalen) Punkten (Cantor'sches Axiom III.). Es lässt sich zeigen, dass diese idealen Punkte den sämtlichen Axiomen I–V genügen; es ist daher gleichgültig, ob wir sie erst hier oder schon an einer früheren Stelle einführen wollen. Die Frage, ob diese idealen Punkte wirklich „existieren", ist aus dem genannten Grunde völlig müssig; für unsere erfahrungsmässige Kenntniss von den räumlichen Eigenschaften der Dinge sind die irrationalen Punkte nicht nothwendig. Ihr Nutzen ist lediglich ein methodischer; erst mit ihrer Hülfe ist es möglich, die analytische Geometrie in ihrer vollen Ausdehnung zu entwickeln. –

Hiermit sind wir am Ziel unserer Untersuchung angelangt. Wir können jetzt mit wenigen Worten die Frage nach der Verträglichkeit der Axiome I–V erledigen, anders ausgedrückt, die Frage nach der Existenz der Euklidischen Geometrie. Nach Einführung der analytischen Geometrie ist ja diese Frage der Arithmetik zugewiesen, und wir können sagen: Die Euklidische Geometrie existiert, sofern wir aus der Arithmetik den Satz herübernehmen, dass die Gesetze der gewöhnlichen reellen Zahlen auf keinen Widerspruch führen. Damit ist zugleich die Existenz aller derjenigen Geometrieen nachgewiesen, die wir im Laufe der Untersuchung betrachtet haben. –

Jetzt können wir auch übersehen, dass jeder Schnittpunktsatz eine Folge aus Desargues und Pascal ist.

Jeder Schnittpunktsatz hat doch folgende Form: Man nimmt gewisse Punkte und Graden willkürlich an, nur dass etwa bestimmte Punkte auf bestimmten Graden liegen, und konstruiert dann neue Schnittpunkte. Die Behauptung ist dann, dass gewisse drei Punkte auf einer Graden liegen, bezw. gewisse drei Graden durch einen Punkt gehen. In die Sprache der analytischen Geometrie übersetzt heisst dies: <u>Ein Ausdruck $A(p_1, p_2, p_3 \ldots)$, der aus den Parametern $p_1, p_2, p_3 \ldots$ vermittelst der vier Spezies zusammengesetzt ist, soll identisch, d.h. für alle Parameterwerte verschwinden.</u> Dieser Ausdruck muss dann verschwinden auf Grund der formalen Rechnungsgesetze, d.h. aber wie wir früher sahen, auf Grund der Pascal und Desargues. Man erkennt hieraus, dass man selbst durch Projektion aus beliebig hohen Räumen keine neuen Schnittpunktsätze erhalten kann. –

Wir haben in dieser Vorlesung gewissermassen eine <u>Theorie der Geometrie</u> gegeben; wir wollen nun noch eine Bemerkung über die <u>Anwendung</u> dieser Theorie <u>auf die Wirklichkeit</u> machen. <u>Die geometrischen Sätze gelten in der Natur niemals mit voller Genauigkeit, weil die Axiome von den Objekten niemals genau erfüllt werden.</u> Dieser Mangel an Uebereinstimmung liegt aber im Wesen

je.

jeder Theorie; denn eine Theorie, die bis ins einzelne mit der Wirklichkeit übereinstimmte, wäre nur mehr eine genau Beschreibung der Dinge. –

Ein wesentliches Stück unserer Untersuchung waren die Beweise für die Unbeweisbarkeit gewisser Sätze; wir erinnern hier zum Schluss daran, dass derartige Beweise in der modernen Mathematik überhaupt eine grosse Rolle spielen und sich als fruchtbar erwiesen haben; man denke nur an die Quadratur des Zirkels, an die Auflösung der Gleichungen 5. Grades durch Wurzelziehen, an Poincaré's Satz, dass es beim Dreikörperproblem eindeutige Integrale ausser den bekannten nicht giebt, etc.

Weiter seien noch einige interessante Probleme genannt, die bis jetzt noch unerledigt sind.

1.) Lassen sich Pascal und Desargues vielleicht beweisen aus den ebenen Axiomen I, II, III, ohne IV?

2.) Beweis der Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck aus I, II, III, ohne V.

3.) Begründung der Lehre von der Messung von Raumvolumina. –

Wir schliessen diese Vorlesung mit Bemerkungen über:

Elementare geometrische Konstruktionen.

Eine erste Frage ist: Kann man die mit Zirkel und Lineal ausführbaren Konstruktionen nicht auch mit geringeren Hülfsmitteln ausführen?

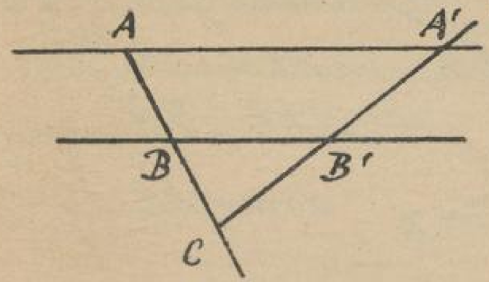
Es zeigt sich hier, dass der Zirkel das Lineal überflüssig macht; dass ein einziger fester Kreis den Zirkel überflüssig macht.

Weiter kann man fragen: welche Konstruktionen können allein auf Grund der Kongruenzsätze ausgeführt werden?

Aus früheren Betrachtungen [pag. 60ff] ergiebt sich, dass es hier nicht möglich ist, z. B. ein Dreieck aus seinen drei Seiten zu konstruieren. Dagegen lassen sich alle diejenigen Konstruktionen ausführen, bei denen man mit Strecken- und Winkel-abtragen auskommt. Es zeigt sich also, dass es einen Unterschied macht, ob man den Zirkel unbeschränkt oder nur zum Abtragen von Strecken und Winkeln gebraucht. Analytisch sind die letzteren Konstruktionen dadurch charakterisiert, dass ausser den vier Spezies nur noch die Operation $\sqrt{1+x^2}$ vorkommt.

Hieran schliesst sich die weitere Frage nach den geringsten Hülfsmitteln, mit denen sich die letztgenannten Konstruktionen ausführen lassen. Es ergiebt sich, dass das Abtragen von Strecken allein bereits das Winkelabtragen enthält. Wir wollen dies, da sich dabei allerlei einfache Konstruktionen ergeben, kurz zeigen, indem wir der Reihe nach folgende Aufgaben lösen:

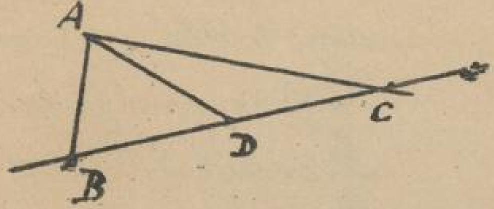
1.) Durch einen gegebenen Punkt A zu einer gegebenen Graden eine Parallele zu ziehen.



Man ziehe AB beliebig, mache $BC = AB$, ziehe CB' beliebig, mache $B'A' = CB'$; dann ist

$$AA' \parallel BB'.$$

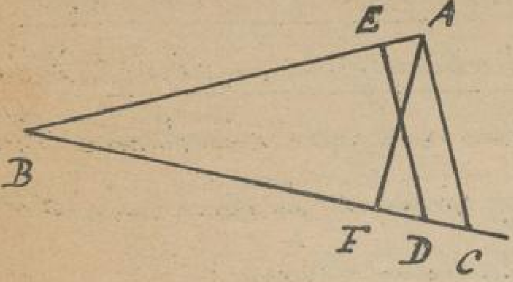
2.) In einem gegebenen Punkt A einen rechten Winkel zu konstruieren.



Man ziehe durch A eine beliebige Grade AD, durch D eine beliebige Grade BC und mache $AD = BD = CD$. Dann ist $\measuredangle BAC$ ein Rechter.

3.) Von einem gegebenen Punkt A auf eine gegebene

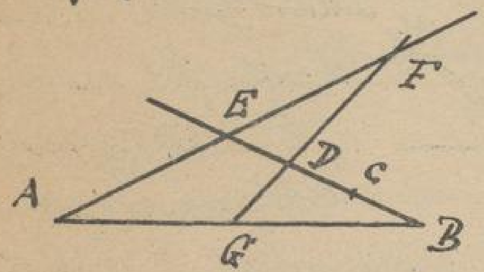
Grade eine Senkrechte zu fällen.



Man konstruiere nach 2) in A einen rechten Winkel BAC, mache $BD = BA$, ziehe nach 1) $DE \parallel AC$ und mache $BF = BE$. Dann ist $AF \perp BC$.

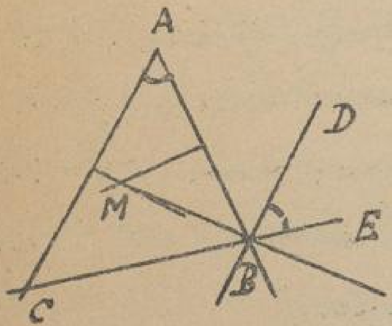
Analog kann man in F auf BC die Senkrechte errichten.

4.) Eine gegebene Strecke AB zu halbieren.



Man ziehe BC beliebig mache $BC = CD = DE$, $AE = EF$, und ziehe FDG; dann ist $AG = GB$.

5.) Einen gegebenen Winkel α an eine gegebene Grade BC anzutragen.



Man konstruiere nach 4) 3) den Mittelpunkt M des dem ΔABC umbeschriebenen Kreises, und ziehe $BD \perp MB$. Dann ist $DBE = \alpha$. Durch Parallelenziehen kann man den Scheitel dieses Winkels an jeden vorgegebenen Punkt auf BC bringen. –

Weiter zeigt sich, dass das Streckenabtragen durch Winkelhalbieren ersetzt werden kann. –

Endlich kann man fragen, welche Aufgaben nur auf Grund der fünf oben charakterisierten Spezies lösbar sind. Es ergiebt sich das interessante Resultat, dass alle überhaupt mit Zirkel und Lineal konstruierbaren regulären Polygone durch Streckenabtragen allein konstruierbar sind.

Beim regulären Dreieck z. B. kommt es auf die Konstruktion von $\sqrt{3}$ an; und diese ist ausführbar, denn es ist $\sqrt{3} = \sqrt{1+(\sqrt{2})^2}$, $\sqrt{2} = \sqrt{1+1}$.

Inhalt.

178

Hilbert
Euklid.
Geo-
metrie.